CURSO DE VARIABLE COMPLEJA

LEVINSON

REDHEFFER

EDITORIAL REVERTÉ

CURSO DE VARIABLE COMPLEJA

Norman Levinson

Massachusetts Institute
of Technology

Raymond M. Redheffer

University of California,
Los Angeles

EDITORIAL
REVERTÉ

Barcelona · Bogotá · Buenos Aires · Caracas · México

Título de la obra original:

Complex variables

Edición original en lengua inglesa publicada por:

Holden-Day, Inc., San Francisco
Copyright © by Holden- Day, Inc.

Edición en español

© Editorial Reverté, S. A., 1990

Edición en papel:
ISBN 978-84-291-5093-3

Edición e-book (PDF):
ISBN: 978-84-291-9122-6

Versión española por:

Luís Bou García
Profesor Encargado de Curso en la Universidad
Complutense de Madrid

Revisada por:

Dr. D. Enrique Linés Escardó
Catedrático de análisis matemático
de la Facultad de Ciencias de la
Universidad Complutense de Madrid

Propiedad de:
EDITORIAL REVERTÉ, S. A.
Loreto, 13-15, local B
08029 Barcelona
Tel: (+34) 93 419 33 36
reverte@reverte.com
www.reverte.com

Reservados todos los derechos. La reproducción total o parcial de esta obra, por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático y la distribución de ejemplares de ella mediante alquiler o préstamo públicos, queda rigurosamente prohibida, sin la autorización escrita de los titulares del copyright, bajo las sanciones establecidas por las leyes.

603

AGRADECIMIENTO

Es un placer expresar nuestra estimación a

FREDERICK H. MURPHY,

presidente de Holden Day, cuya actividad creadora como editor ha permitido dar a luz esta obra.

Prólogo

Este libro se ha escrito pensando en el amplio sector de estudiantes cuyo interés por el Análisis de variable compleja se debe, principalmente, a que puede resultarles útil. Su contenido representa lo que, en opinión de los autores, es la información mínima indispensable tanto para matemáticos como para físicos e ingenieros.

No existiendo amplio acuerdo acerca de los fundamentos de la Matemática, en Análisis se opta, generalmente, por establecer un conjunto de postulados, que tampoco son de aceptación universal, y desarrollar a partir de ellos el resto de la teoría. En este texto hemos asumido la validez de numerosos resultados de Análisis de variable real. En la actualidad estos resultados previos forman parte no sólo de los cursos de Cálculo y Análisis real, sino también de los primeros cursos de Matemáticas para físicos e ingenieros. De todas formas, un estudiante no familiarizado con algunos de los resultados asumidos puede, sencillamente, aceptar como válidas las proposiciones basadas en ellos y continuar el estudio del texto. En este sentido, el desarrollo lógico del texto es autónomo.

Al estudiar Matemáticas el objetivo no debe ser tan sólo un aprendizaje pasivo motivado por la belleza estética del tema. Debe sobre todo desarrollar la capacidad de utilizar los conocimientos adquiridos en otras regiones de la Matemática, de aplicar las Matemáticas en otras disciplinas y de crear nuevas matemáticas. Hemos intentado aquí dar idea tanto de la amplitud del Análisis de variable compleja como de su profundidad.

Norman Levinson
Raymond M. Redheffer

Al instructor

Para ciertos fines no es preciso estudiar con detalle las secciones afectadas de* que pueden, sin embargo, utilizarse ocasionalmente como material de consulta y referencia. Uno de los motivos para distinguir de esta forma una sección es que su contenido siga tan de cerca el correspondiente desarrollo en variable real que muchos lectores no tendrían inconveniente en aceptar sin mayor justificación los resultados que se dan en ella. También se han señalado con asterisco aquellas secciones en las que se presentan aplicaciones importantes, pero aisladas. En ocasiones, una sección marcada con asterisco contiene ideas nuevas y esenciales, pero expuestas con un grado de rigor y generalidad que podría parecer superfluo a quienes estén interesados principalmente en las aplicaciones. En estos casos se hace un resumen informal de su contenido en la primera de las secciones ordinarias siguientes. De acuerdo con nuestra experiencia, omitiendo las secciones "asterisco" el instructor puede alcanzar el núcleo de la integración de variable compleja antes de finalizar la cuarta semana. La rapidez de exposición así obtenida resulta muy satisfactoria para los estudiantes de Matemática aplicada, que sólo disponen de un tiempo muy limitado para adquirir las ideas esenciales.

Para ahorrar espacio muchos problemas se componen de varias partes no numeradas, dispuestas a lo ancho de la página. En general, su dificultad técnica aumenta horizontalmente, mientras que su dificultad conceptual lo hace en sentido vertical; es decir, su dificultad teórica es función creciente de su número de orden. Los problemas pueden clasificarse en tres grandes categorías: (1) Aquellos cuyo objeto es asegurar la asimilación de las ideas de la sección que los precede, (2) aquellos que preparan al lector para comprender mejor otros conceptos expuestos más adelante, y (3) los que dan nuevos teoremas y sirven como punto de partida para una posible investigación original del lector. Algunos problemas de carácter superior se han incluido con objeto de enriquecer el texto cuando éste se usa con alumnos adelantados, como han hecho los autores. En tales casos las condiciones y conocimientos previos se enuncian explícitamente.

Ambos autores han efectuado gran parte de sus trabajos de investigación sobre teoría de funciones de una variable compleja, por lo que este tema es para ellos de gran dinamismo y vitalidad. Al objeto de llevar rápidamente al estudiante a un nivel desde el que pueda disponer de perspectiva y la teoría se le presente como un cuerpo vivo, hemos debido efectuar algunos "recortes". Ciertos desarrollos analíticos se han simplificado

mediante consideraciones de Geometría plana; también han sido precisos ciertos compromisos en la notación. La presentación de la teoría se ha hecho en el orden lógico, "teorema" - "demostración", pero en nuestra opinión debe concederse gran valor a la intuición, a fin de conseguir a un tiempo una comprensión más profunda de los conceptos y fundamento de ellos. Aunque nuestros objetivos sean limitados, hemos tratado de enseñar más la actitud del realizador activo que la del espectador pasivo en esta elegante y fundamental región de las Matemáticas.

Norman Levinson
Raymond M. Redheffer

Sugerencias para usar este texto

Este libro está organizado en cincuenta lecciones. La última de cada capítulo es muy breve, y da oportunidad de repasar las anteriores.

Curso de un semestre para matemáticos

Capítulo 1: 1,2,3,4,5,6
Capítulo 2: 1,2,3,4,7
Capítulo 3: 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10
Capítulo 4: 1,2,3,6,9
Capítulo 5: 1,2,6,7,8
Capítulo 6: 1,2,3

Curso de un semestre para ingenieros

Capítulo 1: 1,2,3,4
Capítulo 2: 1,2,3,5,6
Capítulo 5: 1,2,3,4,5
Capítulo 3: 3,5,6,7,8,9
Capítulo 4: 2,3,4,5,6,7,10
Capítulo 6: 1,2,3,4

Curso de un semestre para físicos

Capítulo 1: 1,2,3,4
Capítulo 2: 1,2,3,4,5
Capítulo 3: 3,5,6,7,8,9
Capítulo 4: 2,3,4,5,6,8,10
Capítulo 5: 1,2,3,4
Capítulo 6: 1,2,3,5,6,7,8,9

Curso de dos semestres

Primer semestre: Capítulos 1,2,3
Segundo semestre: Capítulos 4,5,6

Curso de dos semestres para estudiantes avanzados

Primer semestre: Casi todo este libro
Segundo semestre: Temas escogidos de obras superiores y de artículos originales.

Índice analítico

Prólogo VII
Al instructor IX
Sugerencias para usar este texto XI

Capítulo 1. Números complejos y funciones 1

1. Los números complejos 1
2. Valores absolutos 8
3. La multiplicación y el plano complejo 15
4. Regiones y funciones 22
5. Límites y continuidad 31
6. Los números complejos como pares de números reales 37

Capítulo. 2. La derivación de variable compleja 42

1. Funciones analíticas 42
2. Funciones exponencial y trigonométricas 50
3. Las funciones logarítmica-exponencial 58
4. La superficie de Riemann de log z 65
5. Funciones armónicas 72
6. Aplicación al estudio de flujos planos 77
7. Los fundamentos del análisis de variable compleja 87

Capítulo 3. La integración de variable compleja 93

1. Integración sobre un contorno 93
2. Otras propiedades de las integrales. Invariancia 102
3. El teorema de Cauchy; caso particular 113
4. El teorema de Cauchy-Gousart; caso particular 122
5. La fórmula integral de Cauchy y sus consecuencias 128
6. La serie de Taylor 136
7. Principios de identidad y del módulo máximo 144
8. Singularidades aisladas 151
9. Series de Laurent 160
10. La noción de analiticidad 169

Capítulo 4. Teoría de residuos 176

1. Dominios simplemente conexos 176
2. El teorema de los residuos 185
3. Integrales sobre el eje real 194
4. Integrales impropias. Valores principales 201
5. Integrandos con puntos de ramificación 209
6. Principio del argumento; teorema de Rouche 215
7. Fórmulas de Poisson, Hilbert y Bromwich 223
8. Residuo en el punto del infinito 232
9. Otras formas del teorema de los residuos 241
10. Deformación de contornos 251

Capítulo 5. Representación conforme 258

1. Representación conforme. Transformaciones bilineales 258
2. Transformaciones bilineales. Continuación 267
3. Funciones armónicas y representación conforme 277
4. La transformación de Schwarz-Christoffel 288
5. Polinomios de Hurwitz. Funciones positivas 296
6. Aplicaciones inversas. Funciones univalentes 304
7. Teoremas globales 312
8. Teorema de representación de Riemann 319

Capítulo 6. Convergencia uniforme 330

1. Convergencia de sucesiones 330
2. Convergencia de series 338

3. Series de potencias 346
4. Fórmulas de Parseval, Schwarz y Poisson 353
5. Funciones definidas por integrales 360
6. Series asintóticas 369
7. Productos infinitos 379
8. Desarrollos de Weierstrass y de Mittag-Leffler 387
9. Prolongación analítica 397

Notas 411
Respuestas 415
Indice alfabético 423

Capítulo 1

Números complejos y funciones

En este capítulo se revisan desde el punto de vista de la variable compleja los conceptos y resultados referentes a polinomios, funciones, regiones y límites que ya son familiares en el Análisis de variable real. Aunque existen muchas semejanzas, el carácter bidimensional de los números complejos da a las descripciones geométricas un aspecto peculiar. Por ejemplo, una función real de variable real suele transformar un intervalo de la recta en otro intervalo, mientras que una función de una variable compleja aplica generalmente una región plana sobre otra región plana. El carácter bidimensional de los números complejos explica, en parte, el destacado papel de la topología del plano en el Análisis de variable compleja, así como la efectividad y potencia de este análisis en los problemas bidimensionales de la Física matemática.

1. Los números complejos. Como el cuadrado de un número real cualquiera es positivo o nulo, no es posible resolver la ecuación $x^2 = -1$ mediante números reales. Los números complejos son una extensión del sistema de los números reales; constituyen un sistema más amplio en el que la ecuación anterior y otras parecidas admiten soluciones. Los matemáticos conocen desde hace mucho tiempo la imposibilidad de resolver ecuaciones como la $x^2 + 1 = 0$ mediante números reales. Sin embargo, el desarrollo teórico de los números complejos no pudo realizarse sino siglos después de conocerse esta dificultad, lo que muestra que la noción de número complejo no es, en modo alguno, evidente.

En el pasado se construyeron los números complejos adjuntando al sistema de los números reales el símbolo $\sqrt{-1}$ que satisface la ecuación $x^2 + 1 = 0$ por definición. Esta notación no es, en realidad, muy satisfactoria, pues el símbolo $\sqrt{-1}$ origina las mismas dificultades que aparecen si se representa el 1 por $\sqrt{1}$. Como -1 es también una raíz cuadrada de 1, pueden darse situaciones aparentemente paradójicas al operar sin rigor con $\sqrt{1}$. Una conocida paradoja, debida a una ligereza excesiva al operar con $\sqrt{-1}$, es la siguiente: $(\sqrt{-1})^2 = -1$ y, por otra parte, $(\sqrt{-1})^2 = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$. Se evita este escollo representando por i la $\sqrt{-1}$, notación que fue introducida por el matemático suizo Leonhard Euler en 1779. Con ella se respeta la propiedad fundamental $i^2 = -1$, y en cambio, hay poco peligro de confundir i con $-i$. El símbolo i se denomina a veces unidad imaginaria, del mismo modo que el 1 suele denominarse unidad real.

Sirviéndonos de la notación de Euler, daremos aquí un resumen de las propiedades algebraicas de los números complejos. Se supone que el lector posee ya cierta práctica en

el manejo de los números complejos, por lo que, tal vez, podrá interesarle una exposición exclusivamente algebraica. Se le supondrá también familiarizado con el sistema de los números reales; pero en las páginas próximas no se hará ninguna consideración de tipo geométrico.

Se define un número complejo α por dos números reales a y b, y se designa por:

$$\alpha = a + ib.$$

El número a es la parte real de α; y el b es su parte imaginaria. Siempre que se escriba una igualdad del tipo $\alpha = a + ib$ y no se especifique otra cosa, ha de entenderse que a y b son reales. Así pues

$$a = \operatorname{Re} \alpha, \qquad b = \operatorname{Im} \alpha$$

donde los símbolos Re e Im representan las partes real e imaginaria, respectivamente.

Si $\alpha = a + ib$ y $\beta = c + id$, los números complejos α y β son iguales si y solamente si $a = c$ y $b = d$. La suma y el producto de α y β son, por definición,

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= (a + c) + i(b + d) \\ \alpha\beta &= (ac - bd) + i(ad + bc). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Estos son los resultados que se obtendrían operando con los primeros miembros de acuerdo con las reglas ordinarias de la Aritmética y aplicando la relación $i^2 = -1$. De las fórmulas (1.1) se deducen fácilmente las leyes asociativas, conmutativas y distributiva:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= \beta + \alpha & \alpha\beta &= \beta\alpha \\ \alpha + (\beta + \gamma) &= (\alpha + \beta) + \gamma & \alpha(\beta\gamma) &= (\alpha\beta)\gamma \\ \alpha(\beta + \gamma) &= \alpha\beta + \alpha\gamma. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Si en (1.1) hacemos $b = d = 0$, vemos que

$$\begin{aligned} (a + i0) + (c + i0) &= (a + c) + i0 \\ (a + i0)(c + i0) &= (ac) + i0. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Las igualdades (1.3) indican que el número complejo $x + i0$ es, excepto en notación, equivalente al número real x, y haremos así, considerar que

$$x = x + i0.$$

Esta igualdad muestra que los números complejos contienen como caso particular a los números reales.

Se comprueba mediante (1.1) que $0 + i0$ y $1 + i0$ son el cero y la unidad, respectivamente. Es decir,

$$\alpha + (0 + i0) = \alpha, \qquad \alpha(1 + i0) = \alpha \tag{1.4}$$

para todo α. Como en la correspondencia entre números reales y complejos antes mencionada es $0 = 0 + i0$ y $1 = 1 + i0$, las ecuaciones (1.4) adoptan la forma familiar $\alpha + 0 = \alpha$, $\alpha 1 = \alpha$.

Se denota por $-\alpha$ el producto $(-1)(\alpha)$. Con más precisión,

$$\alpha + (-\alpha) = (1)(\alpha) + (-1)(\alpha) = [(1) + (-1)](\alpha) = 0.$$

Dados dos números complejos cualesquiera α y β, la ecuación

$$\alpha + z = \beta \tag{1.5}$$

tiene siempre una única solución z, que es su *diferencia* y se escribe $\beta - \alpha$. En efecto, sumando $-\alpha$ a los dos miembros de (1.5) se obtiene

$$z = \beta + (-\alpha)$$

y recíprocamente, este valor de z satisface a (1.5). Así pues, $\beta - \alpha = \beta + (-\alpha)$.
El *conjugado* de α se denota $\overline{\alpha}$ y se define como

$$\overline{\alpha} = a - ib.$$

El conjugado de $\overline{\alpha}$ es α. En virtud de (1.1),

$$\alpha\overline{\alpha} = a^2 + b^2$$

y por lo tanto, $\alpha\overline{\alpha} > 0$ salvo cuando $\alpha = 0$.

Si $\alpha \neq 0$ y $z = x + iy$, la ecuación

$$\alpha z = \beta \tag{1.6}$$

tiene una solución única z que es el *cociente* de β por α y que se designa por β/α. Podría obtenerse igualando las partes real e imaginaria de los dos miembros de (1.6), y resolviendo el sistema de dos ecuaciones lineales en x e y con determinante $a^2 + b^2$. Pero es más conveniente multiplicar ambos miembros de (1.6) por $\overline{\alpha}$, lo que da

$$\overline{\alpha}\alpha z = \overline{\alpha}\beta.$$

Como $\bar{\alpha}\alpha > 0$, la ecuación anterior se puede multiplicar por $1/(\bar{\alpha}\alpha)$ obteniéndose

$$z = \frac{1}{\bar{\alpha}\alpha}\bar{\alpha}\alpha z = \frac{1}{\bar{\alpha}\alpha}\bar{\alpha}\beta = \frac{1}{a^2 + b^2}(a - ib)(c + id). \tag{1.7}$$

Recíprocamente, el valor de z dado por (1.7) satisface a (1.6).

La discusión anterior muestra que las leyes formales de la adición, substracción, multiplicación y división de números complejos son análogas a las de los números reales, y por tanto, ciertas definiciones y conceptos ya conocidos para la variable real, pueden extenderse sin más al caso complejo. Por ejemplo, como el lector recordará del Análisis real, una expresión de la forma

$$P(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$$

es un polinomio en z con coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Si $a_n \neq 0$, el grado del polinomio es n. Las mismas definiciones son válidas para el caso complejo, pero ahora los coeficientes, y z pueden ser complejos. Cuando todos los coeficientes son reales se dice que el polinomio es un polinomio real.

Para construir el polinomio $P(z)$ solamente son precisas la adición y la multiplicación. Como en el caso real, una función $P(z)/Q(z)$ que puede representarse como cociente de dos polinomios se llama función racional. Cuando los dos polinomios P y Q sean reales se dice que la correspondiente función racional es real.

Esta terminología se generaliza de manera evidente a situaciones parecidas. Por ejemplo, sumando, multiplicando y dividiendo reiteradamente $\alpha, \beta, \ldots, \sigma$ entre sí y con números reales, se obtiene una función racional real de $\alpha, \beta, \ldots, \sigma$

De la definición de conjugado de un número se deduce que

$$\overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}, \qquad \overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha}\bar{\beta}.$$

Estos resultados se extienden por inducción para cualquier número finito de sumandos o factores:

$$\overline{\alpha + \beta + \cdots + \sigma} = \bar{\alpha} + \bar{\beta} + \cdots + \bar{\sigma}$$
$$\overline{\alpha\beta \cdots \sigma} = \bar{\alpha}\bar{\beta} \cdots \bar{\sigma}.$$

Diremos brevemente que el conjugado de una suma es igual a la suma de los conjugados, y que el conjugado de un producto es igual al producto de los conjugados de los factores.

Si $\alpha z = \beta$, entonces $\bar{\alpha}\bar{z} = \bar{\beta}$ y, puesto que $z = \beta/\alpha$, tenemos

$$\overline{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)} = \frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}} \qquad (\alpha \neq 0).$$

Además, si c es real $\bar{c} = c$ y por tanto $\overline{c\alpha} = c\bar{\alpha}$ en este caso. Combinando estos resultados resulta que, si F es una función racional real cualquiera de $\alpha, \beta, \ldots, \sigma$, entonces

$$\overline{F(\alpha, \beta, \ldots, \sigma)} = F(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \ldots, \bar{\sigma}).$$

Ejemplo 1.1. Si α es un número complejo cualquiera, demostrar que

$$\operatorname{Re} \alpha = \frac{\alpha + \bar{\alpha}}{2}, \qquad \operatorname{Im} \alpha = \frac{\alpha - \bar{\alpha}}{2i}.$$

Si $\alpha = a + ib$, entonces $\alpha + \bar{\alpha} = (a + ib) + (a - ib) = 2a = 2\operatorname{Re} \alpha$, lo que da la primera ecuación. La demostración de la segunda es análoga.

Ejemplo 1.2. Resolver como se indica en el texto la ecuación $(1 + i)z = 2 + i$. Multiplicando por $1 - i$, que es el conjugado del coeficiente de z, se tiene

$$(1 + i)(1 - i)z = (1 - i)(2 + i) = 2 - i - i^2,$$

es decir, $2z = 3 - i$. Finalmente, dividiendo por 2 resulta $z = \frac{3}{2} - (\frac{1}{2})i$.

Ejemplo 1.3. Escribir $(2 + i)/(1 + i)$ en la forma $a + ib$. Multiplicando por el conjugado del denominador, $1 - i$, el numerador y el denominador de la fracción, se obtiene

$$\frac{2 + i}{1 + i} = \frac{(2 + i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{3 - i}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i.$$

Hemos utilizado el hecho de que si α y γ son distintos de cero, se tiene $\beta/\alpha = \gamma\beta/\gamma\alpha$. Esta propiedad se deduce de la definición de cociente, según la cual β/α y $\gamma\beta/\gamma\alpha$ son las únicas soluciones de

$$\alpha z = \beta \qquad \text{y} \qquad \gamma\alpha z = \gamma\beta,$$

respectivamente. Estas ecuaciones son claramente equivalentes por lo que sus soluciones son iguales. Las restantes propiedades de las operaciones con fracciones se generalizan con igual facilidad del caso real al complejo y no debe dudarse en utilizarlas. Una observación parecida es aplicable a las potencias con exponentes enteros; así, por ejemplo,

$$\alpha^m \alpha^n = \alpha^{m+n}, \qquad (\alpha^m)^n = \alpha^{mn}, \qquad (\alpha\beta)^n = \alpha^n \beta^n.$$

Ejemplo 1.4. Si P es un polinomio, un número α, real o complejo, tal que $P(\alpha) = 0$ es un *cero* del polinomio. Demostrar que los ceros complejos de un polinomio real se presentan siempre por pares conjugados.

Hay que probar que si $P(\alpha) = 0$, entonces es $P(\bar{\alpha}) = 0$. Como P es real, se tiene

$$P(\bar{\alpha}) = \overline{P(\alpha)} = \bar{0} = 0,$$

lo que completa la demostración.

Ejemplo 1.5. Demostrar que para todo entero positivo n se verifica

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = \frac{1 - z^n}{1 - z}, \qquad z \neq 1.$$

Si llamamos s al primer miembro de la igualdad, s y sz son respectivamente

$$s = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-2} + z^{n-1}$$
$$sz = z + z^2 + \cdots + z^{n-1} + z^n.$$

Restando miembro a miembro, $s(1 - z) = 1 - z^n$. Dividiendo por $1 - z$ se obtiene s.

Ejemplo 1.6. Si n es un entero positivo, demostrar que existen números reales positivos $c_0, c_1, \ldots, c_n$ tales que $c_0 = 1$, $c_1 = n$ y que

$$(1 + z)^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n$$

para todo número complejo z. Se efectúa la demostración por inducción. El resultado es trivial para $n = 1$ y suponiéndolo válido para n, multiplicando por $1 + z$ se tiene

$$(1 + z)^{n+1} = c_0 + (c_1 + c_0)z + \cdots + (c_n + c_{n-1})z^n + c_n z^{n+1}.$$

Observando esta expresión se comprueba que los nuevos coeficientes son positivos si lo eran los antiguos, que el término constante $c_0 = 1$ permanece invariable, y que el nuevo coeficiente de z es $n + 1$ si el primitivo coeficiente c_1 era n.

Este es el desarrollo de la potencia de un binomio que conocemos ya del análisis real; los coeficientes c_k son los coeficientes binomiales. La demostración anterior pone de manifiesto que este desarrollo es válido tanto si z es un número real como si es complejo.

Problemas

1. Calcular Re $(1+i)$, Im $(3-2i)$, $\overline{3-2i}$, $(1+i)+(3-2i)$, $(1+i)(3-2i)$.
2. Comprobar que $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ para $\alpha = 1 + 3i$, $\beta = 2 + 2i$, $\gamma = 3 + i$.
3. Resolver como en el Ejemplo 1.2 y comprobar el resultado sustituyéndolo:

$$(1 + i)z = 1, \qquad (5 + i)z = 6 - i, \qquad (1 + ib)z = 1 - ib.$$

4. Escríbanse en la forma $a + ib$ siendo $z = x + iy$, $z \neq 0$, $z \neq i$:

$$(1 + i)^2, \quad (1 + i)^{11}, \quad \frac{3 + 4i}{1 - 2i}, \quad z^3, \quad \bar{z}z, \quad \frac{\bar{z}}{z}, \quad \frac{z - i}{1 - \bar{z}i}.$$

5. Demostrar que $\operatorname{Re}(1/z) > 0$ si y solamente si $\operatorname{Re} z > 0$.
6. (a) Supongamos que en el ejemplo 1.6 n sea múltiplo de 4. Haciendo $z = i$ e igualando las partes imaginarias, demostrar que los coeficientes binomiales satisfacen, en este caso,

$$c_1 - c_3 + c_5 - c_7 + \cdots = 0.$$

(b) Obtener otra identidad igualando las partes reales.
(c) Considerar otros valores de n.

7. En el Ejemplo 1.6, poner $z = \beta/\alpha$ y multiplicar por α^n. Ha de obtenerse

$$(\alpha + \beta)^n = c_0\alpha^n + c_1\alpha^{n-1}\beta + c_2\alpha^{n-2}\beta^2 + \cdots + c_n\beta^n.$$

8. En el Ejemplo 1.5, poner $z = \beta/\alpha$ y multiplicar por α^{n-1}. Ha de obtenerse

$$\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2}\beta + \cdots + \alpha\beta^{n-2} + \beta^{n-1} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}, \qquad \alpha \neq \beta.$$

9. Si $\alpha = \beta$ y $\gamma = \delta$, probar $\alpha + \gamma = \beta + \delta$ y $\alpha\gamma = \beta\delta$.
10. Si $\alpha\beta = 0$, demostrar $\alpha = 0$ o $\beta = 0$. (Cuando $\alpha \neq 0$, α^{-1} existe.)
11. Si $\beta \neq 0$ y $\delta \neq 0$, entonces $(\alpha/\beta)(\gamma/\delta) = (\alpha\gamma)/(\beta\delta)$. (Mostrar que cada uno de los miembros verifica $(\beta\delta)z = \alpha\gamma$.)

Polinomios

12. Sea z_0 un número complejo dado. Se dice que un polinomio $P(z)$ es *divisible* por $z - z_0$ si $P(z) = (z - z_0)Q(z)$ donde $Q(z)$ es un polinomio. Para $n = 1, 2, 3, \ldots$ y c constante, demostrar que $c(z^n - z_0^n)$ es divisible por $z - z_0$. (Poner $\alpha = z$ y $\beta = z_0$ en el problema 8.)
13. Si $P(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_mz^m$ es un polinomio arbitrario, demostrar que

$$P(z) - P(z_0)$$

es divisible por $z - z_0$. (Expresar $P(z) - P(z_0)$ en forma de una suma de términos análogos a los del Problema 12.)
14. Deducir del Problema 13 que $P(z)$ es divisible por $z - z_0$ si $P(z_0) = 0$.
15. Sea $P(z)$ un polinomio de grado $\leq n$ que se anula en n valores distintos $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Demostrar que

$$P(z) = c(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$$

donde c es una constante. (Por el Problema 14, $P(z) = (z - z_n)Q(z)$ y $Q(z) = 0$ en $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$. Proceder por inducción.)

16. Demostrar que si el polinomio $P(z)$ tiene grado $\leq n$ y se anula para $n+1$ valores distintos z_k, entonces $P(z) = 0$. (Haciendo $z = z_{n+1}$ en el Problema 15 se deduce $c = 0$.)
17. Si $P(z)$ y $Q(z)$ son polinomios de grado $\leq n$ que toman el mismo valor para $n+1$ valores z_k, distintos, entonces $P(z) = Q(z)$. (Aplicar el Problema 16 a $P(z) - Q(z)$.)

2. Valores absolutos. Muchos de los conceptos y proposiciones del Análisis se expresan por desigualdades, y no existe una relación $<$ entre números complejos que posea las propiedades habituales de la relación de orden de los números reales.[1] Sin embargo, introduciendo el concepto de valor absoluto se pueden expresar con facilidad desigualdades en las que intervienen números complejos.

Si $\alpha = a + ib$, el *valor absoluto* de α se representa por $|\alpha|$ y se define como la raíz cuadrada no negativa de $a^2 + b^2$. Así pues,

$$|\alpha|^2 = a^2 + b^2 = \alpha\bar{\alpha} \qquad \text{y} \qquad |\alpha| \geq 0.$$

Es evidente que $|\alpha| > 0$ excepto cuando $\alpha = 0$. Si c es positivo $|c| = c$. La expresión $|\alpha|$ se llama con frecuencia *módulo* de α.

Se deduce de $|\alpha|^2 = \alpha\bar{\alpha}$, que $|\bar{\alpha}| = |\alpha|$. Por consiguiente

$$|\alpha\beta|^2 = \alpha\beta\,\overline{\alpha\beta} = \alpha\beta\,\bar{\alpha}\bar{\beta} = \alpha\bar{\alpha}\,\beta\bar{\beta} = |\alpha|^2\,|\beta|^2,$$

y extrayendo la raíz cuadrada

$$|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|. \tag{2.1}$$

Este resultado se generaliza por inducción para productos de cualquier número de factores, dando

$$|\alpha\beta \cdots \sigma| = |\alpha||\beta| \cdots |\sigma|,$$

que establece que el valor absoluto de un producto es igual al producto de los valores absolutos de los factores.

Si $\alpha z = \beta$, entonces $|\alpha||z| = |\beta|$ y, dado que $z = \beta/\alpha$ si $\alpha \neq 0$,

$$\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| = \frac{|\beta|}{|\alpha|} \qquad (\alpha \neq 0).$$

Lo que nos dice que el valor absoluto de un cociente es igual al cociente de los valores absolutos.

Como $a^2 \leq a^2 + b^2$ y $b^2 \leq a^2 + b^2$ tomando la raíz cuadrada positiva de los dos miembros de las dos expresiones vemos que $|a| \leq |\alpha|$ y que $|b| \leq |\alpha|$, es decir,

$$|\text{Re}\,\alpha| \leq |\alpha|, \qquad |\text{Im}\,\alpha| \leq |\alpha|.$$

[1] Por lo tanto, una desigualdad como $a < b$ o $0 \leq t \leq 1$ implica automáticamente que los números considerados son reales.

Si $\gamma=\alpha\overline{\beta}$, entonces $\alpha\overline{\beta} + \overline{\alpha}\beta = \gamma + \overline{\gamma} = 2\text{Re}\ \gamma$, y por tanto la fórmula

$$(\alpha + \beta)(\overline{\alpha} + \overline{\beta}) = \alpha\overline{\alpha} + \alpha\overline{\beta} + \overline{\alpha}\beta + \beta\overline{\beta}$$

da

$$|\alpha + \beta|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2\text{Re}\,(\alpha\overline{\beta}). \tag{2.2}$$

Como

$$|\text{Re}\,(\alpha\overline{\beta})| \leq |\alpha\overline{\beta}| = |\alpha||\beta|,$$

resulta

$$|\alpha + \beta|^2 \leq |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2|\alpha||\beta| = (|\alpha| + |\beta|)^2$$

o sea

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|. \tag{2.3}$$

Este resultado se extiende por inducción para una suma finita cualquiera, así que es:

$$|\alpha + \beta + \cdots + \sigma| \leq |\alpha| + |\beta| + \cdots + |\sigma|. \tag{2.4}$$

Luego, el valor absoluto de una suma no puede ser mayor que la suma de los valores absolutos de sus términos.

En (2.3) es válido el signo de igualdad si y solamente si $\text{Re}\,(\alpha\overline{\beta})=|\alpha\overline{\beta}|$ en (2.2). A su vez, esto ocurrirá si y solamente si $\alpha\overline{\beta} \geq 0$. Dado que $\alpha\overline{\beta} = (\alpha/\beta)|\beta|^2$ si $\beta \neq 0$, resulta que la igualdad es válida en (2.3) si y solamente si $\alpha/\beta \geq 0$ o $\beta = 0$.

Terminaremos esta discusión acerca del valor absoluto y sus propiedades mencionando dos interpretaciones posibles de los conceptos anteriores; en la primera se hace uso de los vectores y en la segunda del plano cartesiano.

Si, como muestra la Figura 2-1 se representa el número complejo $\alpha=a + ib$ por un vector de componente horizontal a y de componente vertical b, la regla de adición

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$$

pone de manifiesto que los números complejos se suman como los vectores (Figura 2-2). También es claro que $|\alpha| = (a^2 + b^2)^{1/2}$ es la longitud del vector que representa a α. Así pues, (2.3) expresa el hecho de que la suma de dos lados de un triángulo es mayor o igual que el tercero. Por este motivo, a veces, (2.3) se denomina desigualdad triangular. Análogamente, en términos geométricos, (2.4) afirma que la línea recta es la distancia más corta entre dos puntos, como se muestra en la Figura 2-3. La sustracción de vectores se ilustra geométricamente en la Figura 2-4, donde

$$\alpha = \beta + (\alpha - \beta). \tag{2.5}$$

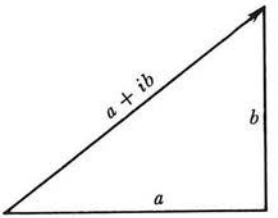


Figura 2-1

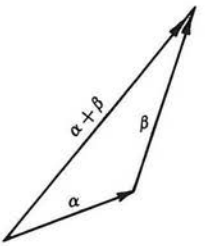


Figura 2-2

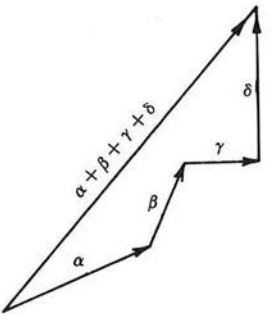


Figura 2-3

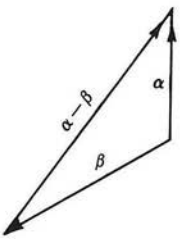


Figura 2-4

Como la suma de los valores absolutos acota superiormente al valor absoluto de la suma, de (2.5) se deduce $|\alpha| \leq |\beta|+|\alpha - \beta|$ y restando $|\beta|$ de los dos miembros,

$$|\alpha| - |\beta| \leq |\alpha - \beta|.$$

Intercambiando los papeles de α y β se obtiene una desigualdad análoga para $|\beta| - |\alpha|$ y por consiguiente

$$\big||\alpha| - |\beta|\big| \leq |\alpha - \beta|. \tag{2.6}$$

De acuerdo con la Figura 2-4 esta desigualdad expresa que la diferencia de dos lados de un triángulo no puede ser mayor que el tercero.

La representación de los números complejos mediante vectores es de gran utilidad en Dinámica, en la teoría de las corrientes alternas, y en otras muchas cuestiones. Sin embargo, la representación mediante puntos del plano, que describimos a continuación, es mucho más importante desde el punto de vista conceptual.

Cada número complejo $z = x + iy$ puede asociarse con un único punto (x,y) del plano cartesiano, y recíprocamente, cada punto (x, y) del plano corresponde a un único

número complejo $x + iy$. Podemos, pues, sin riesgo de confusión, considerar a los números complejos como puntos del plano y hablar indistintamente del punto z o del número complejo z.

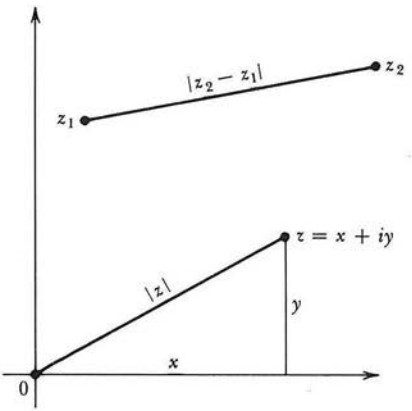


Figura 2-5

Como es evidente, $|z| = (x^2 + y^2)^{1/2}$ representa la distancia desde z hasta el origen (Figura 2-5). La distancia entre dos puntos

$$z_1 = x_1 + iy_1 \qquad \text{y} \qquad z_2 = x_2 + iy_2$$

es

$$[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]^{1/2}$$

como ya se sabe por una conocida fórmula de Geometría analítica, y por la definición de valor absoluto esta expresión es $|z_2 - z_1|$. Por consiguiente, desde un punto de vista geométrico, $|z_2 - z_1|$ debe interpretarse como la distancia de z_1 a z_2.

Sustituyendo z por $z' = z + \alpha$, donde $\alpha = a + ib$, las nuevas coordenadas son

$$x' = x + a, \qquad y' = y + b,$$

y por lo tanto la transformación $z' = z + \alpha$ representa una traslación. Como

$$|z_2' - z_1'| = |(z_2 + \alpha) - (z_1 + \alpha)| = |z_2 - z_1|,$$

la traslación conserva las distancias, como geométricamente era de esperar.

Si sustituimos z por $z' = \bar{z}$, las nuevas coordenadas son $(x, -y)$, y luego esta transformación representa la simetría (o reflexión) respecto del eje x (Figura 2-6). La simetría no modifica las distancias, pues

$$|z_2' - z_1'| = |\bar{z}_2 - \bar{z}_1| = |\overline{z_2 - z_1}| = |z_2 - z_1|.$$

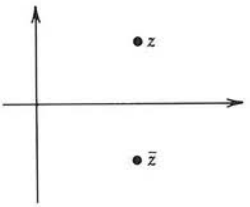


Figura 2-6

Si sustituimos z por $z' = \alpha z$, donde α es un número complejo cualquiera de módulo 1, entonces

$$|z_2' - z_1'| = |\alpha z_2 - \alpha z_1| = |\alpha||z_2 - z_1| = |z_2 - z_1|.$$

Por lo tanto, esta transformación también conserva las distancias. Como se verá en la próxima sección, representa un giro con centro en el origen.

Ejemplo 2.1. Si $|\alpha| < 1$, demostrar que $|z| \leq 1$ es equivalente a

$$\left|\frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}\right| \leq 1.$$

Multiplicando esta desigualdad por $|1 - \bar{\alpha}z|$ y elevando al cuadrado, vemos que la desigualdad anterior es equivalente a

$$|z - \alpha|^2 \leq |1 - \bar{\alpha}z|^2,$$

la cual, a su vez, es equivalente a

$$(z - \alpha)(\bar{z} - \bar{\alpha}) \leq (1 - \bar{\alpha}z)(1 - \alpha\bar{z}).$$

Reduciendo todos los términos semejantes, encontramos que esta última expresión se simplifica obteniéndose

$$(1 - |\alpha|^2)(1 - |z|^2) \geq 0,$$

que es válida si y solamente si $|z| \leq 1$. La demostración muestra que la igualdad se verifica si y solamente si $|z| = 1$

Ejemplo 2.2. Una colección de puntos del plano z se denomina también conjunto puntual o conjunto de puntos. Si ϵ es un número positivo dado, descríbanse los conjuntos de

puntos z tales que $|z - z_0| = \epsilon$ y $|z - z_0| < \epsilon$. Como $|z - z_0|$ es la distancia desde z hasta z_0, el primer conjunto representa una circunferencia de centro z_0 radio ϵ, que se muestra en la Figura 2-7. El segundo conjunto es el interior de este círculo representado por el disco circular de la Figura 2-8.

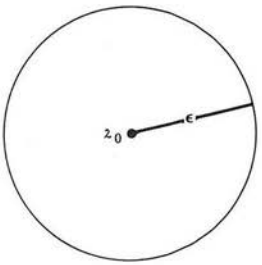


Figura 2-7

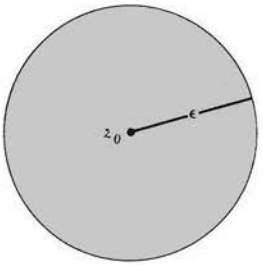


Figura 2-8

En Análisis es frecuente que al describir un conjunto, se den solamente las desigualdades que lo definen, omitiéndose la frase "el conjunto de todos los z tales que . . .". Según esto, se puede decir: la circunferencia $|z| = 1$, el disco $|z| < 1$, etc.

Ejemplo 2.3. Si $\beta \neq 0$ demuéstrese que

$$\left|\frac{(\alpha + \beta)^n - \alpha^n}{\beta} - n\alpha^{n-1}\right| \leq \frac{(|\alpha| + |\beta|)^n - |\alpha|^n}{|\beta|} - n|\alpha|^{n-1}. \tag{2.7}$$

Por el teorema del binomio (Ejemplo 1.6),

$$(\alpha + \beta)^n - \alpha^n = c_1\alpha^{n-1}\beta + c_2\alpha^{n-2}\beta^2 + \cdots + c_n\beta^n.$$

Como $c_1 = n$ el primer miembro de (2.7) se reduce a $|F(\alpha,\beta)|$ siendo

$$F(\alpha,\beta) = c_2\alpha^{n-2}\beta + \cdots + c_n\beta^{n-1}.$$

Los coeficientes binomiales son positivos y por lo tanto en virtud de (2.4) y después de (2.1) se tiene

$$|F(\alpha,\beta)| \leq F(|\alpha|,|\beta|).$$

Esta es la desigualdad (2.7).

Ejemplo 2.4. Hallar $\sqrt{\alpha}$. Poniendo $\alpha = a + ib$, $z = x + iy$, y $z^2 = \alpha$ las ecuaciones $|z|^2 = |\alpha|$ y $\operatorname{Re} z^2 = \operatorname{Re} \alpha$ dan, respectivamente,

$$x^2 + y^2 = |\alpha|, \qquad x^2 - y^2 = a.$$

Por tanto, $x^2 = \frac{1}{2}(|\alpha| + a)$ e $y^2 = \frac{1}{2}(|\alpha| - a)$. Si se eligen los signos de x e y de forma que $2xy = b$, se comprueba fácilmente que $z^2 = \alpha$. En la próxima sección se resuelve esta ecuación por otro método que es también aplicable a la ecuación $z^n = \alpha$. Obsérvese que si $\alpha \neq 0$ hay dos raíces cuadradas de α.

Problemas

1. Si $z = x + iy$ y los denominadores no se anulan, calcular

$$\left|\frac{(3 + 4i)(2 + i)}{(1 + 2i)(3 - 4i)}\right|, \qquad |z - 1|^2, \qquad |z|^4, \qquad \left|\frac{z + 1}{z - 1}\right|, \qquad \left|\frac{z + i}{1 - iz}\right|.$$

2. (a) Hallar $\sqrt{i}$, $\sqrt{-i}$, $\sqrt{1 + i}$, $\sqrt{2i + 3}$, y comprobar elevando al cuadrado. (b) Demostrar que una ecuación cuadrática $z^2 + az + b = 0$ puede ponerse en la forma $w^2 - \alpha = 0$ haciendo $z = w + h$ eligiendo h convenientemente.
3. Describir el conjunto de puntos z tal que

   (a) $\operatorname{Re} z = 0$, $\operatorname{Re} z > 0$, $|z| = 1$, $|z| > 1$, $\operatorname{Im} z = 1$, $\operatorname{Im} z < 1$, $1 < |z| < 2$.
   (b) $|z - 1| = 2$, $|z - 1| < 0.01$, $|z - 1| = |z + 1|$, $|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| = 1$.

4. Describir las siguientes transformaciones del plano:

$$z' = z + 1, \qquad z' = z + 1 + 2i, \qquad z' = 2z, \qquad z' = 2z + i, \qquad z' = \bar{z} + 1.$$

5. Sabiendo que $13 = 2^2 + 3^2$ y que $74 = 5^2 + 7^2$, expresar $(13)(74) = 962$ como suma de dos cuadrados. (Se hace $\alpha = 2 + 3i$, $\beta = 5 + 7i$ y se tiene en cuenta que $|\alpha|^2|\beta|^2 = |\alpha\beta|^2$.)
6. Si c es real y $\alpha \neq 0$, demostrar que $\alpha z + \bar{\alpha}\bar{z} + c = 0$ es la ecuación de una línea recta en el plano (x, y) y hallar su pendiente.
7. Si $|\alpha|^2 \geq c$, ¿qué figura representa la ecuación $z\bar{z} + \alpha z + \bar{\alpha}\bar{z} + c = 0$?
8. Si $\alpha \neq 0$, demostrar que α puede escribirse de modo único en la forma $\alpha = h\nu$ donde $h > 0$ y $|\nu| = 1$. (Al igualar los valores absolutos se obtiene $h = |\alpha|$.)
9. Los vectores α y β son paralelos si $\alpha = t\beta$ o si $\beta = t\alpha$ donde t es un número real. Deducir que la condición de paralelismo es $\operatorname{Im} \alpha\bar{\beta} = 0$.
10. (a) Demostrar que $\alpha \perp \beta$ si y solo si $\operatorname{Re} \alpha\bar{\beta} = 0$. (Dos vectores α y β son perpendiculares si y solo si verifican el teorema de Pitágoras, $|\alpha - \beta|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2$.) (b) Demostrar que $i\alpha \perp \alpha$ y $|i\alpha| = |\alpha|$, así pues, la multiplicación por i equivale a α un giro de 90°.
11. (a) En relación con el Problema 10, explicar por qué $z' = iz$ representa un giro en el plano de 90°. Ilustrar este resultado representando gráficamente z y z' para $z = 1$, i, $1 + i$. (b) Al multiplicar otra vez por i se obtiene $z'' = i(iz) = -z$. ¿Representa $z'' = -z$ un giro de 180° en el plano?
12. Aplicando (2.2) a β y a $-\beta$, demostrar la *identidad del paralelogramo*

$$|\alpha + \beta|^2 + |\alpha - \beta|^2 = 2(|\alpha|^2 + |\beta|^2).$$

Dibujando α y β como vectores con el mismo origen, dar la interpretación geométrica de esta identidad.

13. Demostrar, elevando al cuadrado, que $2^{-1/2}(|a| + |b|) \leq |\alpha| \leq |a| + |b|$.

14. Deducir de (2.4) y del Problema 8 de la Sección 1 que

$$\left|\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\right| \leq \frac{|\alpha|^n - |\beta|^n}{|\alpha| - |\beta|} \qquad |\alpha| \neq |\beta|,\ n = 1, 2, 3, \ldots.$$

15. Demostrar que el ángulo θ entre dos vectores α y β no nulos satisface

$$|\alpha||\beta| \cos\theta = \operatorname{Re} \alpha\overline{\beta}, \qquad \pm|\alpha||\beta| \operatorname{sen}\theta = \operatorname{Im} \alpha\overline{\beta}$$

y que, por lo tanto, el área del triángulo formado por α, β, $\beta - \alpha$ es $\frac{1}{2}|\operatorname{Im} \alpha\overline{\beta}|$. (Por el teorema del coseno, $|\alpha - \beta|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 - 2|\alpha||\beta| \cos\theta$.)

16. Para este problema es necesario conocer los vectores tridimensionales. Se asocia $\alpha = a + ib$ al vector $\mathbf{A} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$ y análogamente β al $\mathbf{B}$. Demostrar que

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (\operatorname{Re} \alpha\overline{\beta}), \qquad \mathbf{A} \times \mathbf{B} = (\operatorname{Im} \alpha\overline{\beta})\mathbf{k}$$

y obtener los resultados de los Problemas 9, 10 y 15 de resultados ya conocidos del álgebra vectorial.

3. **La multiplicación y el plano complejo.** Cuando cada número complejo z se asocia con un punto de coordenadas (x, y), como se hizo en la Sección 2, el plano (x, y) se llama plano z o, también, plano complejo. La principal diferencia entre el plano complejo y el plano cartesiano del análisis real consiste en que es posible multiplicar los números complejos. Obtendremos ahora una interpretación geométrica de la multiplicación de números complejos sirviéndonos para ello de las coordenadas polares, (r,θ).

La Figura 3-1, que sugiere las conocidas relaciones $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$ conduce de manera natural a representar $z = x + iy$, en la forma

$$z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta).$$

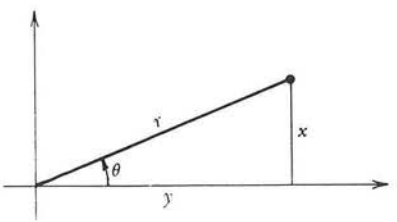


Figura 3-1

Analíticamente, r viene dado por la fórmula $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$, y por consiguiente $r = |z|$. Si $z = 0$, la coordenada θ no está definida, pero si $z \neq 0$, θ es cualquier número real tal que

$$\cos\theta = \frac{x}{|z|}, \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{|z|}. \tag{3.1}$$

Como es obvio, debido a la periodicidad del seno y del coseno, θ está determinado salvo posibles múltiplos de 2π. La coordenada θ se conoce con el nombre de *argumento* de z y se designa por arg z. El hecho de que arg z esté determinado solamente salvo un múltiplo de 2π tiene, como se verá más tarde, importantes consecuencias. Eligiendo arg z de manera que sea $-\pi < \arg z \leq \pi$ se obtiene el *valor principal* del argumento que se denota por Arg z.

Dado que arg z tiene una infinidad de valores es necesario establecer algunos convenios referentes a ecuaciones en las que intervenga este símbolo. Una ecuación como la

$$\arg z = \theta + 2\pi k$$

tiene el siguiente significado: cada elección del entero k proporciona un valor de arg z, y recíprocamente, cada valor de arg z viene dado por una elección del entero k. Esta relación se expresa también escribiendo

$$\arg z = \theta \qquad \text{mod } 2\pi.$$

Así pues, arg z = Arg $z + 2\pi k$ cuando $z \neq 0$, o lo que es igual arg z = Arg z mod 2π. Siempre que se escriban ecuaciones en las que intervenga arg z o Arg z se sobreentiende que $z \neq 0$ pues (3.1) carece de significado cuando $z = 0$.

Si θ_1 es un valor de arg z_1 y θ_2 es un valor de arg z_2, entonces

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1) r_2(\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2) \\ &= r_1 r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2) + i(\operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\operatorname{sen}\theta_2)] \\ &= |z_1||z_2|[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)]. \end{aligned}$$

Esta igualdad muestra que $\theta_1 + \theta_2$ es uno de los valores de $z_1 z_2$ y por lo tanto,

$$\arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2 + 2\pi k. \tag{3.2}$$

Al multiplicar números complejos, sus argumentos se suman mod 2π y como ya se ha demostrado en la Sección 2, se multiplican sus módulos.

Si $zz_1 = z_2$, entonces arg z + arg z_1 = arg $z_2 + 2\pi k$ y como $z = z_2/z_1$, se tiene

$$\arg\frac{z_2}{z_1} = \arg z_2 - \arg z_1 + 2\pi k. \tag{3.3}$$

En particular,

$$\arg\frac{1}{z} = -\arg z + 2\pi k. \tag{3.4}$$

A partir de la ecuación (3.2), se obtiene por inducción

$$\arg(z_1 z_2 \cdots z_n) = \arg z_1 + \arg z_2 + \cdots + \arg z_n + 2\pi k$$

y, por tanto, tomando todos los $z_k = z$,

$$\arg z^n = n \arg z + 2\pi k. \tag{3.5}$$

Como $z^{-n} = (1/z)^n$, la fórmula (3.4) pone de manifiesto que esta identidad también es válida cuando n sea negativo; resultado que puede utilizarse para calcular potencias racionales de números complejos, como se explica a continuación.

Si p y q son números enteros, la ecuación $z = \alpha^{p/q}$ significa que $z^q = \alpha^p$, en donde consideraremos todas las soluciones z posibles. Se supone que p y q son primos entre sí; por ejemplo, el exponente 4/6 se escribiría en la forma 2/3. Como el caso $\alpha = 0$ es trivial, se supondrá que $\alpha \neq 0$

De $z^q = \alpha^p$, se deduce

$$|z|^q = |\alpha|^p \qquad \text{y} \qquad q \arg z = p \arg \alpha + 2\pi k$$

en virtud de resultados de la Sección 2 y de (3.5), respectivamente. Por consiguiente,

$$|z| = |\alpha|^{p/q} \qquad \text{y} \qquad \arg z = \frac{p}{q} \arg \alpha + \frac{2\pi k}{q} \tag{3.6}$$

en donde $|z|^{p/q}$ denota la raíz real positiva, que suponemos que el lector ya conoce del Análisis real.

Se comprueba sin dificultad que al hacer $k = 0, 1, \ldots, q - 1$, las fórmulas (3.6) determinan q puntos distintos situados sobre la circunferencia $|z| = |\alpha|^{p/q}$ de manera que la dividen en arcos iguales, cuyos ángulos correspondientes miden $2\pi n/q$. Al darle al entero k de (3.6) cualquier otro valor no se obtienen puntos nuevos. Está claro asimismo que cualquiera de las q determinaciones de z dadas por (3.6) satisface $z^q = \alpha^p$. Estos q puntos se denominan raíces q-ésimas de α^p y también p/q-ésimas potencias de α y se designan por $\sqrt[q]{\alpha^p}$ o por $\alpha^{p/q}$. En la discusión precedente se ha demostrado que *existen exactamente q de estas raíces, que dividen en q partes iguales a la circunferencia con centro en el origen.* Cuando sea $\alpha > 0$, se reservará el símbolo $\alpha^{p/q}$ para la raíz de argumento 0, salvo que se especifique otra cosa.

Se deduce de lo anterior que un número complejo q tiene dos raíces cuadradas separadas 180°, tres raíces cúbicas espaciadas entre sí 120°, y así sucesivamente (Figuras 3-2 y 3-3.) En particular, la ecuación

$$z^n - \alpha = 0$$

tiene al menos una raíz para cada entero positivo n y cada número complejo α. Este resultado es un caso particular del teorema fundamental del Algebra, que establece que,

no solamente $z^n - \alpha$ sino cualquier polinomio no constante $P(z)$ tiene un cero. En el Problema 5-3, al final de este capítulo, se ve que el teorema general se deduce del caso particular.

Terminamos esta discusión del plano complejo haciendo algunas observaciones acerca de la relación entre la Geometría y el Análisis. Desde el punto de vista histórico, el desarrollo de los números complejos fue facilitado en gran medida por las representaciones geométricas. Lo mismo puede decirse de las funciones de variable compleja. El plano complejo permite la comprensión intuitiva de tantas nociones que, en nuestra opinión, desarrollar la teoría de funciones sin su ayuda sería un grave obstáculo para la mayor parte de los estudiantes, y por consiguiente, haremos referencia al plano complejo cada vez que tal referencia simplifique la comprensión del Análisis.

A pesar de esto, no debe creerse que el Análisis sea lógicamente dependiente de la Geometría. La dependencia lógica tiene lugar justamente en el sentido contrario: se usa el Análisis para dar definiciones precisas de los conceptos geométricos. Así, por ejemplo, la circunferencia de radio r_0 con centro en el origen es el conjunto de todos los puntos z tales que

$$|z| = r_0.$$

Aunque la noción de "circunferencia" es un concepto geométrico, la definición anterior es de carácter analítico. La afirmación: "z está en el semiplano superior" se traduce inmediatamente en la afirmación analítica $\operatorname{Im} z > 0$, etc. La posibilidad de dar tales definiciones se debe a que los desarrollos algebraicos de las Secciones 1 y 2 son independientes de la Geometría.

Suponiendo que se conocen las funciones trigonométricas, la definición analítica de θ dada en (3.1) puede justificarse teniendo en cuenta que

$$\tan\theta = \frac{y}{x}, \qquad \cot\theta = \frac{x}{y}. \tag{3.7}$$

Estas ecuaciones proporcionan también un método para el cálculo efectivo de θ. En los problemas que acompañan a la Sección 4 del Capítulo 2 se da esquemáticamente una definición que no presupone ninguna noción trigonométrica. Esa discusión se basa en la posibilidad de definir $\arctan t$ mediante una integral, así como la constante π. Otras definiciones se basan en series de potencias (Capítulo 6, Sección 3) o en ecuaciones diferenciales.

Independientemente del método utilizado para definirlos, se encuentra que sen θ, cos θ, y θ tienen en todos los casos las propiedades que sugiere la Geometría plana, y estas propiedades deberán utilizarse sin temor.

Ejemplo 3.1. Hallar todos los valores de $\sqrt[3]{-i}$. Tal como sugiere la Figura 3-2, el ángulo asociado a $-i$ es $\operatorname{Arg}(-i) = -90°$ y así uno de los valores de $\arg(-i)^{1/3}$ es $(\frac{1}{3})(-90°)$, o sea, $-30°$. Todos los valores restantes se obtienen sumando múltiplos de $(1/3)(360°)$, y de aquí

$$\arg(-i)^{1/3} = -30°, 90°, 210°, \ldots.$$

Como $|-i| = 1$, los correspondientes valores de $(-i)^{1/3}$ son

$$\cos(-30°) + i\,\mathrm{sen}(-30°), \qquad \cos(90°) + i\,\mathrm{sen}(90°), \ldots,$$

que, como se muestra en la Figura 3-2, se reducen a

$$\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i, \qquad i, \qquad -\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i,$$

El lector debe comprobar que los resultados del análisis anterior coinciden con los que daría (3.6) cuando $\alpha = -i$, $p = 1$ and $q = 3$.

Ejemplo 3.2. ¿Cuáles son los valores de $(3 - 4i)^{-3/8}$ más próximos al eje imaginario? El valor de $\mathrm{Arg}(3-4i)$ podemos obtenerlo de la ecuación

$$\cot\theta = \frac{x}{y} = -\frac{3}{4}.$$

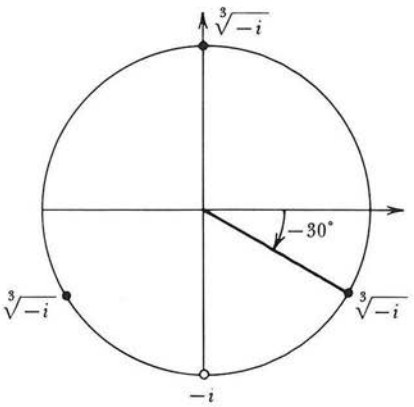


Figura 3-2

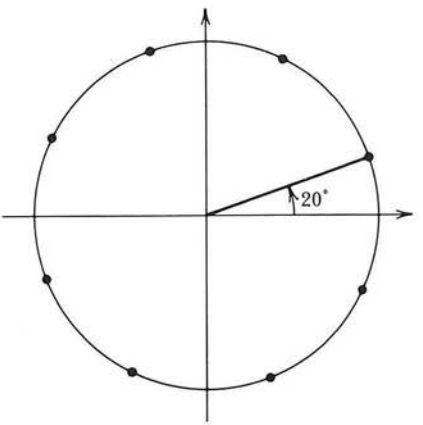


Figura 3-3

Como $\mathrm{sen}\,\theta = y = -\frac{4}{5}$ es negativo, θ es negativo, y las tablas trigonométricas dan[1] $\theta \doteq -53°$. Como $(-\frac{3}{8})(-53) = 20$ obtenemos

$$\arg(3 - 4i)^{-3/8} = 20°, 20° + 45°, 20° + 90°, \ldots,$$

[1] Utilizamos el símbolo $\doteq$ para representar la igualdad aproximada.

Los puntos correspondientes se han representado en la Figura 3-3. El radio de la circunferencia es

$$|(3 - 4i)^{-3/8}| = |3 - 4i|^{-3/8} = 5^{-3/8},$$

aunque este resultado no es necesario para este problema. En efecto, independientemente de cuál sea el valor del radio, las raíces buscadas son las que tienen argumentos más próximos a 110° y a -70°. Estas dos raíces equidistan del eje y.

Ejemplo 3.3. Si $|\alpha|=1$, interpretar geométricamente la transformación $z' = \alpha z$.

Dado que $|z'|=|\alpha||z|=|z|$, las distancias al origen no sufrirán variación. La ecuación $\arg z' = \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} \alpha \bmod 2\pi$ pone de manifiesto que la transformación representa una rotación alrededor del origen, de ángulo **Arg**α (Figura 3-4).

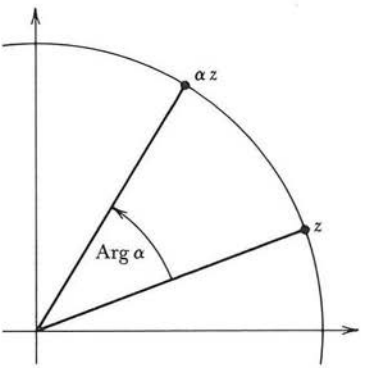


Figura 3-4

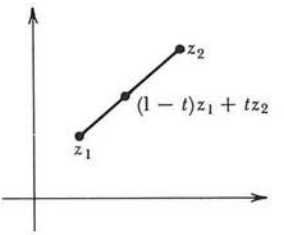


Figura 3-5

Ejemplo 3.4. Siendo z_1 y z_2 dos números complejos y $z_1 \neq z_2$, describir el lugar geométrico de los puntos z que verifican

$$z = (1 - t)z_1 + tz_2, \qquad 0 \leq t \leq 1. \quad (3.8)$$

Como $t = 0$ da $z = z_1$ y $t = 1$ da $z = z_2$, el lugar contiene a los puntos z_1 y z_2. Al igualar las partes real e imaginaria de (3.8) se obtiene, con una notación obvia,

$$x = (1 - t)x_1 + tx_2, \qquad y = (1 - t)y_1 + ty_2,$$

que son las ecuaciones paramétricas de una línea recta. La restricción de t al intervalo $0 \leqslant t \leqslant 1$ indica que el lugar es el segmento rectilíneo que une z_1 y z_2, como se muestra en la Figura 3-5.

Insistiendo en lo que ya se ha dicho en observaciones anteriores, las fórmulas (3.8) se usan para definir el segmento rectilíneo. La discusión geométrica es necesaria para aclarar por qué esta definición es adecuada.

Problemas

1. (a) Hallar todas las raíces cúbicas de 1, -8, i. (b) Resolver $(z^4 - 16)(z^3 + 1) = 0$.
2. Calcular y representar gráficamente todas las raíces siguientes:

$$(-1)^{1/4}, \quad (1+i)^{1/2}, \quad (1-i)^{-1/2}, \quad 1^{1/6}, \quad (-4)^{3/4}, \quad (-1+i)^{8/3}.$$

3. Interpretar geométricamente, escribiéndola en forma polar, la transformación $z' = \alpha z$ cuando

$$\alpha = -i, \qquad \alpha = 2^{-1/2}(1-i), \qquad \alpha = (\tfrac{1}{2})(\sqrt{3}+i).$$

4. Deducir de resultados del texto que $z^n = |z|^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$ si n es entero, y tomando $|z| = 1$, obtener el *teorema de De Moivre,*

$$(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^n = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta.$$

5. (a) Obtener del problema 4 la fórmula $\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta \operatorname{sen}^2\theta$ deducir también una parecida para $\operatorname{sen} 3\theta$. (b) Generalizarlas usando el teorema del binomio.
6. Se utiliza la notación cis θ, contracción de $c(\text{os}+)i\text{s}(\text{en})$, para representar $\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$ Si $z = r \operatorname{cis}\theta$ y n es un entero cualquiera, demostrar que $z^{1/n}$ viene dada por

$$r^{1/n} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

7. Sean z_1, z_2, z_3 tres puntos distintos, y análogamente los z_1', z_2', z_3'. (a) Explicar por qué la condición necesaria y suficiente para que los triángulos (z_1,z_2,z_3) y (z_1', z_2', z_3') en ese orden de sus vértices, sean semejantes es que

$$\frac{z_1 - z_2}{z_1' - z_2'} = \frac{z_2 - z_3}{z_2' - z_3'} = \frac{z_3 - z_1}{z_3' - z_1'}.$$

(b) Demostrar que la condición anterior es equivalente a

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ z_1' & z_2' & z_3' \end{vmatrix} = 0.$$

(Reducir a determinantes de 2 por 2 restando columnas.)

8. Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que tres puntos distintos z_1, z_2, z_3 sean los vértices de un triángulo equilátero es que $z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$. (Los triángulos (z_1,z_2,z_3) y (z_2,z_3,z_1) son semejantes. Usar el Problema 7.)

9. Como ya se dijo en el texto, $a = b \bmod 2\pi$ significa que $a - b = 2\pi k$ para algún entero k. Si $a = b \bmod 2\pi$ y $c = d \bmod 2\pi$, demostrar que $a + c = b + d \bmod 2\pi$ y $2a = 2b \bmod 2\pi$. Sin embargo, mostrar que $(\frac{1}{2})a = (\frac{1}{2})b \bmod 2\pi$ puede no ser cierta.
10. Un *punto fijo* de una transformación $z' = \alpha z + \beta$ es un punto z_0 tal que $z_0' = z_0$. (a) Demostrar que esta transformación siempre tiene un punto fijo excepto cuando $\alpha = 1$, en cuyo caso la transformación es una traslación (Sección 2). (b) Si $|\alpha| = 1$ y z_0 es un punto fijo, restando $z_0' = \alpha z_0 + \beta$ de $z' = \alpha z + \beta$ obtenemos $(z' - z_0) = \alpha(z - z_0)$. Demostrar, pues, que en este caso la transformación es un giro alrededor de z_0 de un ángulo arg α.
11. El *valor algebraico área* del triángulo de vértices 0, α, β, en ese orden, es $\frac{1}{2}\mathrm{Im}\,\alpha\bar{\beta}$ (véase la Sección 2, Problema 15). El valor algebraico del área de un polígono de vértices $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_{n-1}, z_n = z_1$, en ese orden, es

$$A = \tfrac{1}{2}\mathrm{Im}(z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_3 + \cdots + z_{n-1}\bar{z}_n).$$

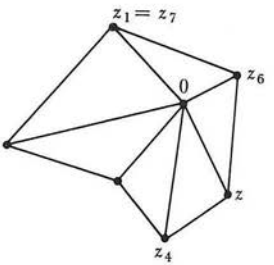


Figura 3-6

(a) Interpretar geométricamente esa fórmula como una suma de áreas de triángulos (Figura 3-6), y ensayarla aplicándola a cuadrados y a rectángulos. (b) Demostrar que al someter la figura a la simetría $z' = \bar{z}$, el área A cambia de signo, pero que, en cambio, el giro $z' = \alpha z$, $|\alpha| = 1$ no la altera. (c) Demostrar que A es invariante frente a la traslación $z' = z + \beta$. (d) Si el punto base es z en lugar de serlo el origen, la fórmula sigue siendo la considerada antes con $z_k - z$ en lugar de z en cada caso. Demostrar que el resultado es independiente de z. (e) Procúrese dar la interpretación de la fórmula al aplicarla a polígonos que se corten a sí mismos, como podría serlo uno que tuviera la forma de un 8.

4. Regiones y funciones. Con frecuencia es necesario limitarse a considerar los puntos z de alguna región del plano. En la Figura 4-1 se muestran algunos ejemplos de regiones corrientes: (1) el disco $|z - z_0| < \rho$, que es el interior del círculo de centro z_0 y radio ρ; (2) el anillo o corona circular $\rho_1 < |z - z_0| < \rho_2$ de centro en z_0, radio interior ρ_1 y radio exterior ρ_2; (3) el semiplano derecho $\mathrm{Re}\,z > 0$; (4) la banda $0 < \mathrm{Im}\,z < 1$; y (5) el sector circular $\theta_0 < \arg z < \theta_1$. En (4) ha de sobreentenderse que $x = \mathrm{Re}\,z$ toma todos los

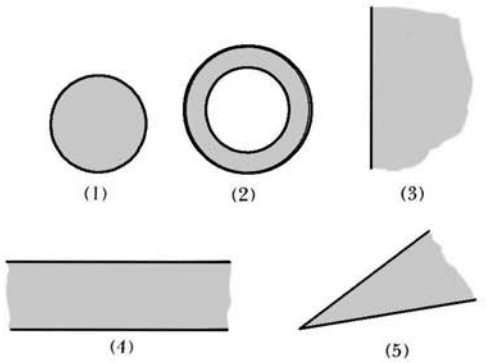


Figura 4-1

valores $-\infty < x < \infty$, y en (5) que $|z|$ toma todos los valores $0 < |z| < \infty$. Obsérvese que en todos estos ejemplos la región no incluye a su frontera; es decir, cada una de las regiones está formada exclusivamente por puntos interiores.

Discutimos ahora el problema de dar definiciones analíticas de los términos "región" "frontera", etc. que se han presentado de forma intuitiva.

Como ya se dijo en el Ejemplo 2-3, una colección de puntos del plano z se llama conjunto de puntos y también conjunto puntual. Cada una de las regiones (1)-(5) antes descritas es un ejemplo de conjunto de puntos. Un *ϵ-entorno* del punto z_0 es por definición el disco $|z - z_0| < \epsilon$, de centro z_0 y radio positivo ϵ. Se dice que un punto z_0 perteneciente al conjunto S es *interior* a este conjunto si existe un ϵ-entorno de z_0 que esté contenido en el conjunto S. Si todos los puntos del conjunto S son interiores, se dice que el conjunto S es un conjunto *abierto*. Las regiones (1)-(5) que antes hemos descrito son todas ellas conjuntos abiertos.

Sean $A_0, A_1, \ldots, A_n$, $n + 1$ puntos del plano. Entonces la sucesión de los n segmentos rectilíneos $A_0A_1, A_1A_2, \ldots, A_{n-1}A_n$ forman una *línea quebrada* o *línea poligonal*, que se denota por $A_0A_1 \cdots A_n$ y se dice que une A_0 con A_n.

Un conjunto abierto S es *conexo* si es posible unir cualquier par de puntos de él por una línea quebrada que esté totalmente contenida en el conjunto S, como se indica en la Figura 4-2. Un conjunto abierto y conexo se llama un *dominio*. Todas las regiones (1)-(5) son dominios.

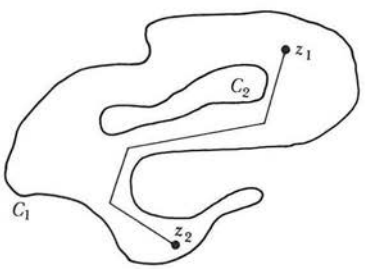


Figura 4-2

Un punto z_0 se llama punto *frontera* del conjunto S si cada ϵ-*entorno* del punto z_0 contiene al menos un punto del conjunto S y al menos un punto que no pertenece al conjunto S. Como un dominio es un conjunto abierto, resulta que ningún punto frontera del dominio puede pertenecer a él. La Figura 4-2 representa un dominio D en el cual se han unido los dos puntos z_1 y z_2 mediante una línea quebrada. Es posible unir de este modo dos puntos cualesquiera, por lo que el dominio es conexo. Sin embargo, su frontera está formada por dos partes separadas C_1 y C_2.

Cuando se dice *región* se debe entender un dominio junto con algunos, todos o ninguno de sus puntos frontera. Por consiguiente, todo dominio es una región, pero la recíproca puede muy bien no ser cierta. Cuando una región contiene a todos sus puntos frontera se dice que es una región *cerrada*. Así, por ejemplo, el cuadrado $(|x| \leq 1, |y| \leq 1)$ es una región cerrada, mientras que $(|x|<1, |y|<1)$ es un dominio. El cuadrante $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ es también una región cerrada.

Si se designa por R una región, entonces la región cerrada formada añadiendo a R todos sus puntos frontera se llama *clausura* o *adherencia* de R y se denota por $\overline{R}$. Cuando R es cerrada se verifica que $\overline{R} = R$.

Se dice que una región esta *acotada* o que es *finita* si existe una constante M tal que todos los puntos z de la región verifican $|z| \leq M$, o lo que es equivalente, si la región está contenida en el disco de radio M y centro en el origen. Las regiones (1) y (2) están acotadas, las restantes no. Una región que sea al mismo tiempo cerrada y acotada se dice que es *compacta*.

Si por una regla a cada punto z de cierta región del plano se le asocia un número complejo w se dice que w es función de la variable z en la región R, y se expresa esta relación escribiendo $w = f(z)$. Se dice entonces que la función f está definida en R. La interpretación precisa de la palabra "regla" no es muy importante; tampoco lo es la elección de las letras f, w, z, R. Lo que sí es importante es que *una función asocia un número complejo a cada punto de su región de definición*.

Como ilustración de lo anterior, cada una de las ecuaciones

$$w = z^2, \qquad w = \frac{z}{1 - z}, \qquad w = \frac{3}{1 - |z|}$$

asocia a z un número complejo w, y por lo tanto determina una función. La primera ecuación define una función en toda región, la segunda, en cualquier región que no contenga al punto $z = 1$, y la tercera en toda región que no contenga ningún punto de la circunferencia $|z| = 1$.

El símbolo $f(z)$ se usa en Análisis con dos significados diferentes. Por una parte, $f(z)$ puede denotar el valor de la función f en z, y por otra, $f(z)$ puede representar a la propia función. Por ejemplo, la expresión z^2 asocia un número complejo a cada punto z, y por lo tanto posee la propiedad fundamental de las funciones que se explicó anteriormente. Esta función se llama la "función z^2". El lector podrá sin duda, citar otros ejemplos.

Como ocurre en el Análisis real, las operaciones algebraicas con las funciones se definen efectuando las correspondientes operaciones con sus valores. Por ejemplo, el producto fg de dos funciones f y g es la función F cuyo valor en z es $F(z) = f(z)g(z)$.

Cuando las funciones se escriben en la forma $f(z)$ y $g(z)$ con z variable, las funciones suma, producto y compuesta de ambas son respectivamente

$$f(z) + g(z), \qquad f(z)g(z), \qquad f[g(z)].$$

Descomponiéndola en sus partes real e imaginaria se puede expresar cualquier función $f(z)$ mediante dos funciones reales. Por ejemplo, si $w = u + iv$ y $z = x + iy$, la ecuación $w = z^2$ da

$$u + iv = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy,$$

que es equivalente al sistema

$$u = x^2 - y^2, \qquad v = 2xy. \tag{4.1}$$

En el caso general, $f(z)$ tiene una parte real u y una parte imaginaria v que son funciones de z y por consiguiente, también de (x, y). Así pues, $w = f(z)$ es equivalente a

$$w = u(x,y) + iv(x,y).$$

Se puede considerar que una función $f(z)$ establece una transformación de los puntos del plano z en los que f esté definida, en puntos del plano w. Estas transformaciones se llaman también aplicaciones y, a veces, representaciones. Por ejemplo, para $w = z^2$, las ecuaciones (4.1) establecen la correspondencia entre el punto (x, y) del plano z y el punto (u, v) del plano w. Se dice entonces que (u, v) es la *imagen* de (x,y) en la transformación, o lo que es igual, que w es la *imagen* de z. De la misma forma puede hablarse de la imagen de un conjunto de puntos, de una región, por ejemplo.

Aunque $w = z^2$ asigna un único valor de w a cada valor de z, no es necesariamente cierto que al transformar una región del plano z se cubra su imagen en el plano w exactamente una vez; puede ocurrir que la transformación asigne un mismo valor w a dos puntos distantes del plano z, pues $(z)^2$ y $(-z)^2$ son iguales. La región sombreada del plano w de la Figura 4-3 es en realidad la imagen de dos partes distintas de la región representada en el plano z. Esta cuestión se discute con mayor amplitud en el Ejemplo 4-3.

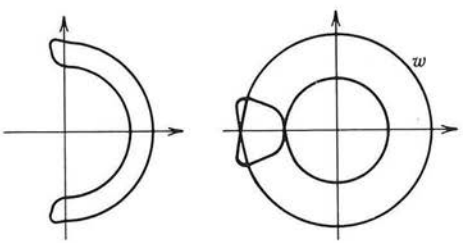


Figura 4-3

Hasta el momento se ha exigido que todos los puntos sean números complejos en el sentido de la Sección 1. Pero a veces es conveniente considerar un punto "ideal", llamado *punto del infinito* que se denota por ∞. La posibilidad de hacer esto es consecuencia de que para conocer un punto es suficiente conocer todos sus ϵ-entornos (Figura 4-4). No es posible definir un ϵ-entorno de ∞ mediante una desigualdad del tipo $|z - z_0| < \epsilon$, pero sí es posible hacerlo por la condición $|z| > 1/\epsilon$. Desde el punto de vista geométrico, un ϵ entorno de ∞ es el exterior del disco de radio $1/\epsilon$ y de centro en el origen. Se dice que una región contiene al punto del ∞ si tiene al menos un punto común con cada entorno de ∞. Esto ocurre si y solamente si la región no está acotada. Se dice entonces que la región es *no acotada* o *infinita.*

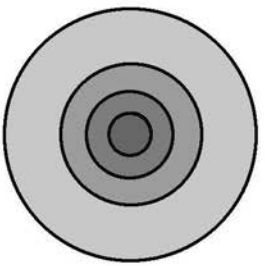


Figura 4-4

Una función está definida en un ϵ-entorno de ∞ si está definida en todos los puntos z del exterior de algún disco. La cuestión de si es posible razonablemente dar a una función un valor en ∞ no puede resolverse sin el concepto de límite, que se introduce en la sección siguiente.

Cuando al plano complejo se le adjunta el punto del infinito se le llama plano complejo *ampliado.* En ocasiones, el plano complejo sin el punto $z = \infty$ se llama plano complejo finito y se designa por $|z| < \infty$. El plano complejo ampliado puede aplicarse mediante la proyección estereográfica sobre la superficie de una esfera (Figura 4-5). Consideremos la esfera unidad centrada en el origen $z = 0$ del plano complejo. El plano z corta a la esfera por el ecuador de ésta, que es la circunferencia $|z| = 1$. Cada punto P del plano z se aplica en un punto P' de la esfera por el siguiente procedimiento: Se unen el polo norte N de la esfera y el punto P mediante una línea recta. Entonces P' es el punto de intersección de la esfera y la recta NP. Los puntos para los que $|z| < 1$ se aplican en el hemisferio inferior, mientras que aquellos para los que $|z| > 1$ lo hacen en el hemisferio superior. El punto $z = \infty$ se corresponde con el polo norte de la esfera, N, y el origen $z = 0$ se transforma en el polo sur. De esta forma se establece una correspondencia "uno-a-uno" entre la esfera y el plano complejo ampliado, es decir, a cada P le corresponde un único P' y recíprocamente. Si P_1 está cerca de P entonces P_1' está cerca de P'. Esto también es válido para el punto del infinito; es decir, un ϵ-entorno de ∞ del plano z corresponde a una región pequeña de la esfera cuando ϵ es pequeño.

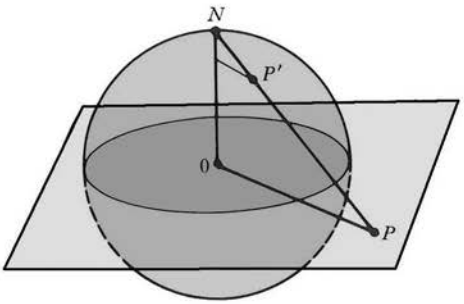


Figura 4-5

Ejemplo 4-1. Hallar la imagen de la banda $1 \leq x \leq 2$ en la aplicación $w = z^2$. Obtenemos en primer lugar la imagen de la recta $x = x_0 \neq 0$ (Figura 4-6). La imagen (u,v) de un punto (x_0,y) de esta recta es, en virtud de (4.1)

$$u = x_0^2 - y^2, \qquad v = 2x_0 y.$$

La imagen de la recta está dada por las mismas ecuaciones si se exceptúa que ahora y es variable, $-\infty < y < \infty$. Como $y = v/(2x_0)$, podemos eliminar y y obtener la parábola completa o un arco de la misma, de ecuación

$$u = x_0 - \frac{v^2}{(2x_0)^2}.$$

La condición $-\infty < y < \infty$ indica que no hay ninguna restricción para los valores de v, por lo que la imagen de la recta es la parábola completa (Figura 4-7). Haciendo ahora variar x_0 desde 1 hasta 2, las rectas barren la banda y las parábolas la región sombreada que se muestra en la figura, cuya frontera está formada por las dos parábolas

$$u = 1 - \left(\frac{v}{2}\right)^2, \qquad u = 2 - \left(\frac{v}{4}\right)^2.$$

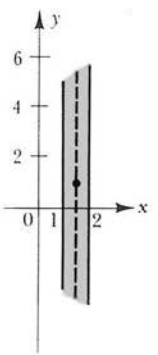


Figura 4-6

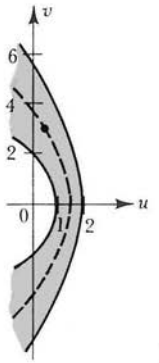


Figura 4-7

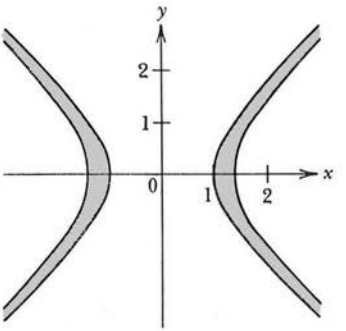


Figura 4-8

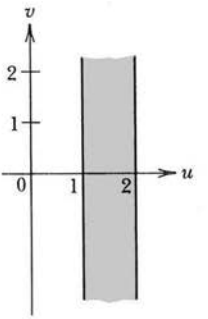


Figura 4-9

Ejemplo 4.2. ¿Cuál es el lugar de los puntos del plano z que se transforman mediante la aplicación $w=z^2$, en la banda $1< u <2$ del plano w? Al hacer $u=u_0 > 0$, se tiene

$$x^2 - y^2 = u_0, \qquad -\infty < y < \infty \quad (4.2)$$

y por lo tanto, un punto (x,y) se aplica sobre la recta $u = u_0$ si y solamente si se encuentra en la hipérbola (4.2). Haciendo variar u_0 vemos que el conjunto buscado está limitado por las dos hipérbolas

$$x^2 - y^2 = 1, \qquad x^2 - y^2 = 2,$$

que se muestran en la Figura 4.8. La imagen de cada una de las regiones sombreadas es la totalidad de la banda de la Figura 4-9, que por lo tanto se recubre dos veces.

Ejemplo 4.3. La función $w=z^2$ aplica el semiplano superior del plano z en una región del plano w. Interprétese el resultado usando coordenadas polares. Como $|w| = |z|^2$ y $\arg w = 2 \arg z \bmod 2\pi$, las circunferencias $|z| = r$ se aplican sobre las circunferencias $|w| = r^2$ y un rayo que partiendo del origen forme un ángulo θ con el eje x se aplica sobre un rayo que forma un ángulo doble con el eje u. El efecto de la aplicación es abrir el semiplano superior como si fuera un abanico, de tal manera que su imagen cubre exactamente una vez el plano w, como se muestra en la Figura 4-10.

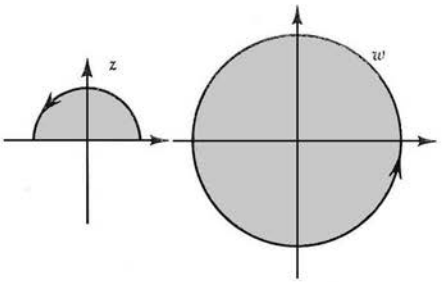


Figura 4-10

Si se transforma de esta manera una región mayor que el semiplano superior se recubrirán dos veces algunos puntos; la imagen de todo el plano z recubre al plano w, con excepción del origen, exactamente dos veces. Esto se debe a que la ecuación $z^2 = w$ tiene dos soluciones cuando $w \neq 0$; en otras palabras, a que $\sqrt{w}$ tiene dos valores.

Problemas

1. Calcular $f(z+1), f(1/z)$ y $f[f(z)]$ si $f(z) = z+1,\ z^2,\ 1/z,\ (1+z)(1-z)^{-1}$.
2. ¿Cuáles entre las siguientes desigualdades describen dominios?

$$\operatorname{Re} z > 1,\ |z| \leq 1,\ 0 < |z| < 1,\ \operatorname{Im} z < 2|z|,\ |z-1| < |z+i|,\ 2|z^2-1| < 1.$$

3. Como se hizo en el Ejemplo 4.3, estudiar de qué manera se transforma el sector circular

$$0 \leq \operatorname{Arg} z < \theta$$

en las aplicaciones $w = z^3$, $w = z^4$, y $w = \bar{z}^6$. ¿Cuánto debe valer θ para que se recubra una sola vez el plano w? (Una región del plano z cuya imagen cubre el plano w una sola vez se llama una *región fundamental* de la función $w = f(z)$.)

4. Supongamos que $w = f(z)$ aplica una región R del plano z sobre una región R^* del plano w de tal manera que la ecuación $w = f(z)$ tenga una sola solución respecto de z; así pues, $z = g(w)$ para w en R^*. La función g se llama *función inversa* de f, y satisface las dos ecuaciones $f[g(w)] = w$ y $g[f(z)] = z$ para w en R^* y z en R, respectivamente. Hállense, en las regiones apropiadas, las funciones inversas $z = g(w)$ de

$$w = -z, \quad w = \frac{1}{z}, \quad w = \frac{1-z}{1+z}, \quad w = z^2, \quad w = z^3, \quad w = (z-1)^4 + i.$$

(En los tres últimos casos, utilizar el concepto de "región fundamental" que se introdujo en el Problema 3.)

5. Determinar la imagen de la banda $|\mathrm{Re}\, z| < 1$ y de la banda $1 < \mathrm{Im}\, z < 2$ en las transformaciones siguientes:

$$w = 2z + i, \quad w = (1 + i)z + 1, \quad w = 2z^2, \quad w = z^{-1}, \quad w = (z + 1)(z - 1)^{-1}.$$

6. Hallar la imagen del disco $|z| < 1$ en las transformaciones anteriores.
7. Sean α, β, γ tres puntos del plano, no alineados. (a) Utilizando para ello el Ejemplo 3.4 y la Figura 4-11, interpretar las ecuaciones

$$z_0 = r_0\alpha + s_0\beta, \qquad z = r_1 z_0 + s_1\gamma,$$

donde r_0, s_0, r_1, s_1 son números reales no negativos que verifican la condición $r_0 + s_0 = r_1 + s_1 = 1$. (b) Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que z pueda representarse en la forma (a) es que

$$z = r\alpha + s\beta + t\gamma, \qquad r + s + t = 1, \qquad r \geq 0, s \geq 0, t \geq 0$$

y que en este caso, la elección de valores r, s, t es única. (c) El conjunto que se ha descrito en (b) se llama la *región triangular*, o sencillamente, el triángulo determinado por α, β, γ. Discutir cuáles son las condiciones que impuestas a r, s, t dan los vértices, los lados y el interior del triángulo.

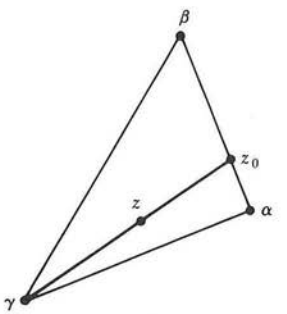


Figura 4-11

Las isometrías del plano

8. Una función $f(z)$ se llama una *isometría* si no modifica las distancias, es decir, si

$$|f(z_1) - f(z_2)| = |z_1 - z_2|$$

para todo par de números complejos z_1 y z_2. Si $f(z)$ es una isometría y α y β son dos constantes, con $|\alpha| = 1$, demostrar que $g(z) = \alpha f(z) + \beta$ también es una isometría. Deducir de lo anterior que la función

$$g(z) = \frac{f(z) - f(0)}{f(1) - f(0)}$$

es una isometría que verifica $g(0) = 0, g(1) = 1$.

9. Sea $w = g(z)$ donde $g(z)$ es una isometría que verifica $g(0) = 0, g(1) = 1$. Obsérvese que $|w|^2 = |z|^2$, $|1 - w|^2 = |1 - z|^2$, puesto que g conserva las distancias. Deducir que $\operatorname{Re} w = \operatorname{Re} z$, y de aquí que $g(i) = i$ o $-i$.
10. Si $g(i) = i$ en el Problema 9, demostrar que $|w - i|^2 = |z - i|^2$ implica $\operatorname{Im} w = \operatorname{Im} z$, y de ésta, que $g(z) = z$ para todo z. Análogamente, si $g(i) = -i$, demostrar que $g(z) = \bar{z}$ para todo z. Con relación al Problema 8, deducir de lo anterior que toda isometría del plano es de la forma $f(z) = \alpha z + \beta$ o $f(z) = \alpha\bar{z} + \beta$, con α y β constantes y $|\alpha| = 1$.

***5. Límites y continuidad.** Se define en el Análisis de variable compleja el concepto de límite del mismo modo que en el Análisis real con la única salvedad de que ahora el valor absoluto tiene el sentido que se explicó en la Sección 2. Así pues, en general,

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \alpha \tag{5.1}$$

significa lo siguiente: Para cada número positivo ϵ existe un número positivo δ tal que

$$0 < |z - z_0| < \delta \qquad \text{implica} \qquad |f(z) - \alpha| < \epsilon. \tag{5.2}$$

Como es evidente, el valor de δ depende en general de ϵ. Expresada con menos precisión, (5.1) significa que si z está suficientemente cerca de z_0, entonces $f(z)$ está arbitrariamente cerca de α.

La condición (5.2) tiene sentido solamente si $f(z)$ está definida en todo un entorno de z_0, con la posible excepción del propio z_0. Esto ocurre de forma automática cuando z_0 es un punto interior de la región R de definición de f; pero si z_0 es un punto frontera de R convendremos en que la conclusión

$$|f(z) - \alpha| < \epsilon$$

se exige solamente para los puntos z de R. Finalmente, si z_0 no es ni punto interior ni punto frontera de R, el límite no está definido.

Escribiendo $w = f(z)$ y $w_0 = \alpha$ se ve que la condición (5.2) puede expresarse mediante los entornos $|z - z_0| < \delta$ y $|w - w_0| < \epsilon$, de radios δ y ϵ respectivamente. Esta formulación es aplicable al punto ideal ∞. La igualdad

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = \alpha \tag{5.3}$$

significa que para cada número positivo ϵ existe un número positivo δ tal que

$$|z| > \frac{1}{\delta} \qquad \text{implica} \qquad |f(z) - \alpha| < \epsilon.$$

Otros enunciados en los que interviene ∞ se interpretan de modo análogo.

El símbolo $z \to z_0$ (que se lee "z tiende a z_0") no siempre se escribe debajo de lim como se hizo en (5.1), sino que en ocasiones se escribe aparte. Si está claro por el contexto que $z \to z_0$ se puede omitir completamente el símbolo $z \to z_0$. Pueden hacerse observaciones parecidas, en (5.3).

Las definiciones anteriores solamente se necesitarán en algunas ocasiones, pero en cambio se hará uso constante de las propiedades que se deducen de estas definiciones. Si f y g son dos funciones definidas sobre la misma región tales que

$$\lim f(z) = \alpha \qquad \text{y} \qquad \lim g(z) = \beta,$$

entonces se tiene que

$$\lim [f(z) + g(z)] = \alpha + \beta, \qquad \lim [f(z)g(z)] = \alpha\beta, \qquad \lim \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\alpha}{\beta},$$

suponiéndose en este último caso que $\beta \neq 0$. En todas estas expresiones "lim" puede leerse bien en el sentido de (5.1), bien con el de (5.3). Las demostraciones de estas propiedades son análogas a las del Análisis real.

Se demuestra por inducción que

$$\lim [f(z) + g(z) + \cdots + p(z)] = \lim f(z) + \lim g(z) + \cdots + \lim p(z)$$
$$\lim [f(z)g(z) \cdots p(z)] = \lim f(z) \lim g(z) \cdots \lim p(z)$$

donde $f, g, \ldots, p$ son funciones definidas en la misma región, tales que los límites del segundo miembro existen. Como se verifica también que $\lim cf(z) = c \lim f(z)$ para toda constante c, concluimos que

$$\lim F[f(z), g(z), \ldots, p(z)] = F[\lim f(z), \lim g(z), \ldots, \lim p(z)] \tag{5.4}$$

para todo polinomio $F(\alpha,\beta, \ldots ,\sigma)$. Lo mismo puede decirse de las funciones racionales F con tal de que el segundo miembro esté bien definido.

Como ocurre en el Análisis real, se dice que la función f es *continua* en z_0 si

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Es evidente que esta definición tan sólo tiene sentido cuando z_0 se encuentre en la región R de definición de f. Si z_0 es un punto interior de R, la condición de continuidad es equivalente a esta otra: Para todo número positivo ϵ existe un número positivo δ tal que

$$|z - z_0| < \delta \qquad \text{implica} \qquad |f(z) - f(z_0)| < \epsilon.$$

Si se verifica (5.3) para un número complejo α' es posible definir $f(\infty)=\alpha$. Se dice entonces que f es continua en ∞. Volviendo a la definición de (5.3), sustituyendo α por $f(\infty)$, vemos que la continuidad en ∞ equivale a lo siguiente: Para cada número positivo ϵ existe un número positivo δ tal que

$$|z| > \frac{1}{\delta} \qquad \text{implica} \qquad |f(z) - f(\infty)| < \epsilon.$$

Esta condición solamente puede verificarse si f está definida en un entorno de ∞, es decir, si f está definida para todos los valores suficientemente grandes de $|z|$.

Es frecuente representar el punto $z = \infty$ y su entorno mediante sus imágenes en la transformación $\zeta = 1/z$. El punto $z = \infty$ se corresponde con el $\zeta = 0$ y un ϵ-entorno de $z = \infty$ se corresponde con un ϵ-entorno de $\zeta = 0$. Por consiguiente, puede estudiarse la continuidad de una función $f(z)$ en el punto $z = \infty$ estudiando la continuidad de $f(1/\zeta)$ en $\zeta = 0$. En efecto, poniendo $z = 1/\zeta$ y $g(\zeta) = f(1/\zeta)$ y si $g(0) = f(\infty)$ entonces

$$f(z) - f(\infty) = g(\zeta) - g(0)$$

y $|z| > 1/\delta$ equivale a $|\zeta| < \delta$. Por lo tanto, la continuidad de $f(z)$ en $z = \infty$ y la de $f(1/\zeta)$ en $\zeta = 0$ son equivalentes.

Ilustremos lo anterior con un ejemplo. Sea $P(z)$ un polinomio

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n \tag{5.5}$$

y sea

$$f(z) = \frac{P(z)}{z^n} = \frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \cdots + a_n, \qquad z \neq 0.$$

Entonces $\lim f(z) = a_n$ cuando $z \to \infty$, y definiendo $f(\infty) = a_n$, $f(z)$ es continua en ∞. Como

$$g(\zeta) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = a_0\zeta^n + a_1\zeta^{n-1} + \cdots + a_n, \qquad z \neq 0,$$

la condición $f(\infty) = a_n$ es equivalente a la $g(0) = a_n$.

El lector recordará del Análisis real que los teoremas sobre límites conducen a teoremas análogos para la continuidad. Por ejemplo, la función z es continua, y por lo tanto la función $cz^k = czz \ldots z$ es continua para cualquier constante c. Como un polinomio es una suma de expresiones de este tipo, podemos concluir que los polinomios son continuos.

De forma más general, sean $f, g, \ldots, p$ funciones que tienen todas ellas la misma región de definición y que son todas ellas continuas en un punto z_0 dado. Las condiciones

$$\lim f(z) = f(z_0), \qquad \lim g(z) = g(z_0), \ldots, \qquad \lim p(z) = p(z_0)$$

dan de forma inmediata

$$\lim F[f(z), g(z), \ldots, p(z)] = F[f(z_0), g(z_0), \ldots, p(z_0)]$$

para las funciones F del tipo considerado en (5.4). Esto demuestra que la función

$$\phi(z) = F[f(z), g(z), \ldots, p(z)]$$

verifica $\lim \phi(z) = \phi(z_0)$ que por lo tanto es continua. Los teoremas familiares relativos a la continuidad de las sumas, productos, cocientes y potencias de exponentes positivos y negativos se deducen de este resultado general considerando casos particulares de la función F.

Puesto que $|f(z) - f(z_0)| = |\overline{f(z)} - \overline{f(z_0)}|$, es evidente que las condiciones

$$\lim f(z) = f(z_0) \qquad \text{y} \qquad \lim \overline{f(z)} = \overline{f(z_0)}$$

son equivalentes. Por consiguiente $\overline{f(z)}$ es continua en z_0 si lo es $f(z)$.

Teniendo en cuenta que

$$\mathrm{Re} f(z) = \frac{f(z) + \overline{f(z)}}{2}, \quad \mathrm{Im} f(z) = \frac{f(z) - \overline{f(z)}}{2i}, \quad |f(z)| = [f(z)\overline{f(z)}]^{1/2},$$

observamos que las tres funciones

$$\mathrm{Re} f(z), \qquad \mathrm{Im} f(z), \qquad |f(z)|$$

son continuas en todo punto z_0 donde lo sea $f(z)$.

Se dice que una función es continua en una región si es continua en cada punto de la región. Cuando se considera la continuidad de una cierta función en una región dada, por lo general el δ necesario para un valor dado de ϵ depende no sólo de ϵ sino también del punto z_0 considerado. Si es posible elegir δ de manera que no dependa de z_0, se dice que la función es uniformemente continua. Con más precisión $f(z)$ es *uniformemente continua* en una región R si para cada número positivo ϵ hay un número positivo δ, que solamente depende de ϵ, tal que las tres condiciones

$$z_1 \text{ en } R, \qquad z_2 \text{ en } R, \qquad |z_1 - z_2| < \delta$$

implican conjuntamente $|f(z_1) - f(z_2)| < \epsilon$.

Como ya se dijo en la última sección, una región cerrada y acotada se denomina *compacta.* Se demuestra de forma esencialmente idéntica a como se hace en el Análisis real, que toda función continua definida sobre una región compacta es uniformemente continua. Es también conocido del Análisis real que toda función continua definida en una región compacta es *acotada,* es decir, satisface a la condición $|f(z)| \leq M$ para alguna constante M. Además, una función de este tipo alcanza de manera efectiva en algún punto de la región sus valores máximo y mínimo. Como $|f(z)|$ es continua cuando lo es $f(z)$ concluimos que *una función compleja continua sobre una región compacta alcanza en ella sus módulos máximo y mínimo.*

El lector recordará que, históricamente, la razón para introducir los números complejos fue la resolución de las ecuaciones polinómicas. Es de gran interés, el que la teoría

desarrollada en este capítulo permite demostrar el teorema fundamental del Algebra, cuyo enunciado es el siguiente:

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ALGEBRA. *Si $P(z)$ es un polinomio complejo no constante, la ecuación $P(z) = 0$ tiene una raíz compleja.*

No damos aquí la demostración de este teorema[1] porque es posible dar demostraciones más breves basadas en métodos más potentes que se introducen más adelante. Sin embargo, nos serviremos del teorema fundamental para demostrar el siguiente:

TEOREMA DE FACTORIZACION. *Si $P(z)$ es un polinomio complejo de grado $n \geq 1$, entonces $P(z)$ puede expresarse en la forma*

$$P(z) = c(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$$

donde c y z_k son constantes.

En efecto, el teorema fundamental asegura la existencia de un valor z_n tal que $P(z_n) = 0$. De aquí, en virtud del resultado del Problema 12 de la Sección 1,

$$P(z) = (z - z_n)Q(z)$$

donde el polinomio Q tiene grado $n-1$. El teorema de factorización se demuestra ahora por inducción.

Ejemplo 5.1. ¿Es posible asignar a la función siguiente, un valor en z_0 que la haga continua en ese punto?

$$g(z) = \frac{z^3 - z_0^3}{z - z_0}, \qquad z \neq z_0.$$

En virtud de una conocida identidad (Ejemplo 1.5)

$$g(z) = z^2 + zz_0 + z_0^2,$$

y por lo tanto $\lim g(z) = z_0^2 + z_0^2 + z_0^2 = 3z_0^2$ cuando $z \to z_0$. Esto demuestra que tomando $g(z_0) = 3z_0^2$ se hace que g sea continua en z_0. Este valor es el único posible.

Se dice que una función tiene una *singularidad evitable* en z_0 si es posible convertirla en una función continua asignando un valor a $f(z_0)$ si la función no estaba definida en $z = z_0$, o cambiando el valor de la función, cuando ya estaba definida. La función $g(z)$ que se ha considerado antes tiene una singularidad evitable en z_0. Cuando z y z_0 son reales, $g(z)$ es el conocido cociente de diferencias que permite calcular la derivada de z^3 en z_0, y el resultado $3z_0^2$, es la derivada en ese punto. Como se ha visto ahora, la misma definición se utiliza en el caso complejo.

[1] Véase el problema 5.3 al final de este capítulo.

Ejemplo 5.2. Sean $f(z) = u(z)+iv(z)$ y $\alpha=a + ib$. Demostrar que $\lim f(z)=\alpha$ equivale a las dos igualdades reales en las que interviene el paso al límite:

$$\lim u(z) = a \qquad \text{y} \qquad \lim v(z) = b. \tag{5.6}$$

Las dos desigualdades

$$|u(z) - a| \leq |f(z) - \alpha|, \qquad |v(z) - b| \leq |f(z) - \alpha|$$

muestran que $\lim f(z) = \alpha$ implica (5.6). El recíproco se sigue de

$$|f(z) - \alpha| \leq |u(z) - a| + |v(z) - b|$$

juntamente con el teorema relativo al límite de una suma de funciones reales. Este resultado indica que la teoría "compleja" de los límites y de la continuidad puede deducirse de la teoría "real", que en este libro se da por conocida.

Problemas

1. (a) ¿Para que valores de z no son continuas las funciones siguientes?

$$z, \quad \frac{1}{z}, \quad \frac{z^2+1}{z+1}, \quad \frac{2}{z^3+1}, \quad \frac{z+1}{z+1}, \quad \frac{z^4+16}{z^4-16}, \quad \frac{z^4-z^2}{z^8+z^5-z^4-z}.$$

   (b) ¿Cuáles de las funciones anteriores poseen singularidades evitables en algún punto, o puntos, del plano complejo finito, y cómo ha de definirse la función en ellos para poder eliminar la discontinuidad? (c) La misma pregunta para $z=\infty$. (Se sustituye z por $1/\zeta$ y se estudia si la nueva función tiene límite cuando $\zeta \to 0$.)
2. ¿Cómo deben definirse en z_0 las funciones siguientes para hacerlas continuas en ese punto?

$$\frac{z-z_0}{z-z_0}, \qquad \frac{z^4-z_0^4}{z-z_0}, \qquad \frac{1}{z-z_0}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z_0}\right), \qquad \frac{1}{z-z_0}\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z_0^2}\right).$$

3. Siendo $f(z) = (a_0 + a_1z + a_2z^2) \;/\; (b_0 + b_1z + b_2z^2)$, donde los coeficientes a_k y b_k son constantes, discutir el comportamiento de $f(z)$ en 0 y en ∞.
4. El conjunto de todos los puntos z en los que está definida un función f se llama frecuentemente *dominio* de f. Cuando f se da mediante una fórmula sin especificar cuál es su dominio, se sobreentiende que éste es el conjunto de todos los puntos z para los que la fórmula define un valor complejo $f(z)$. Hágase un croquis del dominio de las funciones que se dan a continuación, y discutir si es un *dominio* en el sentido técnico de la Sección 4. Discutir también la naturaleza de las discontinuidades para $|z| < \infty$ y $z = \infty$ de:

$$\frac{|z|^2-1}{z^2-1}, \qquad \frac{1+z}{1-|z|}, \qquad \frac{(\operatorname{Re} z)(\operatorname{Im} z)}{(\operatorname{Im} z)(\operatorname{Re} z)}, \qquad \frac{1+5z^2+4z^3}{(|\operatorname{Im} z|^2-1)(|z|-4)}.$$

5. Discutir el problema de dar un significado conveniente a $\alpha^{\sqrt{2}}$ cuando $\alpha \neq 0$ usando los exponentes 1, 1.4, 1.41, 1.414, etc. ¿Cuántos valores cree el lector que debiera tener $\alpha^{\sqrt{2}}$?

Otros resultados relativos a polinomios.

6. Sean $a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ y $b_0 + b_1 z + \cdots + b_m z^m$ dos polinomios coincidentes, en el sentido de que ambos dan el mismo valor para cada número real z de un entorno de 0. Utilícese el concepto de límite para demostrar que sus correspondientes coeficientes son iguales, y que así pues, los dos polinomios son iguales para todo valor complejo de z. (Haciendo $z = 0$ se obtiene $a_0 = b_0$. Dividiendo por z, haciendo $z \to 0$ para valores reales tenemos $a_1 = b_1$, etc. En el Problema 17 de la Sección 1 se da un teorema más fuerte de este mismo tipo. Sin embargo, la demostración presentada aquí es aplicable también a las series infinitas, para las cuales no es posible considerar la noción de *grado* utilizada en la Sección 1.)
7. Demostrar que todo polinomio real puede siempre expresarse como producto de factores lineales y cuadráticos, y aplíquese a $z^8 - 1$. (En el teorema de factorización las raíces complejas aparecen como pares de números conjugados.)
8. Expresar la suma y el producto de las raíces de un polinomio en función de sus coeficientes; aplíquese lo anterior a la ecuación $z^n - 1 = 0$. (Se utiliza el Problema 6 y el teorema de factorización.)
9. Considerando los polinomios $P(\alpha,\beta)=\alpha\beta$ y $Q(\alpha,\beta) = 0$, mostrar que dos polinomios en (α,β) pueden ser iguales en una infinidad de valores (α,β) sin ser idénticos. Demostrar que, sin embargo, si $P(\alpha,\beta) = Q(\alpha,\beta)$ para todos los valores reales de α y β de un entorno de $\alpha = 0$ y $\beta = 0$, entonces son idénticos y, por lo tanto, coinciden para todos los valores complejos de α y β. (Al agrupar todos los términos del mismo grado respecto de β se obtiene

$$P(\alpha,\beta) = a_0(\alpha) + a_1(\alpha)\beta + \cdots + a_n(\alpha)\beta^n$$

donde cada $a_k(\alpha)$ es un polinomio. Se usa ahora el Problema 6 dos veces.)
10. Extender por inducción el resultado del problema 9 a los polinomios $P(\alpha,\beta,\ldots,\sigma)$.

***6. Los números complejos como pares de números reales.** La discusión que se hizo en la Sección 1 estaba más orientada hacia las técnicas algebraicas que hacia el problema lógico de dar una definición rigurosa. Como definición, la notación de Euler $a + ib$ no es por completo satisfactoria pues origina la siguiente pregunta: ¿El signo $+$ que figura en el símbolo $a + ib$ es el mismo que el $+$ que aparece en todos los demás lugares del desarrollo algebráico? Una presentación ligeramente diferente que no ofrece esta dificultad es la debida al matemático irlandés William Rowan Hamilton. En ella se pone de manifiesto que no hay necesidad de hacer ninguna distinción entre los dos significados posibles del signo $+$, y también, que en el símbolo de Euler ib representa verdaderamente el producto de i por b, así que $a + ib = a + bi = bi + a = ib + a$. Como al efectuar con computador cálculos en los que intervienen números complejos se usa la definición de Hamilton, se da en el Problema 1.1 una breve descripción de ella. En los restantes ejercicios de este grupo de problemas se tratan otros temas relativos al Capítulo 1.

Problemas suplementarios sobre el Capítulo 1.

1.1. De acuerdo con Hamilton, se definen los números complejos como pares ordenados de números reales, donde $(a,b) = (c,d)$ significa $a = c$ y $b = d$. Además por definición,

$$(a,b) + (c,d) = (a + c, b + d), \qquad (a,b)(c,d) = (ac - bd, bc + ad).$$

(a) Demostrar que (0,0) se comporta como el cero y que (1,0) actúa como la unidad. (b) Obtener $-(a,b)$ resolviendo la ecuación $z + (a,b) = (0,0)$, donde $z = (x,y)$. (c) Demostrar que $(a,0) + (c,0) = (a + c,0)$ y que $(a,0)(c,0) = (ac,0)$, así pues, desde el punto de vista algebraico, el número complejo $(a,0)$ y el número real a pueden identificarse.[1] (d) Si se identifica -1 con $(-1, 0)$, demostrar que $-z = (-1)z$ siendo $z = (x, y)$. (e) Demostrar que el número complejo $i = (0,1)$ satisface $i^2 = (-1,0) = -1$. (f) Demostrar que $(a, b) = (a, 0) + (0,1)(b, 0) = a + ib$, en la que la primera igualdad es consecuencia de las leyes de la adición y la multiplicación y la segunda, de efectuar ciertas identificaciones y abreviaturas. (g) Discutir si desde el punto de vista lógico es forzosamente necesario utilizar la notación (a,b) para comprobar que se verifican las leyes conmutativas, asociativas y distributiva, o si el uso de $a + ib$ es lógicamente permisible.

1.2. *Forma matricial de los números complejos.* Para este problema es necesario estar familiarizado con las matrices 2-por-2. Representemos el número complejo $a + ib$ del texto o (a,b) del Problema 1.1 mediante la matriz

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

y definamos la igualdad, suma y producto como se hace con las matrices. Imitando el método del Problema 1.1, desarrollar el álgebra de los números complejos desde este punto de vista. (A excepción de la ley conmutativa de la multiplicación, las leyes algebraicas se deducen de forma automática del álgebra de las matrices, no siendo necesario comprobarlas por separado. Por consiguiente, aunque no se las utilice como definición, estas matrices dan un método muy eficaz de comprobar los axiomas.)

1.3. Demostrar que los coeficientes binomiales c_k forman una sucesión simétrica, es decir $c_k = c_{n-k}$ para $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. (Se considera $(1 + z)^n = (z + 1)^n$ eligiendo convenientemente los valores de α y β del Problema 7.)

1.4. Demostrar, para $n = 1, 2, 3, \ldots$ que existe un único polinomio P_n de grado n tal que

$$z^n + \frac{1}{z^n} = P_n\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

[1] La correspondencia $a \leftrightarrow (a, 0)$ es un *isomorfismo* entre el álgebra de los números reales y la subálgebra de los números complejos que son de la forma $(\alpha, 0)$.

(Se considera $z^n + 1/z^n - (z + 1/z)^n$ y se aplica inducción y el Problema 1.3.)

2.1. *Teorema de Enestrom.* Sean $n \geq 1$ y $a_0 > a_1 > \cdots \quad a_n > 0$. Demostrar que todas las raíces de $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ verifican $|z| > 1$. (Se escribe $(1 - z)P(z)$ en forma de polinomio y se demuestra entonces que

$$|(1 - z)P(z)| > a_0 - [(a_0 - a_1)|z| + \cdots + (a_{n-1} - a_n)|z|^n + a_n|z|^{n+1}]$$

a menos que $z \geq 0$. Si $|z| \leq 1$, la expresión entre corchetes es máxima cuando $|z| = 1$, pero incluso en este caso la desigualdad da $|(1 - z)P(z)| > 0$.)

2.2. Efectuando repetidamente adiciones y multiplicaciones de $\alpha, \beta, \ldots, \sigma$ entre sí y con los números positivos se obtiene un *polinomio de coeficientes positivos.* Un polinomio de esta clase puede representarse como una suma de términos, cada uno de los cuales tiene la forma $c\alpha^m\beta^n \cdots \sigma^k$ donde $m, n, \ldots, k$ son números enteros y $c > 0$. Si F es un polinomio de coeficientes positivos, demostrar que

$$|F(\alpha,\beta,\ldots,\sigma)| \leq F(|\alpha|,|\beta|,\ldots,|\sigma|).$$

3.1. *Ecuaciones cúbicas.* Demostrar que toda ecuación cúbica $z^3 + az^2 + bz + c = 0$ puede ponerse en la forma

$$w^3 + b'w + c' = 0$$

haciendo $z = w + h$ y eligiendo h convenientemente. Hallar condiciones para a, b, c que aseguren $b' = 0$ y resolver completamente la ecuación en este caso.

3.2. Si en el Problema 3.1 es $b' \neq 0$, reducir a la forma $s^3 - 3s - \gamma = 0$ haciendo $w = ks$ con un k conveniente. Si $\gamma = 2$ o $\gamma = -2$, demuéstrese que la ecuación tiene una raíz doble y factorícese el primer miembro.

3.3. (a) Demostrar que $z = p + q$ verifica $z^3 - 3z = \gamma$ si

$$p^3 + q^3 = \gamma \qquad \text{y} \qquad pq = 1. \tag{*}$$

(b) Reducir las dos ecuaciones (*) a una de segundo grado en p^3 y obtener de aquí un valor $p = \alpha$ que, para cierta elección de la raíz cuadrada y cierta elección de la raíz cúbica sea,

$$\alpha = \left(\frac{\gamma + (\gamma^2 - 4)^{1/2}}{2}\right)^{1/3}$$

(c) Si ω es una raíz compleja de 1, demostrar que cada uno de los pares

$$(p, q) = \left(\alpha, \frac{1}{\alpha}\right), \qquad \left(\omega\alpha, \frac{\omega^2}{\alpha}\right), \qquad \left(\omega^2\alpha, \frac{\omega}{\alpha}\right)$$

verifica (*), y obtener así tres raíces $z = p + q$ de $z^3 - 3z = \gamma$. (d) Si $\alpha \neq 1, \omega, \omega^2, -1, -\omega, -\omega^2$, demostrar que estas raíces $p + q$ son distintas, mientras que $\alpha = 1, \omega, \omega^2$ nos lleva al caso $\gamma = 2$ del Problema 3.2, y $\alpha = -1, -\omega, -\omega^2$ conduce al caso $\gamma = -2$.

4.1. *Proyección estereográfica.* Supongamos que el punto $z = x + iy$ se aplica sobre el punto (X,Y,Z) de la esfera mediante la proyección estereográfica; así pues, los tres puntos

$$(0,0,1), \qquad (X,Y,Z), \qquad (x,y,0)$$

están alineados. Por lo tanto, $(X,Y,Z-1) = t(x,y,-1)$ donde t es un escalar real. Se expresa X,Y,Z en función de x, y, t y se calcula t por medio de $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$. Se obtiene finalmente que

$$X = \frac{2x}{|z|^2 + 1}, \qquad Y = \frac{2y}{|z|^2 + 1}, \qquad Z = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}.$$

4.2. Con relación al Problema 4.1, demostrar que una circunferencia sobre la esfera se corresponde con una circunferencia sobre el plano z, salvo en el caso de que la circunferencia inicial contenga al polo (0, 0, 1), en cuyo caso se corresponde con una recta del plano z. (La circunferencia dada es la intersección de la esfera con un cierto plano $AX + BY + CZ = D$. Expresar esta ecuación mediante x e y.)

4.3. Si $P: (X,Y,Z)$ y $P': (X',Y',Z')$ son dos puntos de la esfera, su distancia cordal es la longitud del segmento rectilíneo que une P con P'. Si P se corresponde con z y P' con z', demostrar que la distancia cordal viene dada por

$$d(z,z') = \frac{2|z - z'|}{\sqrt{1 + |z|^2}\sqrt{1 + |z'|^2}}.$$

4.4. Para este problema es preciso poseer nociones de geometría diferencial. La diferencial de arco en la esfera y en el plano vienen dados, respectivamente, por

$$dS^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2, \qquad ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Demostrar que $ds^2 = (1 - Z)^{-2}\, dS^2$, y que por lo tanto, la aplicación del plano sobre la esfera es una transformación conforme.

5.1. Se supone en la teoría de las funciones racionales que todas las singularidades evitables se han eliminado ya de manera efectiva; así por ejemplo, se da por hecho que la función z/z toma el valor 1 en el punto $z = 0$. (a) Demostrar mediante el teorema fundamental del Algebra que toda función racional acotada es constante. (b) Demostrar que, recíprocamente, el teorema fundamental del Algebra se deduce del resultado (a).

5.2. Se dice que $\lim f(z) = \infty$ si $\lim [1/f(z)] = 0$. (a) Expresar lo anterior mediante los ϵ-entornos de ∞. (b) ¿En qué sentido y en qué medida siguen siendo válidos los teoremas de la Sección 5 cuando uno o ambos límites son ∞?

5.3. *Teorema fundamental del Algebra.* (a) Si $P(z)$ es un polinomio no constante, demostrar que se verifica $|P(z)| > |P(0)|$ en el exterior de cierto disco $|z| \leq R$. Deducir de lo anterior que si el valor mínimo de $|P(z)|$ en el disco $|z| \leq R$ se alcanza en z_0, entonces el punto $z = z_0$ da a $|P(z)|$ su valor mínimo en todo el plano. (b) Si $P(z_0) \neq 0$ se define el polinomio Q mediante la ecuación $Q(z) = P(z + z_0)/P(z_0)$. Demostrar que $Q(z) = 1 + cz^m + \cdots$ donde $c \neq 0, m \geq 1$, y los términos no representados son de orden superior. (c) Si α es una raíz de $c\alpha^m = -1$, demostrar que $Q(\alpha z)$ es de la forma $1 - z^m + \cdots$ y que su módulo mínimo en todo el plano se alcanza en $z = 0$. (d) Obtener una contradicción tomando z positivo y adecuadamente pequeño.

Capítulo 2

La derivación de variable compleja

Se verifica que una función de variable compleja admite derivada solamente cuando sus partes real e imaginaria satisfacen un sistema de ecuaciones en derivadas parciales que se llaman ecuaciones de Cauchy-Riemann. Se utilizan en este capítulo las ecuaciones de Cauchy-Riemann para establecer la diferenciabilidad de las funciones elementales cuando se las generaliza de forma conveniente a fin de que su variable pueda tomar valores complejos. En contraste con lo que ocurre en el Análisis de variable real, la función e^z es periódica, y por lo tanto, log z admite infinitos valores. La representación de log z mediante funciones uniformes nos lleva al concepto de superficie de Riemann, que desarrollamos aquí en la medida en que resulta necesaria para estudiar el logaritmo. Un estudio más profundo de las ecuaciones de Cauchy-Riemann muestra la conexión entre el Análisis de variable compleja y las funciones armónicas por una parte, y por otra, la conexión entre este Análisis y la teoría del flujo de fluidos ideales en el plano.

1. Funciones analíticas. Se dice que la función f definida en un dominio D es *diferenciable* en el punto z_0 de D cuando existe el límite

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

La derivada se denota entonces por $f'(z_0)$. De

$$f(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}(z - z_0) + f(z_0) \qquad (z \neq z_0)$$

se deduce que $f(z) = f'(z_0) \cdot 0 + f(z_0) = f(z_0)$ cuando $z \to z_0$, y por lo tanto, una función que es diferenciable en z_0 es también continua en ese punto. Sin embargo, el recíproco no es verdadero; la diferenciabilidad es una condición mucho más fuerte que la continuidad.

Escribiendo en la definición anterior $z - z_0 = h$ obtenemos la forma equivalente

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z + h) - f(z)}{h} = f'(z) \tag{1.1}$$

en la que se ha sustituido z_0 por z. Es importante recordar que ahora h es complejo. Denotamos h por Δz, así que

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z).$$

Si $w = f(z)$, se define a veces

$$\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z) \tag{1.2}$$

escribiéndose la derivada en la forma dw/dz o $(d/dz)w$; así pues

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}.$$

Esta notación, sin embargo, solamente tiene significado cuando se tiene presente (1.2).

Si el límite (1.1) existe para todo z de una región dada R, el proceso anterior le asocia el número $f'(z)$ a cada punto z de R, y así queda determinada una función. Esta función se denota f' o $f'(z)$. Las ecuaciones en las que intervienen derivadas, como la (1.3) de más adelante, pueden interpretarse en dos sentidos, bien como una igualdad de funciones, o como una igualdad de valores de funciones.

Como podría esperarse a la vista de las definiciones anteriores, las derivadas de las funciones complejas se comportan de manera muy parecida a las derivadas de las funciones reales. Por ejemplo, si $f(z)=z^n$, siendo n un entero positivo, entonces

$$\frac{(z + h)^n - z^n}{h} = nz^{n-1} + c_2 z^{n-2} h + \cdots + c_n h^{n-1}$$

donde los coeficientes c_k son los coeficientes binomiales que se introdujeron en el Ejemplo 1.6 del Capítulo 1. Haciendo que $h \to 0$ se tiene

$$\frac{d}{dz} z^n = nz^{n-1}. \tag{1.3}$$

Las mismas demostraciones que se dan en el Análisis real permiten establecer que si f y g son diferenciables, entonces

$$(f + g)' = f' + g', \qquad (fg)' = fg' + f'g, \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}$$

suponiéndose en este último caso que es $g(z) \neq 0$ en la región considerada. Si las derivadas del segundo miembro existen, se demuestra por inducción que

$$(f + g + \cdots + p)' = f' + g' + \cdots + p'$$

Cuando se considera la fórmula obtenida al dividir $(fg)'$ por fg, se prevé la siguiente generalización

$$\frac{(fg \cdots p)'}{fg \cdots p} = \frac{f'}{f} + \frac{g'}{g} + \cdots + \frac{p'}{p}. \tag{1.4}$$

Este resultado se demuestra por inducción fácilmente, suponiendo que no se anule ningún denominador y que existan todas las derivadas que figuran en los numeradores. A modo de comprobación, haciendo $f=z, g=z, \ldots, p=z$ en (1.4) se obtiene otra vez (1.3) para $z \neq 0$.

Estos resultados indican que los polinomios y las funciones racionales se derivan del mismo modo que en el Análisis real. También es válida la regla de la cadena; si g es diferenciable en z y f es diferenciable en $g(z)$, éntonces $F(z)=f[g(z)]$ es diferenciable en z, y

$$F'(z) = f'[g(z)]g'(z). \tag{1.5}$$

En el Problema 10 se da una demostración de esta fórmula. Si $\zeta = g(z)$ y $w=f(\zeta)$, la regla de la cadena puede escribirse en la forma

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{d\zeta}\frac{d\zeta}{dz}.$$

Hasta el momento hemos puesto de manifiesto la semejanza entre la derivación en el caso de variable real y en el de variable compleja. Sin embargo, realmente el hecho de que en (1.1) h sea complejo impone una restricción muy fuerte sobre la clase de funciones que tienen derivada compleja. Tomemos, por ejemplo, la función $f(z) = \bar{z}$ entonces

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{\overline{z+h} - \bar{z}}{h} = \frac{\bar{h}}{h} \qquad (h \neq 0).$$

Si h es real, entonces $h = \bar{h}$ y el límite cuando $h \to 0$ es 1. Pero si $h = ik$ es imaginario puro, entonces $\bar{h} = -h$ y el límite es -1. Esta función no es diferenciable en ningún punto, a pesar de que sus partes real e imaginaria, x y $-y$, presentan muy buen comportamiento.

En el ejemplo anterior se demostró la no existencia de $f'(z)$ haciendo que $h \to 0$ primero según valores reales y después según valores imaginarios puros. Estas dos posibilidades nos conducen a la principal condición que debe satisfacer una función compleja para poder admitir derivada.

Efectivamente, si $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ y si h es real, entonces $f'(z)$ es el límite de

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{u(x+h,y) - u(x,y)}{h} + i\frac{v(x+h,y) - v(x,y)}{h}.$$

Sin embargo, si $h = ik$, donde k es real, la derivada $f'(z)$ es el límite de

$$\frac{f(z+ik)-f(z)}{ik} = \frac{u(x,y+k) - u(x,y)}{ik} + i\frac{v(x,y+k) - v(x,y)}{ik}.$$

Así pues, si $h \to 0$ en la primera expresión y $k \to 0$ en la segunda, se obtienen las dos fórmulas

$$f'(z) = u_x + iv_x, \qquad f'(z) = -iu_y + v_y \tag{1.6}$$

expresiones en las que los subíndices indican derivación parcial, tomándose el valor de las funciones del segundo miembro en (x,y). Por ejemplo,

$$u_x = u_x(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

En el proceso de demostración de (1.6) se ha establecido también que la existencia de $f'(z)$ implica la existencia de u_x, u_y, v_x y v_y.

Las dos expresiones de (1.6) son compatibles solamente si u y v satisfacen las *ecuaciones de Cauchy-Riemann,*

$$u_x = v_y, \qquad u_y = -v_x. \tag{1.7}$$

Hallamos aquí una sorprendente diferencia entre las derivadas de las funciones de variable real y las de variable compleja. La existencia de una derivada real no es sino una condición de variación suave, mientras que *la existencia de derivada compleja conduce a un par de ecuaciones en derivadas parciales.*

Observando el proceso por el que se han deducido las ecuaciones de Cauchy-Riemann, no es de esperar que éstas sean suficientes para asegurar la existencia de $f'(z)$ y de hecho, no lo son. Pero si se supone que las derivadas parciales son continuas, entonces las ecuaciones de Cauchy-Riemann sí son suficientes, como se demuestra a continuación.

En un punto (x,y) dado, definimos $\Delta z = \Delta x + i\,\Delta y$,

$$\Delta u = u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x,y),$$

y análogamente para Δv, poniendo v en lugar de u. Como el lector recordará del Análisis real, si u_x y u_y son continuas en (x,y), entonces

$$\Delta u = u_x\,\Delta x + u_y\,\Delta y + \epsilon_1|\Delta z|, \qquad \lim_{\Delta z \to 0} \epsilon_1 = 0. \tag{1.8}$$

Análogamente, si v_x y v_y son continuas en (x,y), entonces

$$\Delta v = v_x\,\Delta x + v_y\,\Delta y + \epsilon_2|\Delta z|, \qquad \lim_{\Delta z \to 0} \epsilon_2 = 0. \tag{1.9}$$

Cuando las funciones u y v satisfacen respectivamente (1.8) y (1.9) se dice que son diferenciables en (x,y). A fin de dar en el caso complejo un criterio parecido de diferenciabilidad, definamos η en un punto z dado, por

$$\eta = \frac{\Delta w}{\Delta z} - f'(z) \qquad (\Delta z \neq 0),$$

donde Δw es el definido en (1.2). Entonces $\Delta w/\Delta z$ existe y es igual al número complejo $f'(z)$ si y solamente si $\lim \eta = 0$; ahora multiplicamos por Δz los dos miembros y definimos ϵ por $\epsilon|\Delta z| = \eta\, \Delta z$. Resulta que $dw/dz = f'(z)$ existe en un punto z dado si y solamente si

$$\Delta w = f'(z)\, \Delta z + \epsilon|\Delta z|, \qquad \lim_{\Delta z \to 0} \epsilon = 0. \tag{1.10}$$

Este resultado se usa en la demostración del siguiente

TEOREMA 1.1. *La función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es diferenciable en un punto $z = x + iy$ cuando las derivadas parciales u_x, u_y, v_x, v_y son continuas en ese punto y satisfacen en él las ecuaciones de Cauchy-Riemann.*

Demostración. Sea $w = f(z)$. Entonces $\Delta w = \Delta u + i\, \Delta v$, puesto que $f(z + \Delta z) - f(z)$ es igual a

$$u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x,y) + i[v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x,y)].$$

En virtud de (1.8) y (1.9)

$$\Delta u + i\, \Delta v = u_x\, \Delta x + u_y\, \Delta y + i(v_x\, \Delta x + v_y\, \Delta y) + (\epsilon_1 + i\epsilon_2)|\Delta z|.$$

Sustituyendo en el primer miembro $\Delta u + i\, \Delta v$ por Δw y usando en el segundo las ecuaciones de Cauchy-Riemann, se obtiene

$$\Delta w = (u_x + iv_x)(\Delta x + i\, \Delta y) + (\epsilon_1 + i\epsilon_2)|\Delta z|.$$

Si se define $f'(z)$ por $f'(z) = u_x + iv_x$, se verifica el criterio (1.10), con $\epsilon = \epsilon_1 + i\epsilon_2$ y por lo tanto, w es diferenciable en z.

El resultado más importante de la discusión precedente es que en todo punto en el que exista $f'(z)$ se satisface un cierto sistema de ecuaciones en derivadas parciales (las ecuaciones de Cauchy-Riemann). El lector que esté algo familiarizado con las aplicaciones del Análisis sabe que las ecuaciones en derivadas parciales son de escaso interés cuando sólo se satisfacen en un punto; al verificarse en toda una región es cuando se pueden extraer de ellas consecuencias interesantes. Esta observación sirve para justificar la definición siguiente:

DEFINICION 1.1. *Se dice que una función $f(z)$ es analítica en un punto z_0 si f es diferenciable en todos los puntos de un ϵ-entorno de z_0. Una función es analítica en una región cuando es analítica en todos los puntos de la región.*

Para el caso de una función definida sobre un dominio, las propiedades de diferenciabilidad y de analiticidad son equivalentes; pero en otros casos la analiticidad exige la diferenciabilidad en un conjunto mayor. Por ejemplo, f es analítica en el disco $|z| \leq 1$ si f es diferenciable cuando $|z| < 1 + \delta$, donde $\delta > 0$. Demos todavía otro ejemplo. Consideremos $f(z) = |z|^2$, así que

$$u(x,y) = x^2 + y^2, \qquad v(x,y) = 0.$$

En este caso, las ecuaciones de Cauchy-Riemann exigen que $2x = 0$, $2y = 0$ y por lo tanto, que $z = 0$. Como hay una infinidad de puntos en cualquier entorno de $z = 0$, en los que no existe $f'(z)$ esta función no es analítica en $z = 0$. Sin embargo, $f'(0)$ existe, como lo demuestra la ecuación

$$\lim \frac{f(0 + \Delta z) - f(0)}{\Delta z} = \lim \frac{|\Delta z|^2}{\Delta z} = 0.$$

Ejemplo 1.1. Si $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, demostrar que las curvas

$$u(x,y) = \text{const} \qquad \text{y} \qquad v(x,y) = \text{const}$$

son ortogonales en todo punto en el que $f'(z)$ existe y es distinta de cero.

Si $z = x + iy$ es uno de estos puntos, las ecuaciones (1.6) y (1.7) dan

$$u_x^2 + u_y^2 = v_x^2 + v_y^2 = |f'(z)|^2$$

y por lo tanto, ninguno de los vectores $\mathbf{i}u_x + \mathbf{j}u_y$ y $\mathbf{i}v_x + \mathbf{j}v_y$ es igual a cero. Como es sabido del Análisis real, estos vectores son perpendiculares a las curvas $u(x,y) = \text{const}$ y $v(x,y) = \text{const}$. Usando de nuevo las ecuaciones (1.7) se ve que el producto escalar de estos vectores es

$$(\mathbf{i}u_x + \mathbf{j}u_y) \cdot (\mathbf{i}v_x + \mathbf{j}v_y) = u_x v_x + u_y v_y = v_y v_x - v_x v_y = 0.$$

Por consiguiente, las normales son mutuamente perpendiculares y las curvas se cortan formando ángulos rectos.

Ejemplo 1.2. Si la parte real, la parte imaginaria o el módulo de una función analítica son constantes en un dominio D, demostrar que la función es constante en todo el dominio.

Sea $f = u + iv$. Si u es constante, entonces $u_x = u_y = 0$; por consiguiente, en virtud de las ecuaciones de Cauchy-Riemann, $v_x = v_y = 0$ y por un teorema conocido del Análisis real, v es constante. Así pues, f es constante. Si f tiene módulo constante, $|f|^2 = u^2 + v^2$ es constante, y al derivar se obtiene

$$uu_x + vv_x = 0, \qquad uu_y + vv_y = 0.$$

Sustituyendo v_x por $-u_y$ y v_y por u_x, se tiene un sistema de ecuaciones lineales en las dos incógnitas u_x y u_y con determinante $u^2 + v^2$. Si el valor constante de $|f|$ no es 0, entonces $u^2 + v^2 > 0$; por lo tanto $u_x = u_y = 0$, y así pues, $u = \text{const}$. Este caso ya ha sido estudiado. Por otra parte, si $|f| = 0$, entonces f es, evidentemente, constante, a saber $f = 0$.

Ejemplo 1.3. Si la parte real de todos los ceros del polinomio $P(z)$ es negativa, demostrar que la parte real de todos los ceros de $P'(z)$ también es negativa.

Los polinomios que tienen esta propiedad se llaman polinomios de Hurwitz; aparecen en la teoría de la estabilidad de los sistemas mecánicos y eléctricos. Supongamos, para demostrar el teorema, que $P(z)$ tenga los ceros z_k, con lo que su factorización será

$$P(z) = c(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n), \qquad c \text{ const.}$$

En virtud de (1.4) con $f = c(z - z_1), g = (z - z_2), \ldots, p = (z - z_n)$, o bien por un cálculo directo, obtenemos

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{1}{z - z_1} + \frac{1}{z - z_2} + \cdots + \frac{1}{z - z_n}, \qquad (z \neq z_k).$$

Supongamos ahora que $\operatorname{Re} z_k < 0$ para cada valor de k, pero que $\operatorname{Re} z \geq 0$. En ese caso $\operatorname{Re}(z - z_k) > 0$ y por consiguiente

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z - z_k}\right) > 0. \tag{1.11}$$

(Esta última acotación es consecuencia de la fórmula $1/\alpha = \bar{\alpha}/|\alpha|^2$, que indica que $\operatorname{Re} \alpha$ y $\operatorname{Re}(1/\alpha)$ tienen el mismo signo para todo valor de α.) Como $P'(z)/P(z)$ es suma de términos de la forma (1.11), también tiene parte real positiva, y por lo tanto no es 0. En otras palabras, $P'(z) \neq 0$ cuando $\operatorname{Re} z \geq 0$, y por lo tanto, los ceros de $P'(z)$ han de tener $\operatorname{Re} z < 0$

Problemas

1. Derivar, indicando en cada caso la fórmula de derivación que se ha utilizado: $(2z + 3)^5$, $(z - i)/(z + i)$, $(2z + z^2)^4(1 + z^3)^2$.
2. ¿Cuáles de las funciones siguientes satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann?

   (a) $f(z) = x^2 - y^2 - 2ixy$, $x^3 - 3y^2 + 2x + i(3x^2y - y^3 + 2y)$;
   (b) $\frac{1}{2}\log(x^2 - y^2) + i \arctan y/x$, $\frac{1}{2}\log(x^2 + y^2) + i \operatorname{arccot} x/y$.

3. (a) Derivar a partir de la definición (1.1) y (b) comprobar que el resultado coincide con el de utilizar las (1.6) para cada una de las funciones: z, $(1 - i)z$, z^2, iz^3, $(1 + z)/z$.

4. Siendo $z \neq 0$, demostrar directamente a partir de (1.1) que $(z^{-1})' = -z^{-2}$. Deducir de ésta y de (1.3) la fórmula para derivar $z^{-n} = (z^{-1})^n$ siendo n un entero positivo. (Usar la regla de la cadena.)
5. (a) Sea $F(z) = c_1 f(z) + c_2 g(z)$ donde c_1 y c_2 son constantes y existen $f'(z)$ y $g'(z)$. Dividiendo la identidad

$$F(z+h) - F(z) = c_1[f(z+h) - f(z)] + c_2[g(z+h) - g(z)]$$

por h, deducir que $F'(z) = c_1 f'(z) + c_2 g'(z)$. Eligiendo convenientemente los coeficientes c_i, obtener las fórmulas para derivar $f+g, f-g$ y cf, donde c es una constante. (b) Deducir la fórmula para derivar un producto, considerando para ello la expresión

$$f(z+h)[g(z+h) - g(z)] + g(z)[f(z+h) - f(z)].$$

6. Demostrar que una función analítica que solamente tome valores reales es constante.
7. Supongamos que se trata de definir una función analítica e^z tal que $e^0 = 1$ y que $e^{x+iy} = e^x e^{iy}$, siendo e^x la conocida función exponencial de variable real. Si

$$e^{iy} = c(y) + is(y),$$

demostrar, usando las ecuaciones de Cauchy-Riemann que $c(y) = s'(y)$, $s(y) = -c'(y)$.

Deducir de lo anterior que la función

$$\phi(y) = [c(y) - \cos y]^2 + [s(y) - \operatorname{sen} y]^2$$

verifica $\phi'(y) = 0$, y que por lo tanto es constante. Obtener de $e^0 = 1$, que $\phi(y) = 0$, y en consecuencia, que la única forma de definir e^z, de manera que se satisfagan las condiciones anteriores es

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y).$$

8. (a) Dibujar las curvas $u = \text{const}$ y $v = \text{const}$ para las funciones siguientes.
(b) Comprobar que los resultados concuerdan con los del Ejemplo 1.2:

$$z, \quad (1-2i)z, \quad z^2, \quad z^{-1}, \quad z+z^2, \quad (z+i)(z-i)^{-1}.$$

9. Si $P(z) = a_0 + a_1(z-a) + \cdots + a_n(z-a)^n$, siendo los coeficientes "a" constantes, demostrar que

$$a_k = \frac{P^{(k)}(a)}{k!}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n.$$

(Se deriva k veces y se hace $z=a$.) Aplicando este resultado a

$$(1+z)^n = c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n,$$

demostrar que el k-ésimo coeficiente binomial c_k, verifica

$$c_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n.$$

10. *Regla de la cadena.* Supongamos que F, f y g satisfagan las hipótesis de (1.5) con $\zeta = g(z)$ y $w = f(\zeta)$. Deducir de las dos ecuaciones

$$\Delta w = f'(\zeta)\,\Delta\zeta + \epsilon_1|\Delta\zeta|, \qquad \Delta\zeta = g'(z)\,\Delta z + \epsilon_2|\Delta z|$$

la igualdad

$$\Delta w = f'(\zeta)g'(z)\,\Delta z + f'(\zeta)\epsilon_2|\Delta z| + \epsilon_1|\Delta\zeta|.$$

Dividiendo por Δz y haciendo $\Delta z \to 0$, obtener la regla de la cadena. (Obsérvese que $\Delta z \to 0$ implica $\Delta\zeta \to 0$, y por lo tanto, $\epsilon_1 \to 0$ y $\epsilon_2 \to 0$ simultáneamente.)

2. Funciones exponencial y trigonométricas. Si la propiedad $e^{x_1+x_2} = e^{x_1}e^{x_2}$ de la función exponencial de variable real se pudiera utilizar para valores complejos de las variables, se tendría

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy},$$

lo que sugiere[1] que e^z, debería definirse como

$$e^z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y). \tag{2.1}$$

(La notación e^z lleva implícitamente consigo ciertas propiedades que en realidad es preciso demostrar a partir de la definición.) Siendo $u = e^x \cos y$ y $v = e^x \operatorname{sen} y$, sus derivadas parciales son continuas y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Así pues, la función e^z es analítica en el plano z. Una función analítica en todo el plano z finito, $|z|<\infty$, se llama una función entera. Evidentemente, e^z es una función entera, como lo son también los polinomios en z. En virtud de (1.6),

$$\frac{d}{dz}e^z = \frac{\partial}{\partial x}(e^x \cos y) + i\frac{\partial}{\partial x}(e^x \operatorname{sen} y) = e^z, \tag{2.2}$$

por lo que e^z es la derivada de sí misma.

Haciendo $x = 0$ en (2.1) y utilizando resultados de la Sección 3 del Capítulo 1, se obtiene

$$e^{iy_1}e^{iy_2} = (\cos y_1 + i \operatorname{sen} y_1)(\cos y_2 + i \operatorname{sen} y_2) = e^{i(y_1+y_2)}$$

y de aquí,

$$(e^{x_1}e^{iy_1})(e^{x_2}e^{iy_2}) = (e^{x_1}e^{x_2})(e^{iy_1}e^{iy_2}) = e^{x_1+x_2}e^{i(y_1+y_2)}.$$

Como por definición $e^z = e^x e^{iy}$, la igualdad precedente da

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2} \tag{2.3}$$

[1] Véase el Problema 7 de la sección precedente.

para todo par de números complejos arbitrarios $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$. El resultado (2.3) se denomina *teorema de adición* de la función exponencial. En general, un teorema de adición para una función f es una fórmula que expresa el valor de $f(z_1+z_2)$ por funciones de z_1 sola y z_2 sola.

Tomando $z_1 = z$ y $z_2 = -z$ en (2.3) se tiene $e^z e^{-z} = 1$, lo que muestra que e^z no es nunca nula. También se deduce esta misma conclusión de

$$|e^z| = e^x(\cos^2 y + \operatorname{sen}^2 y)^{1/2} = e^x,$$

que se obtiene igualando en (2.1) los valores absolutos de los dos miembros.

Sustituyendo en (2.1) z por $iz = -y + ix$, se tiene

$$e^{iz} = e^{-y}(\cos x + i \operatorname{sen} x)$$

y, puesto que $\cos(-x) = \cos x$ y $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$, al sustituir z por $-z$ en esta última ecuación se llega a

$$e^{-iz} = e^{y}(\cos x - i \operatorname{sen} x).$$

Haciendo $y = 0$ y sumando o restando, según convenga, se obtiene, respectivamente,

$$\operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \qquad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}. \tag{2.4}$$

Estas fórmulas de variable real nos sugieren las definiciones

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \tag{2.5}$$

para z complejo. Puesto que e^{iz} y e^{-iz} son funciones enteras, lo mismo puede decirse de $\operatorname{sen} z$ y $\cos z$ y de hecho, se deduce de (2.5) que

$$(\operatorname{sen} z)' = \cos z, \qquad (\cos z)' = -\operatorname{sen} z. \tag{2.6}$$

También se deduce de (2.5) que

$$\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1, \qquad \operatorname{sen} 2z = 2 \operatorname{sen} z \cos z,$$

así como la posibilidad de extender otras fórmulas trigonométricas familiares al plano complejo. Las demostraciones no requieren sino el álgebra de los números complejos y la fórmula (2.3), y se discuten en los problemas del final de esta sección.

En lugar de efectuar aquí esos cálculos, mencionaremos un método mucho más eficaz que se deduce de un teorema general de Análisis de variable compleja. Este teorema afirma que si dos funciones enteras coinciden sobre un segmento del eje real, por pequeño que éste sea, entonces *coinciden sobre todo el plano complejo.* Supongamos por ejemplo, que se desea demostrar la fórmula de adición

$$\operatorname{sen}(z_1 + z_2) = \operatorname{sen} z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \operatorname{sen} z_2.$$

Como ya se sabe del Análisis real, este resultado es válido cuando z_1 y z_2 sean ambos reales. Ahora bien, para todo valor real dado z_1 los dos miembros son funciones enteras de z_2, y el teorema mencionado antes permite asegurar que la igualdad es válida para todos los valores complejos de z_2. Demos ahora cualquier valor complejo a z_2. Como la igualdad es válida cuando z_1 es real, y como ambos miembros son funciones enteras de z_1 se concluye que la igualdad es válida también para todos los valores complejos de z_1.

Este tipo de razonamientos, convenientemente refinados y generalizados nos conduciría al estudio de una rama del Análisis de variable compleja que se conoce con el nombre de teoría de la *prolongación analítica.* La discusión que antecede no puede considerarse completa, porque el teorema en el que se basa ha de ser pospuesto hasta la Sección 7 del Capítulo 3; sirve, sin embargo, para demostrar la potencia de los métodos de variable compleja.

De la misma forma que en el Análisis de variable real, se definen las funciones hiperbólicas mediante las expresiones

$$\operatorname{senh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \qquad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

Al compararlas con las (2.5) observamos que

$$\operatorname{senh} z = -i \operatorname{sen} iz, \qquad \cosh z = \cos iz \tag{2.7}$$

Por consiguiente, toda identidad trigonométrica da lugar a una identidad para las funciones hiperbólicas y recíprocamente. La analogía entre las funciones hiperbólicas y las trigonométricas se hace todavía más manifiesta definiendo

$$\tanh z = \frac{\operatorname{senh} z}{\cosh z}, \quad \coth z = \frac{\cosh z}{\operatorname{senh} z}, \quad \operatorname{sech} z = \frac{1}{\cosh z}, \quad \operatorname{csch} z = \frac{1}{\operatorname{senh} z},$$

que se corresponden con las definiciones

$$\tan z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}, \qquad \cot z = \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z}, \qquad \sec z = \frac{1}{\cos z}, \qquad \operatorname{cosec} z = \frac{1}{\operatorname{sen} z}.$$

Ninguna de estas ocho funciones es entera, pues todas ellas son discontinuas en los puntos de anulación de sus denominadores.

Como ocurre en el Análisis real, una función que verifica $f(-z)=f(z)$ para todo z de su región de definición se dice que es par, mientras que una función que verifica $f(-z) = -f(z)$ se llama impar. Como es evidente, las funciones cos y cosh son pares; las funciones sen y senh son impares.

A pesar de que las fórmulas anteriores tienen la misma estructura algebraica que las del caso real, al considerar su comportamiento analítico pueden apreciarse importantes diferencias. Por ejemplo, para todo x real, es $|\operatorname{sen} x| \leqslant 1$ pero en cambio, (2.5) da

$$|\operatorname{sen} iy| = |\operatorname{senh} y|, \qquad -\infty < y < \infty.$$

Por consiguiente, $|\operatorname{sen} iy|$ es casi tan grande como $e^{|y|}/2$. Análogamente, e^x toma valores grandes para valores grandes de x, pero en cambio, en virtud de (2.1),

$$|e^{iy}| = 1, \qquad -\infty < y < \infty.$$

Una de las diferencias más importantes entre la función exponencial de variable real y la de variable compleja es que en este último caso la función e^z es periódica. Se dice, en general, que una función $f(z)$ es *periódica* si se verifica que $f(z + \omega) = f(z)$ para una constante no nula ω y para todo valor de z perteneciente a la región de definición de f. Cualquier constante ω que tenga esta propiedad es un *periodo* de f. Como

$$e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \operatorname{sen} 2\pi = 1,$$

la fórmula (2.3) da

$$e^{z+2\pi i} = e^z$$

y por consiguiente, el número $2\pi i$ es un período complejo de e^z. Se comprueba también sin dificultad que cualquier otro periodo de e^z debe ser múltiplo entero de $2\pi i$. En efecto, $e^{z+\omega} = e^z$ implica $e^\omega = 1$, y recíprocamente. Haciendo $\omega = a + ib$ se tiene en virtud de (2.1),

$$e^a(\cos b + i \operatorname{sen} b) = 1.$$

Tomando el valor absoluto de cada miembro de esta ecuación, se obtiene $e^a = 1$ y por consiguiente $a = 0$, puesto que a es real. Se deduce de $\cos b = 1$ y $\operatorname{sen} b = 0$ que $b = 2\pi k$ en la que k es un número entero. De aquí, $\omega = 2\pi k$.

El hecho de que e^z sea periódica se refleja en interesantes propiedades de la transformación definida por $w = e^z$. Si $z = x + iy$, la ecuación $w = e^z$ toma la forma

$$w = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$$

en virtud de (2.1). Comparándola con la forma polar de w dada en la Sección 3 del Capítulo 1, vemos que

$$|w| = e^x, \qquad \arg w = y + 2\pi k.$$

Resulta conveniente considerar la elección de $\arg w = y$ correspondiente a $k = 0$ e imponer además la restricción de que $-\pi < y \leq \pi$. Por lo tanto, $\operatorname{Arg} w = y$. La restricción $-\pi < y \leq \pi$ indica que z está en la banda horizontal de la Figura 2.1, la cual contiene a su borde superior, pero no al inferior. La limitación $-\pi < \operatorname{Arg} w \leq \pi$ se puede indicar en el plano w cortándolo a lo largo del semieje real negativo, es decir, según $v = 0$, $u < 0$. El borde superior de este corte, que corresponde a $\operatorname{Arg} w = \pi$, se considera como perteneciente al plano cortado, pero el borde inferior de este corte, que corresponde a $w = -\pi$, no se considera contenido en el plano cortado. Se excluyen también los puntos $w = 0$ y $w = \infty$.

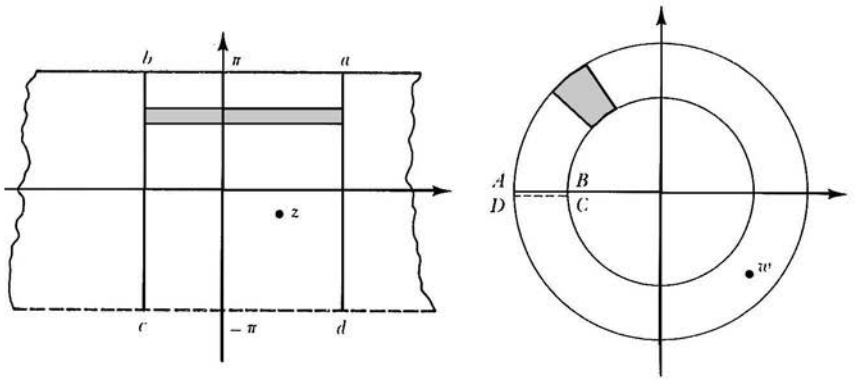


Figura 2-1

En estas condiciones, la recta horizontal $y = y_0, -\infty < x < \infty$, del plano z se transforma en el rayo $\text{Arg } w = y_0, 0 < |w| < \infty$, del plano w; la imagen del segmento vertical $x = x_0, -\pi < y \leqslant \pi$, en el plano z es la circunferencia $|w| = e^{x_0}, -\pi < \arg w < \pi$, del plano w. Cuando $x_0 \to -\infty$ el radio de la circunferencia del plano w tiende hacia cero; conforme x_0 crece hacia $+\infty$, el radio de la circunferencia va creciendo también hacia $+\infty$. El rectángulo del plano z que se muestra en la Figura 2.1 se transforma en el anillo, cortado a lo largo del semieje real negativo, del plano w. Los puntos a, b, c y d tienen por imágenes los puntos A, B, C y D. Las coordenadas polares ρ, ϕ del plano w están dadas por $\rho = |w|, \phi = \arg w$. La banda $-\infty < x < \infty, -\pi < y \leq \pi$, se transforma en el plano w

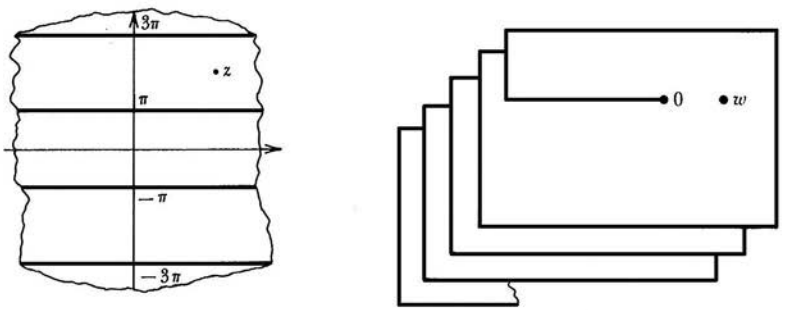


Figura 2-2

cortado a lo largo del semieje real negativo, $0<\rho<\infty$, $-\pi<\phi\leq\pi$. La aplicación $|w|=e^x$, Arg $w=y$, $-\infty<x<\infty$, $-\pi<y\leq\pi$, es uno-a-uno, esto es, cada punto z de la banda tiene una única imagen en el plano w cortado a lo largo del semieje negativo, y recíprocamente. Una región del plano w que se aplica mediante la función $w=f(z)$, biunívocamente sobre todo el plano ω (que puede, sin embargo, tener cortes) se denomina *región fundamental* de f. Por consiguiente, la banda $-\infty<x<\infty$, $-\pi<y\leq\pi$, es una región fundamental de e^z.

Debido a la periodicidad de e^z, las propiedades de la transformación en cada una de las otras bandas horizontales de la figura son las mismas que las que posee en la banda central. Así, las bandas

$$-\infty<x<\infty, \qquad (2n-1)\pi<y\leq(2n+1)\pi \quad (n=0,\pm1,\pm2,\ldots)$$

son también regiones fundamentales de e^z, y $w=e^z$ aplica la n-ésima banda biunívocamente sobre el plano cortado $0<|w|<\infty$, $(2n-1)\pi<\arg w\leq(2n+1)\pi$.

Si se apilaran uno sobre otro los planos cortados, como si se tratara de las hojas de un libro, la aplicación $w=e^z$ sería una correspondencia biunívoca entre todo el plano z y el mazo de planos cortados w. Como se verá en la sección 4, es posible conectar entre sí los diferentes planos cortados uniendo un borde del corte de cada uno de ellos con otro borde del corte de un plano adyacente. La superficie resultante tendrá una estructura helicoidal, parecida a la de una escalera de caracol, y se llama superficie de Riemann de e^z, véase la Figura 2.2.

Ejemplo 2.1 Demostrar que los únicos ceros de la función sen z son los $n\pi$, donde n es un número entero. Haciendo $z=y$ en (2.7) se tiene

$$\operatorname{sen} iy = i\operatorname{senh} y, \qquad \cos iy = \cosh y$$

y así de la fórmula que da $\operatorname{sen}(z_1+z_2)$ se deduce

$$\operatorname{sen}(x+iy) = \operatorname{sen} x\cosh y + i\cos x\operatorname{senh} y. \tag{2.8}$$

El resultado es cero si y solamente si se anulan las partes real e imaginaria de esta expresión. Como $\cosh y\geq 1$, la parte real se anula solamente cuando $\operatorname{sen} x=0$, es decir, si $x=n\pi$. En este caso, $\cos x=\pm 1$, y por consiguiente, la parte imaginaria se anulará tan sólo cuando $\operatorname{senh} y=0$. Esta última condición implica $y=0$ lo cual completa la demostración.

Ejemplo 2.2. Discutir desde el punto de vista geométrico la función $z=\operatorname{sen} w$. Aplicando (2.8) a sen w en vez de a sen z, se ve que $z=\operatorname{sen} w$ da

$$x = \operatorname{sen} u\cosh v, \qquad y = \cos u\operatorname{senh} v. \tag{2.9}$$

De (2.9) se deduce que

$$\frac{x^2}{\cosh^2 v} + \frac{y^2}{\operatorname{senh}^2 v} = 1 \tag{2.10}$$

$$\frac{x^2}{\operatorname{sen}^2 u} - \frac{y^2}{\cos^2 u} = 1. \tag{2.11}$$

Estas ecuaciones indican que las rectas $v = v_0$ del plano w se transforman en las elipses (2.10) del plano z y que las rectas $u = u_0$ del plano w se transforman en las hipérbolas (2.11) del plano z. De manera más precisa: se deduce de (2.9) que la imagen del segmento rectilíneo $v = v_0 > 0$, $-\frac{1}{2}\pi < u \leq \frac{1}{2}\pi$, del plano w es la mitad superior de una elipse del plano z cuyo semieje mayor es $\cos v_0$ y cuyo semieje menor es $\operatorname{senh} v_0$ y cuyos focos se encuentran en los puntos $z = \pm 1$. La imagen del segmento rectilíneo $v = -v_0$, $-\frac{1}{2}\pi \leq u < \frac{1}{2}\pi$, es la mitad inferior de esa misma elipse. Conforme se va haciendo crecer a v_0 desde $+0$ hasta $+\infty$ las semielipses se van expandiendo y acaban por llenar la mitad superior del plano z. Se deduce de (2.9) que la imagen de la recta vertical $u = u_0$, $-\infty < v < \infty$ para u_0 fijo, $-\frac{1}{2}\pi < u_0 < \frac{1}{2}\pi$, es la rama derecha de una hipérbola si $u_0 > 0$ y la rama izquierda de esa hipérbola si $u_0 < 0$. Como resulta de (2.11), sus focos se encuentran también en $z = \pm 1$.

Se comprueba con facilidad que el sistema anterior de semielipses y semihipérbolas forma un *sistema ortogonal de coordenadas curvilíneas* (formado por elipses e hipérbolas homofocales) en el plano z con dos cortes en el eje real determinados por $-\infty < x \leq -1$ y $1 \leq x < \infty$. Cada punto del plano z cortado de esta forma es imagen de un único punto de la banda $|u| < \frac{1}{2}\pi, -\infty < v < \infty$, del plano w. Por lo tanto, esta banda de anchura π es una región fundamental en el plano w de la función sen w (Figura 2.3).

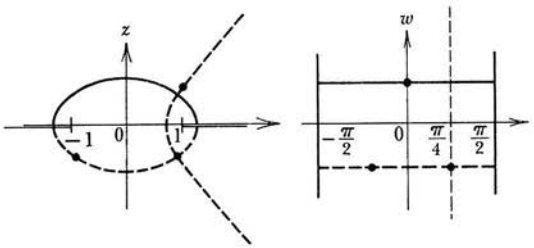


Figura 2-3

Problemas

1. Hallar las partes real e imaginaria de $\cosh \pi i$, e^i, $\operatorname{sen} i\pi$, $\operatorname{senh}(1 + i)$.
2. Aplicando $f'(0) = \lim [f(z) - f(0)]/z$, demostrar que para $z \to 0$

$$\lim \frac{e^z - 1}{z} = 1, \qquad \lim \frac{\operatorname{sen} z}{z} = 1, \qquad \lim \frac{\cos z - 1}{z} = 0.$$

3. (a) Demostrar que $z = e^{i\theta}$, $0 \leq \theta < 2\pi$, representa la circunferencia unidad recorrida una sola vez.
   (b) Siendo constantes z_0 y $R > 0$, ¿qué representa la expresión $z = z_0 + Re^{i\theta}$ para $0 \leq \theta < 2\pi$?
4. Demostrar usando exponenciales que $\cos 2z = \cos^2 z - \operatorname{sen}^2 z$.
5. Demostrar que la función $f(z) = e^z$ verifica $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$, y deducir de aquí resultados parecidos para $\operatorname{senh} z$, $\cosh z$, $\tanh z$, $\operatorname{sen} z$, $\cos z$, $\tan z$.
6. Demostrar apoyándose en (2.5) que la igualdad $e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z$ sigue siendo válida cuando z es complejo.
7. Aplicando el Problema 6 y el teorema de adición de e^z, obtener

$$\cos(z_1 + z_2) + i \operatorname{sen}(z_1 + z_2) = (\cos z_1 + i \operatorname{sen} z_1)(\cos z_2 + i \operatorname{sen} z_2).$$

   Cambiando el signo de z_1 y de z_2, obtener también

$$\cos(z_1 + z_2) - i \operatorname{sen}(z_1 + z_2) = (\cos z_1 - i \operatorname{sen} z_1)(\cos z_2 - i \operatorname{sen} z_2).$$

   Efectuar los productos de los segundos miembros y sumar o restar, según convenga, estas dos igualdades a fin de obtener la fórmula de $\operatorname{sen}(z_1 + z_2)$ dada en el texto. Obtener también

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \operatorname{sen} z_1 \operatorname{sen} z_2.$$

8. Demostrar que $\cos(x + iy) = \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$. (Véase el Problema 7.)
9. Demostrar $|\cos z|^2 = \cosh^2 y - \operatorname{sen}^2 x$, $\quad |\operatorname{sen} z|^2 = \cosh^2 y - \cos^2 x$.
10. Determinar, (a) todos los ceros y (b) todos los periodos de:

$$\cos z, \qquad \operatorname{senh} z, \qquad \cosh z, \qquad \tan z, \qquad \tanh z.$$

11. Demostrar que $(\tan z)' = \sec^2 z$ excepto para $z = (k + \frac{1}{2})\pi$, obtener un resultado análogo para $\tanh z$.
12. Obtener una fórmula para $\tan z$ utilizando $\tan z = (\operatorname{sen} z)/(\cos z)$ y las definiciones (2.5). Multiplicando el numerador y el denominador por el conjugado del denominador, demostrar que

$$\tan z = \frac{\operatorname{sen} 2x + i \operatorname{senh} 2y}{\cos 2x + \cosh 2y}.$$

13. Demostrar que $2\sqrt{2} \exp(\pi i/12) = (\sqrt{3} + 1) + i(\sqrt{3} - 1)$. (Aplicar que $\frac{1}{12} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$.)
14. Hallar todos los valores de z para los cuales $e^z = i$, $e^z = 1 + i\sqrt{3}$, $\operatorname{sen} z = 2$, $\cos^2 z = -1$.
15. Demostrar que la imagen de la recta $z = (1 + i)t$, $-\infty < t < \infty$ en la transformación $w = e^z$ es una espiral logarítmica, y representarla gráficamente. (Hágase $w = re^{i\theta}$ y observar que la coordenada polar θ puede identificarse con t.)

16. Representar gráficamente las siguientes funciones de variable real e^x, senh x, cosh x. Representar también la imagen de los siguientes conjuntos de puntos del plano z, (a) en la transformación $w = e^z$ y (b) en la $w = \text{senh } z$:

$$0 < x < 2, \quad y = \frac{\pi}{2}; \qquad x = 1, \quad |y| < \frac{\pi}{2}; \qquad x < 0, \quad \frac{\pi}{3} < y < \pi.$$

3. Las funciones logarítmica y potencial. Tomando $r = |z| > 0$ y cualquier valor de $\theta = \arg z$ la representación polar que se introdujo en el Capítulo 1 es

$$z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta).$$

En virtud de resultados de la última sección, esta igualdad puede escribirse

$$z = re^{i\theta} \qquad (z \neq 0). \quad (3.1)$$

Si las conocidas propiedades $\log ab = \log a + \log b$ y $\log e^a = a$ del logaritmo real de los números positivos pudieran extenderse a los valores complejos de las variables, la igualdad (3.1) sugiere que al menos un valor de $\log z$ debería ser

$$\log z = \log r + i\theta. \quad (3.2)$$

Pueden existir, sin embargo otros valores, pues θ solamente está determinada salvo un múltiplo entero de 2π.

A fin de estudiar la expresión (3.2), definamos $w = \log z$ de manera que sea $e^w = z$. Escribiendo $w = u + iv$ y expresando z en forma polar, la ecuación $e^w = z$ se convierte en

$$e^u e^{iv} = re^{i\theta}.$$

Igualando los valores absolutos de ambos miembros obtenemos $e^u = r$, de donde $u = \text{Log } r$ en la cual se usa la letra mayúscula para denotar el logaritmo en el sentido ordinario de variable real. Los dos miembros de esta expresión pueden simplificarse suprimiendo e^u y r, con lo que se obtiene $e^{iv} = e^{i\theta}$ y por tanto, en virtud de la periodicidad de la función exponencial, que se estableció en la sección anterior, $v = \theta \bmod 2\pi$. Así pues todos los valores de $\log z$ están dados por

$$\log z = \text{Log } |z| + i \arg z \quad (3.3)$$

igualdad que en esencia concuerda con la (3.2). Tanto Log $|z|$ como $\arg z$ carecen de sentido cuando $z = 0$, por lo que el número 0 no tiene logaritmo; lo que está de acuerdo con el hecho de que e^w nunca se anula.

Como $\arg z$ tiene infinitos valores lo mismo puede decirse de $\log z$. Los distintos valores de $\arg z$ difieren entre sí en $2\pi k, k$ entero, y por lo tanto los valores de $\log z$ difieren entre sí en $2\pi ik$. Con la notación de la Sección 3 del Capítulo 1,

$$\log z = \operatorname{Log}|z| + i \operatorname{Arg} z + 2\pi i k,$$

o, lo que es igual, $\log z = \operatorname{Log}|z| + i \operatorname{Arg} z \bmod 2\pi i$. Las propiedades familiares del logaritmo de variable real continúan siendo válidas, pero su expresión se complica debido a que $\log z$ tiene infinitos valores posibles. Así, por ejemplo, cuando $z \neq 0$

$$e^{\log z} = z \qquad \text{pero en cambio,} \qquad \log e^z = z + 2\pi i k.$$

Aplicando la primera de estas igualdades con $z = \alpha, \beta$ y $\alpha\beta$, siendo $\alpha\beta \neq 0$, se obtiene

$$e^{\log(\alpha\beta)} = \alpha\beta = e^{\log\alpha} e^{\log\beta} = e^{\log\alpha + \log\beta}$$

y de aquí

$$\log \alpha\beta = \log\alpha + \log\beta + 2\pi i k.$$

El hecho de que sea necesario un múltiplo de $2\pi i$ para que la igualdad anterior pueda ser válida se comprueba en el ejemplo $1 = (-1)(-1)$, donde podemos tomar $\log 1 = 0$ y[1] $\log(-1) + \log(-1) = \pi i + \pi i \neq 0$.

Si α es complejo y $z \neq 0$, tomaremos por definición

$$z^\alpha = e^{\alpha \log z} = e^{\alpha(\operatorname{Log}|z| + i \arg z)} = e^{\alpha \operatorname{Log}|z|} e^{i\alpha \arg z}. \tag{3.4}$$

Por ejemplo, puesto que $\log 2 = \operatorname{Log} 2 + 2\pi i k$, tenemos

$$2^i = e^{i \log 2} = e^{i \operatorname{Log} 2} e^{-2\pi k}, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

Existe una infinidad de valores de 2^i, entre los que se encuentran valores de módulo arbitrariamente grande y arbitrariamente pequeño.

Cuando α sea real $\alpha \operatorname{Log}|z| = \operatorname{Log}|z|^\alpha$ en virtud de fórmulas del Análisis real, y la definición (3.4) se reduce a

$$z^\alpha = |z|^\alpha e^{i\alpha \arg z} = |z|^\alpha [\cos(\alpha \arg z) + i \operatorname{sen}(\alpha \arg z)].$$

Cuando $\alpha = p/q$ además de real sea racional, el resultado correspondiente a la definición anterior coincide con los resultados del Capítulo 1, Sección 3, como debía suceder. Todas las igualdades precedentes deben entenderse en el sentido de que el conjunto de números dado por uno de los miembros de la ecuación es el mismo que el dado por el otro. Solamente en el caso de que α sea un número entero se reducen estas igualdades entre conjuntos a verdaderas igualdades entre dos números.

La expresión $\log z$ tiene infinitos valores y constituye un ejemplo de *función multiforme*. No podemos ahora prescindir de ninguna de las dos palabras de esta frase; la

[1] Dado que $e^{i\pi} = \cos\pi + i \operatorname{sen}\pi = -1$, un logaritmo de -1 es $i\pi$.

palabra "función" sin calificativos se usa siempre en el sentido del Capítulo 1. Las funciones, entendidas en el sentido del Capítulo 1, se llaman a veces funciones uniformes o unívocas, pero esto solamente se hace para subrayar su carácter.

Puesto que las igualdades entre funciones multiformes pueden interpretarse fácilmente como igualdades entre conjuntos, tal vez se esperara interpretar con la misma facilidad las operaciones con funciones multiformes; sin embargo esto no es así. Por ejemplo, conviniendo en que $\sqrt{z}$ sea una función biforme cuando $z \neq 0$, incluso una identidad tan sencilla como

$$\sqrt{1} + \sqrt{1} = 2\sqrt{1}$$

deja inmediatamente de ser cierta. El primer miembro tiene *tres* valores -2, 0 y 2, mientras que el segundo solamente toma *dos*, -2 y 2. El estudio analítico de las funciones multiformes exige, por lo general, representar la función multiforme por medio de funciones uniformes.

Uno de los posibles modos consiste en limitarse a considerar la función multiforme en una cierta región del plano, asociando a cada punto de esa región uno de los valores de la función, hecho de forma que la función que resulte sea uniforme y continua. Una función continua obtenida por este procedimiento a partir de una función multiforme se denomina *rama* de la función multiforme considerada.

Por ejemplo, es posible representar el logaritmo mediante funciones uniformes utilizando Arg z en lugar de arg z. La restricción de $\theta = \text{Arg } z$ a $-\pi < \theta \leq \pi$ puede ponerse de manifiesto cortando el plano z a lo largo del semieje real negativo, es decir, según $y = 0, x < 0$. En la sección siguiente a ésta el borde superior del corte, que corresponde a $\theta = \pi$, se considera contenido en el plano cortado del modo anterior, mientras que el borde inferior, que corresponde a $\theta = -\pi$, no se considera incluido en él. Sin embargo, para el problema que ahora nos ocupa resulta más interesante considerar una región abierta del plano z, por lo cual suprimiremos completamente todo el semieje real negativo, y también los puntos 0 e ∞. La porción del plano resultante es así una región abierta, que denotaremos por P_c (ver la Figura 3-1).

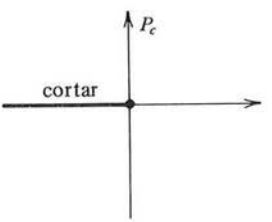


Figura 3-1

Como se demostrará a continuación, la función Log z, definida por

$$\operatorname{Log} z = \operatorname{Log} |z| + i \operatorname{Arg} z \tag{3.5}$$

es analítica en P_c. Por lo que con seguridad, será continua en dicha región, y por lo tanto constituye una rama de log z en el sentido explicado más arriba.

Para terminar este programa es necesario estudiar Arg z en función de la variable compleja z. Como sugiere la gráfica de tan θ, y como recordará el lector del Análisis real, la ecuación tan $\theta = t$, con t real tiene una única solución θ en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$. Esta solución se denota por arctan t y verifica

$$\frac{d}{dt} \arctan t = \frac{1}{1 + t^2} \qquad -\infty < t < \infty. \tag{3.6}$$

Definiremos $\theta = \operatorname{Arg} z$ en los semiplanos $y < 0$, $x > 0$ y $y > 0$ de P_c mediante las fórmulas

$$\theta = -\arctan \frac{x}{y} - \frac{\pi}{2}, \quad \theta = \arctan \frac{y}{x}, \quad \theta = -\arctan \frac{x}{y} + \frac{\pi}{2}, \tag{3.7}$$

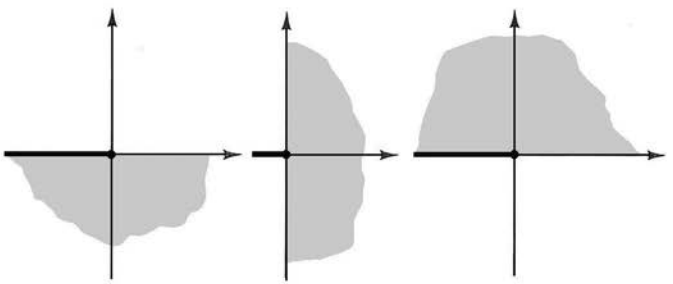


Figura 3-2

respectivamente. Las regiones $x > 0$ y $y > 0$ se solapan en el primer cuadrante, y las $x > 0$ y $y < 0$ lo hacen en el cuarto. (Figura 3-2). Sin embargo, las definiciones anteriores son coherentes en las regiones donde hay solapamiento, como se demuestra en el Problema 6 de la Sección 4, o como puede comprobarse gráficamente.

Nos serviremos ahora de las fórmulas (3.7) para establecer la analiticidad de Log z. Escribiendo Log $z = u + iv$, por la definición (3.5) se tiene $u = \frac{1}{2} \operatorname{Log}(x^2 + y^2)$ y de aquí

$$u_x = \frac{x}{x^2 + y^2}, \qquad u_y = \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Mediante (3.5) se observa también que $v = \operatorname{Arg} z = \theta$, y como se deduce de (3.6), cada una de las expresiones (3.7) da

$$v_x = -\frac{y}{x^2+y^2}, \qquad v_y = \frac{x}{x^2+y^2}$$

Por consiguiente, se cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann, y el Teorema 1.1 pone de manifiesto que Log$z$ es analítica en P_c. Como

$$u_x + iv_x = \frac{x - iy}{x^2+y^2} = \frac{1}{x+iy},$$

de (1.6) resulta la fórmula

$$\frac{d}{dz}\operatorname{Log} z = \frac{1}{z}, \qquad z \text{ en } P_c. \quad (3.8)$$

La función Log z antes considerada se denomina *rama principal* del logaritmo. Cualquier otra rama definida sobre todo el plano con el corte, viene dada por

$$\operatorname{Log}_n z = \operatorname{Log} z + 2\pi i n$$

siendo n un número entero. En lugar de la notación $\operatorname{Log}_n z$, puede escribirse sencillamente log z especificando con claridad la rama que se haya elegido.

Evidentemente, podrían obtenerse funciones más complicadas utilizando la fórmula anterior con un valor de n en una parte del plano y otro valor de n en el resto. Sin embargo una tal función no sería una rama, por no ser continua. Puesto que $2\pi i n$ es constante, cada una de las ramas $\operatorname{Log}_n z$ verifica la relación fundamental (3.8). Resulta natural preguntarse si será posible conectar entre sí las diferentes ramas de modo que den una sola función que pueda por derecho propio llamarse log z y satisfaga (3.8). En la sección siguiente se muestra que dicha construcción es posible y que conduce a la noción de superficie de Riemann.

Ejemplo 3.1. La rama principal de z^α se obtiene tomando Log z en la igualdad $z^\alpha = \exp(\alpha \log z)$, sus otras ramas se obtienen considerando las restantes de log z. Demostrar que cada rama verifica

$$\frac{d}{dz} z^\alpha = \alpha z^\alpha \frac{1}{z} \quad (3.9)$$

en el plano con el corte. Si se sobreentiende que en los dos miembros de esta expresión se toma la misma rama de z^α el segundo miembro puede ponerse en la forma $\alpha z^{\alpha-1}$. Por la regla de la cadena

$$(z^\alpha)' = e^{\alpha \log z}(\alpha \log z)'$$

y puesto que $\log z = \operatorname{Log} z + \text{const}$, el resultado se sigue de (3.8).

Cuando z es real y negativo el resultado anterior no es válido en la forma expuesta, pues z está precisamente en el corte usado en la definición de Log z. Sin embargo, podría restablecerse el resultado para tales puntos z sin más que desplazar el corte. En lugar de definir Log z en el plano cortado a lo largo de la semirrecta $x < 0$, $y = 0$, se podría sin dificultad definir Log z cortando el plano a lo largo de la semirrecta $x > 0, y = 0$. En este caso la fórmula (3.9) sería válida sobre el semieje real negativo y dejaría de serlo sobre el positivo.

Observaciones parecidas son aplicables en general. Si z se da de antemano, lo más corriente es introducir cortes que no pasen por z y así obtener ramas univalentes de la función considerada en un entorno de z. Por esto se dice a veces, que una rama está determinada *localmente,* para subrayar el hecho de que los resultados que se obtengan pueden ser ciertos tan sólo en las proximidades de z y dejar de serlo para puntos alejados.

En la sección siguiente se definirán *globalmente* las funciones $\log z$ y z^α, de tal manera que la igualdad (3.9) sea válida con la única condición de que sea $z \neq 0$, $z \neq \infty$.

Ejemplo 3.2 La expresión $w = \operatorname{arcsen} z$ significa que $z = \operatorname{sen} w$. Demostrar que todos los valores de arcsen z están dados por

$$\operatorname{arcsen} z = -i \log[iz + (1 - z^2)^{1/2}]. \tag{3.10}$$

Se deduce de $z = \operatorname{sen} w$ que $2iz = e^{iw} - e^{-iw}$ o, multiplicando por e^{iw}, que

$$e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0.$$

Resolviendo respecto de e^{iw} esta ecuación de segundo grado y tomando el logaritmo de la solución se obtiene el resultado pedido. La raíz cuadrada tiene, como siempre, dos valores, pero como para cualquier elección que se haga se tiene

$$[iz + (1 - z^2)^{1/2}][iz - (1 - z^2)^{1/2}] = -1. \tag{3.11}$$

Ningún corchete es nulo, y por lo tanto, la expresión (3.10) está bien definida para todo z. El hecho de que cada valor de w satisface $\operatorname{sen} w = z$ se comprueba sin dificultad teniendo en cuenta[2] que $\exp(\log \alpha) = \alpha$, $\alpha \neq 0$.

La ecuación (3.11) muestra que para cada elección que se haga de $(1 - z^2)^{1/2}$ es posible tomar los valores de los logaritmos de modo que

$$-i \log[iz + (1 - z^2)^{1/2}] - i \log[iz - (1 - z^2)^{1/2}] = \pi.$$

[2] Como en el análisis real, se utiliza en ocasiones la notación $\exp z \equiv e^z$ por razones tipográficas.

Así, si w es un valor de arcsen z, otro valor viene dado por $\pi - w$. Este resultado corresponde a la conocida relación $\operatorname{sen}(\pi - w) = \operatorname{sen} w$. Como el logaritmo está determinado salvo múltiplos de $2\pi i$, se deduce también de (3.10) que $w + 2n\pi$ es un valor de arcsen z cuando lo es w, siendo n un entero. Este hecho expresa la periodicidad de sen w. Puesto que la fórmula (3.10) da todas las soluciones de sen $w = z$, estos dos casos agotan los valores de arcsen z.

Ejemplo 3.3. Siendo $z \neq 1$ y $z \neq -1$, demostrar que toda rama de arcsen z verifica localmente

$$\frac{d}{dz} \operatorname{arcsen} z = \frac{1}{(1 - z^2)^{1/2}} \tag{3.12}$$

La raíz cuadrada del segundo miembro debe ser la misma que la que se considera en arcsen z. Puesto que $z^2 \neq 1$, se puede determinar localmente una rama de arcsen z eligiendo en primer lugar una de las raíces cuadradas y a continuación una de las ramas del logaritmo. Si $\zeta = 1 - z^2 \neq 0$, entonces

$$\operatorname{arcsen} z = -i \log(iz + \zeta^{1/2}).$$

Es posible derivar $\zeta^{1/2}$ según el Ejemplo 3.1 y la regla de la cadena. En virtud de (3.11) el término $iz + \zeta^{1/2}$ no se anula, y la regla de la cadena da

$$\frac{d}{dz} \operatorname{arcsen} z = \frac{-i}{iz + (1 - z^2)^{1/2}} \left[i + \frac{1}{2} \frac{-2z}{(1 - z^2)^{1/2}} \right].$$

expresión que puede simplificarse hasta dar (3.12).

Problemas

1. Si $\alpha \neq 0$, existe una infinidad de funciones $\alpha^z = e^{z \log \alpha}$, una para cada determinación de $\log \alpha$. Demostrar que cada una de estas funciones verifica

$$\frac{d}{dz} \alpha^z = \alpha^z \log \alpha$$

cuando se usa en los dos miembros la misma rama de $\log \alpha$.

2. A partir de $\operatorname{Arg} i = \pi/2$ obtener $\operatorname{Log} i = \operatorname{Log} 1 + i\pi/2$ y en consecuencia

$$i^i = e^{i \log i} = e^{i(\operatorname{Log} i + 2\pi i k)} = e^{-(4k+1)\pi/2}, \qquad k = 0, \pm 1, \ldots.$$

Dibujar en el plano complejo los valores de i^i.

3. (a) Calcular todos los valores de

(b) representarlos en el plano complejo.

$$\log(-i), \quad \log(1+i), \quad 3\log(1+i\sqrt{3}), \quad \log(1+i\sqrt{3})^3, \quad \log(1+i)^{\pi i},$$
$$(-i)^{-i}, \quad i^2, \quad 3^{\pi}, \quad 2^{\pi i}, \quad (1+i)^{1+i}, \quad (1+i)^i(1+i)^{-i}.$$

4. Hallar todas las soluciones de las ecuaciones siguientes:

$$\operatorname{Log} z = \tfrac{1}{4}\pi i, \quad e^z = i, \quad \operatorname{sen} z = i, \quad \cos z = \operatorname{sen} z, \quad \tan^2 z = -1.$$

5. (a) Explicar por qué $\log z^{\alpha} = \alpha \log z + 2\pi i k$. (b) Si $\alpha\beta \neq 0$, resolver $z^{\alpha} = \beta$ y $\alpha^z = \beta$.
6. Si $w = \arg \operatorname{senh} z$ significa que $z = \operatorname{senh} w$, obtener la fórmula

$$\arg \operatorname{senh} z = \log[z + (z^2+1)^{1/2}]$$

utilizando para ello el procedimiento y el resultado del Ejemplo 3.2. (Se usa que $\operatorname{sen} iw = i \operatorname{senh} w$.)

7. Imitando el modelo del Ejemplo 3.2, obtener las fórmulas

$$\arccos z = -i\log[z + (z^2-1)^{1/2}], \qquad \arctan z = \frac{i}{2}\log\frac{i+z}{i-z}$$

$$\arg\cosh z = \log[z + (z^2-1)^{1/2}], \qquad \arg\tanh z = \frac{1}{2}\log\frac{1+z}{1-z}.$$

8. Obtener las siguientes fórmulas locales, válidas para cualquier rama definida en un entorno del punto z:

$$\frac{d}{dz}\arg\tanh z = \frac{1}{1+z^2}, \qquad \frac{d}{dz}\arg\operatorname{senh} z = \frac{1}{(1+z^2)^{1/2}}.$$

9. Siendo $z = x + iy = re^{i\theta}$, calcular todos los valores de las siguientes expresiones

$$\operatorname{Re} z^i, \quad \operatorname{Im} z^i, \quad |z^i|, \quad \operatorname{Re} i^z, \quad \operatorname{Im} i^z, \quad |i^z|, \quad \operatorname{Re} z^z, \quad \operatorname{Im} z^z, \quad |z^z|.$$

10. ¿En qué sentido puede afirmarse que $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^{\beta}\alpha^{\gamma}$? ¿Qué puede decirse respecto de $(\alpha^{\beta})^{\gamma} = \alpha^{\beta\gamma}$?

***4. La superficie de Riemann de log z.** En general, cada rama de una función multiforme está definida en una cierta región del plano z. Cuando las regiones correspondientes a ramas diferentes no se solapan no hay dificultad en asignarle a cada punto del plano el valor correspondiente; pero cuando las distintas regiones se solapan es preciso dar un criterio que permita reconocer si un punto que se halle en la parte común de dos regiones ha de considerarse perteneciente a una u otra. Una manera de hacer esto es considerar que las regiones se encuentran en planos diferentes, apilados unos sobre otros. Esto es equivalente a imaginar que la variable no es z sino (z,n), donde el entero n indica el plano en el que está la z. Cada plano se denomina *hoja* de la superficie.

Es una trivialidad el que las funciones multiformes de z que se encuentran ordinariamente en el Análisis, puedan convertirse en funciones uniformes de (z, n) por este procedimiento. Sin embargo, es menos trivial que sea posible unir en general, las diferentes regiones contenidas en los distintos planos de tal manera que se obtenga una única región de definición conexa en el sentido del Capítulo 1. Esta es la cuestión que discutiremos ahora.

Para dejar bien clara la idea que ha de guiarnos, estudiemos la función multiforme arg z en una región que rodee al origen sin contenerlo, como se muestra en la Figura 4.1.

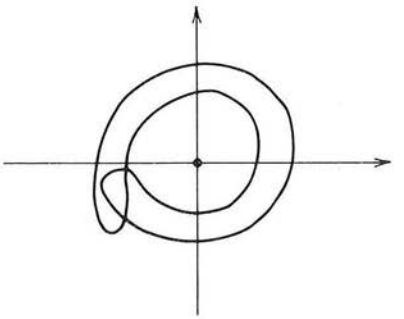


Figura 4-1

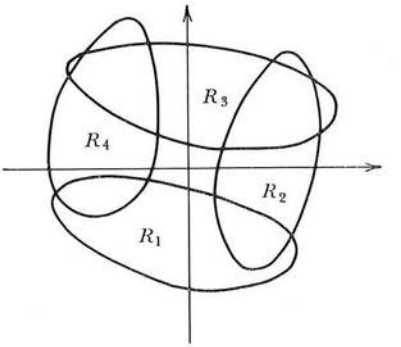


Figura 4-2

(En atención a las consideraciones que siguen se ha dibujado una región de manera que se solapa a sí misma.) Es imposible encontrar una rama uniforme de la función en toda la región anterior, pues cualquier elección de rama que se haga en la región de solapamiento, forzosamente nos llevará a una rama diferente cuando se llegue a esta zona después de recorrer un camino que dé una vuelta completa alrededor del origen. Sin embargo, es posible recubrir la región R mediante cuatro regiones R_1, R_2, R_3, R_4, cada una de las cuales se solapa con alguna de las restantes, no rodeando al origen ninguna de ellas (Figura 4.2). Seleccionemos una rama de arg z en R_1. Por continuidad, la rama que se elija en R_2 estará completamente determinada si imponemos que arg z sea una función uniforme en la parte común de R_1 y R_2. Análogamente, la rama de arg z estará determinada de modo único sobre R_3 por los valores que tome en la parte común de R_2 y R_3. Razonando del mismo modo con respecto a R_3 y a R_4, vemos que también sobre R_4 está determinado de modo único el valor de arg z. Sin embargo, los valores correspondientes a los puntos de la parte común de R_1 y R_4 difieren en 2π.

Para superar esta dificultad convendremos en considerar como diferentes los puntos de R_4 y los de R_1, en la región en que ambas se solapan. Como si R_4 estuviese contenida en un duplicado del plano z situado sobre el plano original z, por lo cual R_1 y R_4 no se cortarían. Claramente, la región formada por las R_i es conexa, y en atención a nuestro convenio, R_1 y R_4 no se solapan. R_1 está conectada con R_4, no directamente, sino a través de R_2 y R_3.

Se aplica ahora el mismo método para efectuar el estudio de la función logaritmo. El proceso de ir añadiendo semiplanos

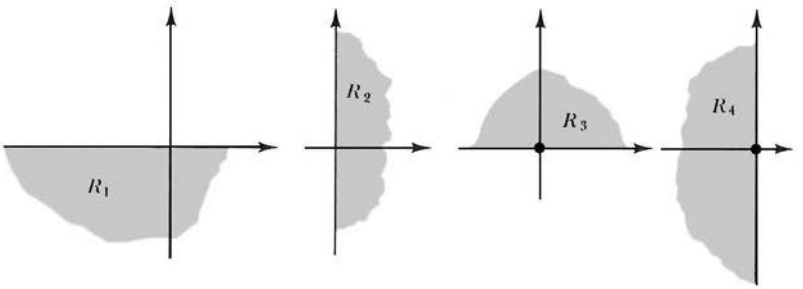


Figura 4-3

no necesita detenerse en los tres semiplanos de la Figura 3.2, sino que se continúa como sugiere la Figura 4.3. Al semiplano $x < 0$, añadido en cuarto lugar, se le asigna la función

$$\arg z = \theta = \arctan \frac{y}{x} + \pi. \tag{4.1}$$

Esta función coincide sobre el semiplano $y > 0$ con el valor que ya le había sido asignado a arg z sobre él; es decir, en los puntos comunes de los dos semiplanos las dos fórmulas dan el mismo valor de θ. Sin embargo, la nueva fórmula no coincide con el valor inicialmente definido sobre el semiplano $y < 0$.

En atención a este hecho numeraremos los semiplanos consecutivamente R_1, R_2, R_3, y R_4, y convendremos en considerar diferentes los puntos de R_4 y los de R_1. Como si la parte de R_4 donde $y < 0$ se hallara contenida en un duplicado del plano z situado sobre plano original z, por lo que R_1 y R_4 no se cortarían. En la presente discusión los semiplanos R_i juegan el mismo papel que las regiones R_i de la Figura 4-2.

Evidentemente el proceso puede continuarse hacia arriba y hacia abajo. Los semiplanos, que se solapan como se ha explicado ya, forman una superficie espiral que recibe el nombre de *superficie de Riemann* de log z (ver la Figura 4.4). Cuando es necesario utilizar una notación precisa, se pueden denotar los puntos de la superficie de Riemann en la forma (z, n), donde n indica que z se encuentra en la *n-ésima* hoja; entonces z puede considerarse como la proyección del punto (z, n) sobre el plano z ordinario. Esta misma idea se expresa al decir que "z es un punto de la superficie de Riemann" o que una función dada se considera "sobre su superficie de Riemann".

Con el objeto de dar una descripción analítica de log z como función uniforme definida sobre su superficie de Riemann definiremos θ sobre R_1, R_2 y R_3 mediante las fórmulas (3.6) y (3.7). Para definir θ sobre el *n-ésimo* semiplano, R_n, se establece la regla

de que si n aumenta o disminuye en 2, el correspondiente valor de θ aumenta o disminuye, respectivamente, en π. En la parte común de R_n y R_{n+1} son aplicables dos de dichas fórmulas para calcular el valor de θ. Sin embargo, como consecuencia de propiedades elementales de la función tan θ, ambas fórmulas dan el mismo valor.

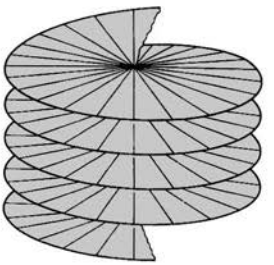


Figura 4-4

No es difícil establecer la analiticidad de log z sobre su superficie de Riemann. Cualquier punto $z = (z,n)$ de dicha superficie es interior a uno de los semiplanos que se han utilizado para efectuar la construcción anterior, y por lo tanto, arg z toma, salvo una constante aditiva, uno de los valores que se han utilizado en la Sección 3. Así pues, v_x y v_y toman los mismos valores que allí, y la derivada de log z no solamente existe sino que además es igual a $1/z$.

Discutiremos ahora en oué sentido log z y e^z son funciones inversas una de otra. Puesto que para cada determinación de log z se verifica que $\exp(\log z) = z$ lo único que es preciso comprobar es si con la definición actual se verifica $\log(e^z) = z$. Si escribimos $\phi(z) = \log(e^z)$, la regla de la cadena proporciona $\phi'(z) = 1$ y por lo tanto $\phi(z) - z$ es constante sobre cada semiplano de la superficie de Riemann. Por consiguiente, es constante sobre toda la superficie. Si la determinación de log z en el punto 1 es tal que $\log 1 = 0$, se deduce que la constante es 0, y por lo tanto, $\log e^z = z$. (Otras determinaciones darían $z + 2\pi ik$, tomando k uno y un mismo valor en la totalidad de la superficie de Riemann.)

Puesto que, como acabamos de ver, log z tiene función inversa, la aplicación de su superficie de Riemann en el plano w dada mediante $w = \log z$ ha de ser uno a uno. La discusión anterior puede resumirse en la forma siguiente:

TEOREMA 4.1. *La función* log z *es analítica en todos los puntos de su superficie de Riemann y verifica*

$$\frac{d}{dz} \log z = \frac{1}{z}$$

en todos los puntos de dicha superficie. La aplicación $w = \log z$ *de la superficie de Riemann en el plano w es uno a uno, y si se elige el valor de log z para el cual* $\log 1 = 0$ *su aplicación inversa es precisamente la función exponencial.*

En la Figura 4.3 es importante que cada nuevo semiplano se solape de manera efectiva con uno antiguo, y no solamente contacten a lo largo de una parte de los bordes. Esta última posibilidad debe rechazarse porque resulta difícil comprobar la analiticidad en un borde, y también debido a que pueden surgir dificultades relativas a la unicidad de la definición cuando se atraviesa un borde. Aunque no se dará aquí un desarrollo general de la teoría de las superficies de Riemann, sí podemos decir que dicho desarrollo depende de la noción de cadena de regiones solapadas, en cada una de las cuales la función considerada, como ocurría en el caso especial estudiado anteriormente, es unívoca.

Puede resultar difícil visualizar geométricamente una superficie de Riemann general, y puede incluso resultar imposible sumergir satisfactoriamente la superficie en un espacio euclídeo tridimensional (ver el Ejemplo 4.1). Sin embargo, la visualización geométrica es mucho menos importante que la descripción analítica por medio de cadenas de regiones juntamente con una regla que determine qué regiones se solapan y cuáles no.

Se debe hacer notar que una misma superficie de Riemann puede ser descrita de varias maneras. Consideramos, por ejemplo, una pila de planos con corte P_n, cada uno de los cuales sea un duplicado del plano cortado que se usó en la Sección 3, excepto que ahora el borde superior del corte, que corresponde a $\theta = \pi$, pertenece al plano en que está el corte y el borde inferior, no. Si se une el borde superior de P_n con el inferior de P_{n+1}, no cortándose los planos en ningún punto, la superficie resultante es equivalente a la superficie de Riemann de la Figura 4-4. Aquí, sin embargo, n indica efectivamente la *n-ésima* hoja, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

La introducción de la superficie de Riemann no es el único modo posible de efectuar el estudio de una función multiforme, tal como arg z. Efectuando cortes conveniente, la función multiforme puede ser descrita siempre mediante funciones uniformes, del mismo modo que hemos descrito log z con ayuda de la función Log z. Otro método consiste en utilizar una cadena de regiones, como se hizo en la Figura 4.2, pero no considerar que un punto pueda pertenecer simultáneamente a dos regiones si para hacerlo así es preciso sacrificar la univocidad de la función considerada. Así, cuando se está utilizando la región R_4 de la Figura 4.2 se puede considerar que R_1 ha sido "eliminada" Un tercer método podría consistir en exigir que al describir una cierta curva del plano complejo el valor elegido fuera función continua de la longitud de arco s de esa curva. El resultado posiblemente no fuera una función unívoca del punto z del plano, pero sí lo sería de la longitud de arco, s.

Este tercer método de operar con funciones multiformes conduce al interesante concepto de punto de ramificación. Si se elige el valor de log z de tal manera que se obtenga una función continua de s sobre la circunferencia

$$z = \epsilon e^{is}, \qquad 0 \leq s \leq 2\pi, \quad \epsilon > 0$$

del plano z, los valores de log z en $s = 0$ y en $s = 2\pi$ difieren en 2π, a pesar de que para $s = 0$ y $s = 2\pi$ se obtiene el mismo punto, $z = \epsilon$. Se dice entonces que el origen es un *punto de ramificación* de log z, porque siguiendo una circunferencia pequeña que encierre al origen se puede pasar de una rama de log z a otra. Sobre una circunferencia suficientemente pequeña que encierre a otro punto z, cualquier rama de log z vuelve a tomar su

valor inicial. Por consiguiente, $z = 0$ es el único punto de ramificación de $\log z$. (En el plano complejo ampliado $z = \infty$ es también un punto de ramificación.)

En el plano con un corte no es posible rodear completamente al origen siguiendo una circunferencia; tampoco existen caminos cerrados en torno del origen en la superficie de Riemann. Debido a que el corte del plano une el punto de ramificación 0, con el punto de ramificación ∞, son imposibles en el plano cortado los caminos cerrados alrededor del origen; en la superficie de Riemann dichos caminos son imposibles en virtud de su estructura geométrica. En la superficie de Riemann se puede pasar de forma continua de una rama del logaritmo a otra; cada rama se encuentra en su propia hoja y las distintas hojas de la superficie están conectadas. En el plano cortado es imposible pasar de una rama a otra con continuidad.

Ejemplo 4.1. Describir la superficie de Riemann de $w = z^{1/3}$. Puesto que $z^{\alpha} = \exp(\alpha \log z)$, la función $w = z^{\alpha}$ está unívocamente determinada sobre la superficie de Riemann de $\log z$. Sin embargo, cuando α es racional la aplicación de esta superficie en el plano w dada por $w = z^2$* no es uno a uno, pues los valores que toma sobre la superficie de Riemann se repiten. En el caso que nos ocupa, si $\arg z$ aumenta en 6π, el valor de $\frac{1}{3} \arg z$ aumenta en 2π, y por lo tanto, $\exp(\frac{1}{3} \log z)$ vuelve a tomar su valor inicial.

Para evitar esto describiremos la superficie de Riemann de la función $w = z^{1/3}$* por medio de sucesivos planos con corte, análogos a los de la superficie de Riemann de $\log z$. Sin embargo, cuando lleguemos a la tercera hoja, P_3, uniremos el borde superior de P_3 y el borde inferior de P_1, no añadiéndose ya ningún otro plano con corte P_4. La superficie de Riemann resultante tiene solamente tres hojas, como era de esperar, pues $z^{1/3}$ solamente tiene tres valores. El hecho de que la aplicación de esta superficie de Riemann en el plano w sea uno a uno es consecuencia de las propiedades de periodicidad de e^z.

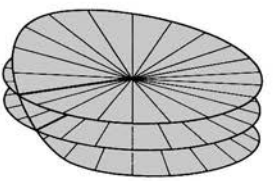


Figura 4-5

Aunque la Figura 4-5 trata de sugerir el aspecto de la superficie resultante, ésta no puede ser sumergida fielmente en el espacio euclídeo tridimensional debido a que el plano con corte P_3 ha de atravesar los otros dos para poder unirse con el P_1 de la primera hoja. En tales casos conviene no prestar atención a estas intersecciones, dando el máximo significado al enunciado explícito de los solapamientos y restando importancia al aspecto geométrico que pueda presentar la figura.

Ejemplo 4.2. Discutir la superficie de Riemann de $w = z^{5/3}$. Por definición esta ecuación es equivalente a la $w^3 = z^5$. Cuando arg z recorre los valores de 0 hasta 6π, arg w varía desde 0 hasta 10π y por consiguiente, z se halla en la superficie de Riemann que se muestra en la Figura 4-5, mientras que w se encuentra en una parecida que tendrá ahora cinco hojas en lugar de tres. La aplicación de una en otra superficie es uno a uno.

Como sugiere este ejemplo, con frecuencia el estudio de funciones multiformes $w = f(z)$ exige utilizar dos superficies de Riemann, una para los valores de z y otra para los de w. Unicamente cuando la función o su inversa sean uniformes se reducirá la correspondiente superficie de Riemann a una superficie de una sola hoja.

Problemas

1. Describir algunas regiones fundamentales y las superficies de Riemann de:

$$w = z,\quad w = z^2,\quad w = z^{1/4},\quad w = z^{3/2},\quad w = z^e,\quad w = \log(1 - z),\quad w^2 = \log z.$$

2. Señalar sobre la superficie de Riemann de $z = w^2$ la imagen de circunferencia $w = e^{2it} - 1$, $0 \leqslant t < 2\pi$. Imaginemos que la superficie se mira desde arriba. Usar línea de puntos para la imagen de la circunferencia en la hoja inferior y línea continua para la de la hoja superior.
3. Siendo α y β dos constantes, averiguar si las siguientes igualdades son válidas en la superficie de Riemann de log z:

$$z^{\alpha+\beta} = z^\alpha z^\beta,\qquad \log(z^\alpha) = \alpha \log z,\qquad z(z^\alpha)' = \alpha z^\alpha,\qquad z^{\alpha\beta} = (z^\alpha)^\beta.$$

   ¿Cuáles de ellas, si es que hay alguna, exigen que $\log 1 = 0$ siendo falsas para $\log 1 = 2\pi i$?
4. Si $a \neq 0$ es una constante, demostrar mediante la regla de la cadena que la función

$$\phi(z) = \log(az) - \log z$$

   verifica $\phi'(z) = 0$ sobre la superficie de Riemann de log z, y que por lo tanto, es constante. Suponiendo que $\log 1 = 0$, determinar la constante haciendo $z = 1$. Obtener de este modo que

$$\log az = \log a + \log z, \qquad az \neq 0.$$

*** Definición analítica de arg z.**

5. Definamos la función arctan t y la constante π mediante

$$\arctan t = \int_0^t \frac{d\tau}{1 + \tau^2}, \qquad \pi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau}{1 + \tau^2}.$$

(a) Calcular $(d/dt)\text{Tan}^{-1}t$ observando las ecuaciones anteriores
(b) Obténgase que

$$\text{Tan}^{-1}t + \text{Tan}^{-1}\frac{1}{t} = (\text{sign } t)\frac{\pi}{2}, \qquad t \neq 0, \quad (*)$$

en donde **sign** $t = +$ cuando $t > 0$ y sign $t = -$ para $t < 0$. (En virtud de la regla de la cadena el primer miembro de (*) tiene derivada nula y por lo tanto, es constante sobre todo intervalo en el cual $t \neq 0$. Determinar la constante en la semirrecta $(-\infty,0)$ y en la $(0,\infty)$ haciendo tender $t \to -\infty$ y $t \to \infty$, respectivamente.)

6. Demostrar que la definición de $\theta = \text{Arg } z$ dada en (3.7) tiene sentido en los puntos donde sean aplicables dos fórmulas. (El valor asignado en el semiplano $x > 0$ menos el asignado en el semiplano $y < 0$ es

$$\text{Tan}^{-1}\frac{y}{x} + \text{Tan}^{-1}\frac{x}{y} + \frac{\pi}{2}.$$

Aplíquese ahora el Problema 5 con $t = y/x < 0$. El análisis para los semiplanos $x > 0, y > 0$ es parecido; aún más, este mismo análisis puede hacerse con cualquier par de semiplanos que se solapen de la superficie de Riemann.)

5. Funciones armónicas. En todo punto $z = x + iy$ en el que exista $f'(z)$, en virtud de (1.6) y de las condiciones de Cauchy-Riemann se tiene

$$f'(z) = u_x - iu_y, \qquad f'(z) = v_y + iv_x,$$

tomándose el valor de las funciones del segundo miembro en el punto (x,y). Si además de $f'(z)$ existe también $f''(z)$ podemos aplicar otra vez las condiciones de Cauchy-Riemann a cada una de las expresiones anteriores. Entonces resulta

$$u_{xy} = u_{yx}, \qquad u_{xx} + u_{yy} = 0, \qquad v_{xy} = v_{yx}, \qquad v_{xx} + v_{yy} = 0. \tag{5.1}$$

Se sabe ya del Análisis real que $u_{xy} = u_{yx}$ en todo punto en el que las derivadas parciales segundas sean continuas, condición que satisfacen todas las funciones comúnmente manejadas en Cálculo. Sin embargo, en las relaciones (5.1) se afirma también que u y v verifican una ecuación de la forma

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0, \tag{5.2}$$

La condición expresada mediante esta ecuación es extraordinariamente restrictiva. La ecuación (5.2) se conoce como *ecuación de Laplace* y juega un papel fundamental tanto

en la Matemática pura como en la aplicada. Una función continua $\phi(x,y)$ que satisfaga la ecuación de Laplace en un dominio D se dice que es *armónica en D.* Así las partes real e imaginaria de $f(z)$ son armónicas en cualquier dominio en el que exista $f''(z)$.

Se demostrará en el capítulo siguiente que $f'(z)$ es analítica en todo punto donde $f(z)$ sea analítica, y por lo tanto, está garantizada la existencia y la continuidad de $f''(z)$. Demostraremos también en el Capítulo 6 que una función que es armónica en un dominio tiene necesariamente derivadas de todos los órdenes en él, y por lo tanto, las derivadas segundas son continuas. Estos resultados se darán por válidos aquí y en el Capítulo 5.

Una función armónica v que esté relacionada con u mediante las condiciones de Cauchy-Riemann se dice que es *conjugada,*[1] o con mayor precisión, que es *conjugada armónica* de u. En el caso de que exista alguna, la conjugada armónica es única salvo una constante aditiva, como es evidente. Si v es conjugada armónica de u entonces $-u$ es conjugada de v, pues si f es analítica también lo es *if.*

Una característica muy interesante de las funciones armónicas es que toda función armónica u admite una conjugada en un dominio suficientemente pequeño, por lo cual u es la parte real de una función analítica $u + iv$. Analizaremos ahora esta propiedad, en la hipótesis de que el dominio D tenga las propiedades que sugiere la Figura 5-1. Lo que en

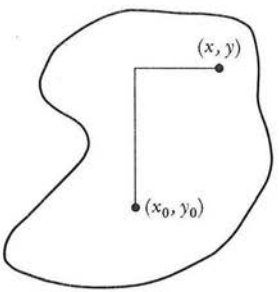


Figura 5-1

esta figura se desea poner de manifiesto es lo siguiente: Existe un punto fijo (x_0,y_0) tal que el segmento rectilíneo que une (x_0,y_0) con (x_0,y) y el segmento que une (x_0,y) con (x,y) están ambos contenidos en D cualquiera que sea el punto (x,y) perteneciente a D.

Supongamos que u sea armónica en un dominio D como el que hemos descrito y que se pide construir una función armónica v conjugada de u, es decir, tal que

$$v_x = -u_y, \qquad v_y = u_x. \tag{5.3}$$

[1] El término "conjugada" se usa aquí en sentido diferente al que se le da al hablar de números complejos, $\bar{z} = x - iy$.

Integrando respecto de x la primera de estas ecuaciones se obtiene

$$v(x,y) = -\int_{x_0}^{x} u_y(x,y)\,dx + c(y).$$

Cualquiera que sea la elección que se haga de la función $c(y)$ es claro que $\partial v/\partial x = -u_y$, en virtud del teorema fundamental del Cálculo. Para conseguir $\partial v/\partial y = u_x$ imponemos que

$$-\frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x} u_y(x,y)\,dx + c'(y) = u_x(x,y). \tag{5.4}$$

Por un conocido teorema de Análisis real, es posible intercambiar en esta última ecuación el orden de integración y de derivación, puesto que u_{yy} es continua, por lo cual el primer término de esta igualdad puede expresarse como una integral de $-u_{yy}$. Puesto que u es armónica, el resultado es

$$\int_{x_0}^{x} (-u_{yy})\,dx = \int_{x_0}^{x} u_{xx}\,dx = u_x(x,y) - u_x(x_0,y).$$

que sustituido en (5.4) da $c'(y) = u_x(x_0,y)$; al integrar esta ecuación se obtiene $c(y)$, y finalmente, podemos escribir

$$v(x,y) = -\int_{x_0}^{x} u_y(x,y)\,dx + \int_{y_0}^{y} u_x(x_0,y)\,dy + c \tag{5.5}$$

siendo $c = v(x_0,y_0)$ constante. Recíprocamente, la función v así construida satisface (5.3).

En la expresión (5.5) tenemos un ejemplo de integral curvilínea; su camino de integración es la línea quebrada que se muestra en la Figura 5-1. Esta breve introducción puede servirnos de guía en la teoría, más general, de integrales curvilíneas que se da en el capítulo siguiente.

Trataremos ahora de otro sentido en el cual el problema de construir una función conjugada, está relacionado con el problema de la integración. Si u es una función armónica dada, definida en un dominio D, la función

$$g(z) = u_x(x,y) - i\,u_y(x,y) \tag{5.6}$$

verifica las condiciones de Cauchy-Riemann, pues estas últimas se reducen a

$$(u_x)_x = (-u_y)_y, \qquad (u_x)_y = (u_y)_x$$

exactamente igual que en (5.1). La primera ecuación se verifica por ser u armónica; la segunda es consecuencia de un teorema de Análisis real. Así pues, g es analítica en D. Si u es la parte real de una función analítica f, entonces $g = f'$, pues $f'(z)$ es igual al segundo miembro de (5.6) en virtud de (1.6) y de las condiciones de Cauchy-Riemann para f. Recíprocamente, si es posible hallar una función analítica f tal que $f' = g$ entonces, como se comprueba fácilmente, u coincide con la parte real de f, salvo una posible constante aditiva. Por consiguiente, dada una función armónica u en D, el preguntar si existe una función analítica f cuya parte real sea u equivale a: ¿Dada g, analítica en D, existe una función f tal que $f' = g$? Como se mostrará en el próximo capítulo, esta pregunta nos conduce también a la teoría de la integración.

Ejemplo 5.1. Elegir la constante a de tal manera que la función

$$u = x^3 + axy^2$$

sea armónica, y conseguido esto, hallar una función conjugada, v.

Se tiene que $u_{xx} + u_{yy} = 6x + 2ax = 0$ para $a = -3$, así pues, esta elección de la constante a hace que u sea armónica. Cuando $a = -3$

$$u_x = 3x^2 - 3y^2, \qquad u_y = -6xy$$

y tomando $x_0 = y_0 = 0$ en (5.5), se tiene

$$v(x,y) = -\int_0^x (-6xy)\,dx + \int_0^y (-3y^2)\,dy + c = 3x^2y - y^3 + c.$$

Otra forma de llegar al mismo resultado: Por (5.6),

$$g(z) = 3x^2 - 3y^2 + 6ixy = 3(x + iy)^2 = 3z^2.$$

Así pues, $f' = g$ da $f(z) = z^3 + C$, siendo C una constante. Poniendo Im $C = c$ se obtiene como antes,

$$v(x,y) = \text{Im}(z^3 + C) = \text{Im}[(x + iy)^3 + C] = 3x^2y - y^3 + c.$$

Ejemplo 5.2. Sea $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ una función racional, y si es preciso, modifiquemos v en una constante aditiva, a fin de conseguir que $f(0)$ sea real. Demostrar que

$$f(z) = 2u\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) - u(0,0). \tag{5.7}$$

Por medio de la teoría de series de potencias, que se desarrollará más adelante, se puede probar el resultado anterior es válido, en un entorno suficientemente pequeño, con la única hipótesis de que u sea armónica; la racionalidad de f no es necesaria.

A fin de deducir (5.7) cuando f sea racional, definamos otra función racional f_1 por $f_1(z) = \overline{f(\bar{z})}$. Entonces

$$2u(x,y) = f(z) + \overline{f(\bar{z})} = f(z) + f_1(\bar{z})$$

y, también

$$2u(x,y) = f(x + iy) + f_1(x - iy).$$

En virtud del Problema 10 de la Sección 5 del Capítulo 1, esta igualdad se verifica tanto si x e y son reales como si son complejos. Sustituyendo x por $z/2$ e y por $z/(2i)$, obtenemos

$$2u\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) = f(z) + f_1(0).$$

Puesto que $f(0)$ es real, $f_1(0) = f(0) = u(0,0)$ de la cual se sigue (5.7).

Como ilustración del proceso anterior, tomando $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$ se obtiene

$$f(z) = 2\left[\left(\frac{z}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{z}{2}\right)\left(\frac{z}{2i}\right)^2\right] = z^3$$

resultado coincidente con el del Ejemplo 5.1.

Problemas

1. ¿Cuáles de las siguientes funciones $u(x,y)$ son armónicas?

$$x^2 - y^2 + y, \quad x^3 - y^3, \quad 3x^2y - y^3 + xy, \quad x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + x^3y - xy^3.$$

2. (a) Sea $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ una función racional. Por el Problema 10, Sección 5, Capítulo 1, la identidad $f(x) = u(x,0) + iv(x,0)$ sigue siendo válida cuando el número real x se sustituye por un número complejo. Sustituyendo x por z, obtener

$$f(z) = u(z,0) + iv(z,0).$$

(b) Utilizando (5.5) con $x_0 = y_0 = 0$, obtener una conjugada v para cada una de las funciones armónicas del Problema 1. Obtener después $f(z)$ mediante la fórmula de la parte (a).

3. (a) Si $u(x,y)$ es armónica, resultados que se han obtenido en el texto muestran que $u = \mathrm{Re}\, f$, siendo

$$f'(z) = u_x(x,y) - i u_y(x,y).$$

Suponiendo que $f'(z)$ sea una función racional, se hace $y = 0$ y se sustituye x por z, como se hace en el Problema 2(a) a fin de obtener

$$f'(z) = u_x(z,0) - i u_y(z,0).$$

(b) Utilizando la parte (a), obtener $f'(z)$ para las funciones armónicas del Problema 1, y hallar $f(z)$, examinando $f'(z)$.

4. Calcular $f(z)$ para las siguientes funciones armónicas $u(x,y)$ por el método del Problema 2 ó 3. Puesto que las fórmulas se han obtenido tan sólo para funciones racionales, debe comprobarse que $f(z)$ es analítica y que $u = \mathrm{Re}\, f$:

$$e^x \operatorname{sen} y, \qquad \cosh y \operatorname{sen} x, \qquad xe^x \cos y - ye^x \operatorname{sen} y, \qquad e^{x^2-y^2} \operatorname{sen} 2xy.$$

5. Sin suponer que $a = -3$ en el Ejemplo 5.1., calcular v mediante (5.5). Demostrar entonces que $u + iv$ satisface las condiciones de Cauchy-Riemann solamente cuando $a = -3$.
6. (a) Aplicar la fórmula del Ejemplo 5.2 a las funciones apropiadas del Problema 1, así como a la función armónica $(x^3 + xy^2 + 2xy)/(x^2 + y^2 + 2y + 1)$. (b) Aplicar la fórmula del Ejemplo 5.2 al Problema 4, y comprobar el resultado.
7. Obtener por el método del Ejemplo 5.2. la fórmula

$$f(z) = 2u\left(\frac{z + z_0}{2}, \frac{z - z_0}{2i}\right) + \text{const}$$

y aplicarla a la función $u(x,y) = y(x^2 + y^2)^{-1}$, tomando $z_0 = 1$.

8. Se dice que una función compleja $f = u + iv$ satisface las condiciones de Cauchy-Riemann cuando u y v las verifican. Comprobar por cálculo directo que si f y g satisfacen ambas las condiciones de Cauchy-Riemann en un cierto punto z, lo mismo ocurre con $f + g$ y con fg. Comprobar también que $a + ib$ y $x + iy$ las verifican en todo punto, siendo constantes a y b. Deducir entonces que todo polinomio $P(z)$ satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann (lo que demuestra, sin necesidad de recurrir a la derivación de variable compleja, que $\mathrm{Re}\, P(z)$ y $\mathrm{Im}\, P(z)$ son armónicas.)
9. Demostrar que la función ϕ definida $\phi(0,0) = 0$ y $\phi(x,y) = \mathrm{Im}\, z^{-2}$ para $z \neq 0$ tiene una discontinuidad de tipo infinito en el origen, a pesar de lo cual satisface a la ecuación de Laplace en todo punto z. El motivo de que en la definición de función armónica se exija que éstas sean continuas es evitar casos como el anterior.

* **6. Aplicación al estudio de flujos planos.** La Teoría de funciones analíticas constituye un auténtico filón de métodos de gran eficacia para resolver importantes problemas de

Electroestática, Conducción del calor, Difusión, Gravitación, Elasticidad y Flujo de corrientes eléctricas. La gran potencia del Análisis de variable compleja en tales campos se debe, principalmente, al hecho de que las partes real e imaginaria de una función analítica satisfacen la ecuación de Laplace, como ya se explicó en la sección anterior.

No es difícil demostrar que en los campos mencionados arriba ha de satisfacerse la ecuación de Laplace. La deducción de la ecuación de Laplace para dichos campos puede verse en muchos libros, y no la repetiremos aquí. En cambio, estudiaremos ahora el flujo bidimensional de un fluido ideal. Se verá que el modelo del flujo de fluido no sólo nos conduce a la ecuación de Laplace sino que también permite interpretar en sentido físico las condiciones de Cauchy-Riemann.

Supongamos que un fluido fluye sobre el plano z de forma tal que la velocidad en cada punto dependa sólo de la posición del punto, siendo por tanto, independiente del tiempo. Como este modelo es bidimensional podemos suponer que la lámina de fluido es infinitamente delgada. Con mayor realismo, podríamos suponer que dicha lámina tiene espesor constante igual a 1, en todos los puntos, y que el flujo es de tal naturaleza que el movimiento de cada partícula es independiente de su altura sobre el fondo. Es decir, todo punto del fluido que se encuentra sobre un mismo punto z del plano tiene la misma velocidad, $\mathbf{v}(z)$, independientemente de su altura y del tiempo. Esta velocidad es paralela al plano z, y por tanto, podemos representarla como un vector bidimensional,

$$\mathbf{v} = p\mathbf{i} + q\mathbf{j}.$$

Impondremos también a p y a q que tengan derivadas parciales continuas con respecto a x y a y. El hecho de que $\mathbf{v}$ tenga esta forma, y el hecho de que las integrales (6.1) y (6.3) que se introducen más adelante sean nulas, se considerarán como los tres axiomas básicos que rigen el flujo plano de un fluido perfecto.

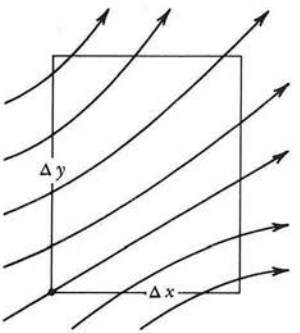


Figura 6-1

Por definición, el gasto neto de fluido que sale de una región dada es la integral curvilínea[1] de la componente normal exterior de **v** a lo largo de la frontera de la región. Cuando la región es un rectángulo, como se indica en la Figura 6-1 y la velocidad se expresa mediante sus componentes cartesianas $\mathbf{v}=p\mathbf{i}+q\mathbf{j}$, el cálculo a realizar es sencillo. En efecto, el gasto neto de fluido que sale del rectángulo de la Figura 6.1 es, evidentemente,

$$\int_y^{y+\Delta y}[p(x+\Delta x,\eta)-p(x,\eta)]\,d\eta+\int_x^{x+\Delta x}[q(\xi,y+\Delta y)-q(\xi,y)]\,d\xi \tag{6.1}$$

supuesto que Δx y Δy sean lo bastante pequeños como para que el rectángulo esté totalmente contenido en la región donde el comportamiento del fluido es ideal. En este caso, el principio de conservación del volumen afirma que el gasto neto es 0.

Dado que p y q son diferenciables con continuidad, el teorema del valor medio da

$$p(x+\Delta x,\eta)-p(x,\eta)=p_x(\bar{x},\eta)\,\Delta x, \qquad x<\bar{x}<x+\Delta x$$

en donde p_x denota la derivada parcial respecto de x. Cuando se sustituyen en (6.1) esta igualdad y su análoga para q, se divide por $\Delta x\,\Delta y$ y se iguala a 0, el resultado es

$$\frac{1}{\Delta y}\int_y^{y+\Delta y}p_x(\bar{x},\eta)\,d\eta+\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x}q_y(\xi,\bar{y})\,d\xi=0$$

Haciendo ahora tender $\Delta x\to 0$ a $\Delta y\to 0$, se obtiene la *ecuación de continuidad*

$$p_x+q_y=0 \tag{6.2}$$

Se demuestra en el Problema 9 que, recíprocamente, (6.2) implica la anulación de (6.1).

El principio de conservación de volumen no es la única condición que debe satisfacer un fluido perfecto. Otra condición que se deberá verificar se refiere a la *circulación*. Por definición, la circulación a lo largo de una curva dada es la integral curvilínea de la componente tangencial de **V** a lo largo de la curva. La circulación a lo largo de la línea cerrada que limita al rectángulo de la Figura 6-1 es

$$\int_y^{y+\Delta y}[q(x+\Delta x,\eta)-q(x,\eta)]\,d\eta-\int_x^{x+\Delta x}[p(\xi,y+\Delta y)-p(\xi,y)]\,d\xi. \tag{6.3}$$

[1] Como el resultado se aplica aquí tan sólo para rectángulos, no es preciso estar familiarizado con el concepto de integral curvilínea para poder comprender el resto de esta sección.

Si el rectángulo (y su interior) está contenido en la región donde el fluido se comporta de manera ideal, se sabe por Física que la circulación a lo largo de él es 0, y un razonamiento parecido al que antes sirvió para deducir (6.2) da

$$q_x - p_y = 0. \tag{6.4}$$

Recíprocamente, la condición (6.4) implica la anulación de (6.3).

Por definición, un fluido fluye idealmente en una región plana si su velocidad $\mathbf{v} = p\mathbf{i} + q\mathbf{j}$ es diferenciable con continuidad sobre ella y verifica además las condiciones (6.2) y (6.4). Si se define el concepto de *velocidad compleja* mediante

$$V(z) = p(x,y) + iq(x,y), \tag{6.5}$$

las ecuaciones anteriores muestran que la función

$$\overline{V(z)} = p(x,y) - iq(x,y)$$

satisface las condiciones de Cauchy-Riemann, y por lo tanto, es analítica. Recíprocamente, cualquier función analítica es diferenciable con continuidad y satisface las condiciones de Cauchy-Riemann, y por consiguiente, su conjugada define la velocidad compleja de un fluido ideal.

Se expone a continuación una técnica que permite obtener las trayectorias de las partículas del fluido. Puesto que p y q son diferenciables con continuidad, se sabe del Análisis real que (6.2) y (6.4) implican la existencia local de dos funciones ψ y ϕ tales que

$$d\psi = p\,dy - q\,dx, \qquad d\phi = p\,dx + q\,dy,$$

Respectivamente. Puesto que $d\psi = \psi_x\,dx + \psi_y\,dy$ y análogamente para ϕ, se deduce que

$$p = \phi_x = \psi_y, \qquad q = \phi_y = -\psi_x. \tag{6.6}$$

Las ecuaciones anteriores demuestran que la función

$$f(z) = \phi(x,y) + i\psi(x,y)$$

verifica las condiciones de Cauchy-Riemann, y que por consiguiente es analítica. Dado que, en virtud de (1.6) y (6.6),

$$f'(z) = \phi_x(x,y) + i\psi_x(x,y) = p(x,y) - iq(x,y)$$

la velocidad compleja (6.5) es

$$V(z) = \overline{f'(z)}. \tag{6.7}$$

De acuerdo con (6.6), $v = \text{grad } \phi$ así que ϕ es la función potencial de la velocidad. Las curvas $\phi = \text{const}$ se llaman *equipotenciales.* Puesto que al derivar f se obtiene la velocidad, se dice a veces que f es el potencial complejo.

La función ψ se llama *función de corriente;* las curvas

$$\psi(x,y) = \text{const}$$

se denominan *líneas de corriente.* Al objeto de interpretar físicamente estas curvas, observemos que el vector $\mathbf{i}\psi_x + \mathbf{j}\psi_y$ es perpendicular a la curva $\psi = \text{const}$, y también a v, puesto que por (6.6) se tiene

$$(\mathbf{i}\psi_x + \mathbf{j}\psi_y) \cdot (\mathbf{i}p + \mathbf{j}q) = 0.$$

Luego v es tangente a la curva $\psi = \text{const}$ en cada punto de ella. Físicamente esto significa que *las líneas de corriente representan las trayectorias de las partículas del fluido.*

Si $f = \phi + i\psi$ es analítica, como se acaba de ver, las curvas $\psi(x,y) = \text{const}$ son las líneas de corriente de un fluido ideal. Dado que la función

$$if = -\psi + i\phi$$

también es analítica, las curvas $\phi(x,y) = \text{const}$ representan igualmente las líneas de corriente de un fluido ideal. Los dos flujos relacionados de este modo se llaman flujos *conjugados,* pues la nueva función de corriente ϕ es conjugada de ψ en el sentido de la Sección 5. Para flujos conjugados las equipotenciales de un flujo son las líneas de corriente del otro, y recíprocamente.

Como $\overline{(if)}' = -i\overline{f'}$, la ecuación (6.7) muestra que si la velocidad compleja de un flujo dado es V, la velocidad compleja del flujo conjugado es $-iV$. La ecuación $|V| = |-iV|$ muestra además que un flujo y su conjugado tienen en cada punto la misma velocidad numérica. Al multiplicar por $-i$ se gira el vector V un ángulo de $-90°$ y por tanto, la dirección del flujo conjugado forma ángulo recto en cada punto con la dirección del flujo primitivo. Puesto que las líneas de corriente de ambos son, respectivamente,

$$\psi(x,y) = \text{const}, \qquad \phi(x,y) = \text{const},$$

donde ϕ y ψ son las partes real e imaginaria de una función analítica, la ortogonalidad de los flujos concuerda con el resultado del Ejemplo 1.1.

Para terminar daremos una interpretación física de la función de corriente, sin hacer uso de la discusión precedente, y en la cual los hechos fundamentales son intuitivamente evidentes. Puesto que las condiciones son, en parte, de tipo físico, esta discusión informal no reemplaza en manera alguna al análisis matemático hecho anteriormente. De lo que se trata es de dar más claridad a los hechos.

Sea z_0 un punto dado, que permanecerá fijo en toda la discusión posterior. Se define la función de corriente $\psi(x,y)$ como el flujo total que atraviesa una curva que una z_0 con z para

$z = x + iy$. Es decir, ψ mide el volumen de fluido que atraviesa la curva por unidad de tiempo. Suponer que ψ es independiente de la curva particular que se utilice, equivale a suponer que el fluido es incompresible y que no existen manantiales ni sumideros en la región considerada. Así pues, en la Figura 6-2 el flujo que atraviesa las dos curvas ha de ser el mismo, pues el volumen total de fluido en la región comprendida entre las dos curvas permanece constante en el estado de régimen.

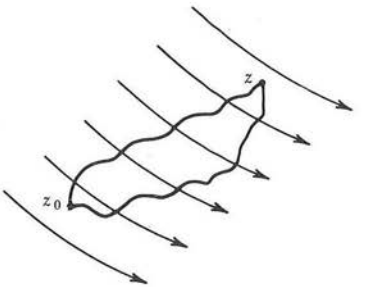


Figura 6-2

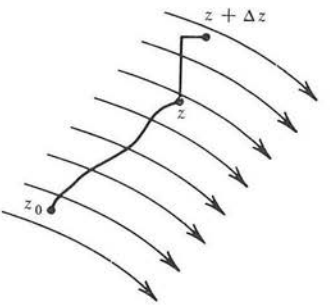


Figura 6-3

El flujo desde z_0 a $z + \Delta z$ puede calcularse en la Figura 6-3 sumando el flujo que atraviesa la curva desde z hasta z_0 con el correspondiente a los dos segmentos rectilíneos. Eligiendo convenientemente el signo de ψ resulta

$$\psi(x + \Delta x, y + \Delta y) = \psi(x,y) + \tilde{p}\,\Delta y - \tilde{q}\,\Delta x$$

siendo $\tilde{p}$ el valor medio de la abscisa de **v** sobre el segmento vertical y $\tilde{q}$ el valor medio de la ordenada de y sobre el segmento horizontal. Haciendo $\Delta x = 0$ $\Delta y = 0$ según convenga, y reordenando el resultado, se obtiene, respectivamente,

$$\frac{\psi(x, y + \Delta y) - \psi(x,y)}{\Delta y} = \tilde{p}, \qquad \frac{\psi(x + \Delta x, y) - \psi(x,y)}{\Delta x} = -\tilde{q}.$$

Si **v** es continua, los valores medios de $\tilde{p}$ y $\tilde{q}$ tienden, respectivamente, hacia los valores de y en el punto (x,y) y por consiguiente, como ya se obtuvo antes,

$$\psi_y = p, \qquad \psi_x = -q.$$

Merece la pena observar que para obtener este resultado solamente ha sido necesario suponer que **v** es continua. El análisis efectuado demuestra que entonces ψ tiene derivadas

parciales, y que estas derivadas coinciden con las funciones continuas p y $-q$. Luego ψ es diferenciable con continuidad.

Si el flujo conjugado admite también una función de corriente ϕ se obtiene

$$\phi_y = q, \qquad \phi_x = p$$

sin más que aplicar el vector $(-i)(p + iq) = q - ip$, la discusión anterior, con ϕ en lugar de ψ. Esto demuestra que

$$\phi_x = \psi_y, \qquad \phi_y = -\psi_x$$

y la función $f = \phi + i\psi$ es analítica, como antes.

Ejemplo 6.1. Estudiar el flujo representado por la función $f(z) = \log z$. Haciendo $z = re^{i\theta}$ se tiene

$$f(z) = \operatorname{Log} r + i\theta + 2\pi ik$$

y por consiguiente, las líneas de corriente son las curvas $\theta = \text{const}$. Puesto que las líneas de corriente son las trayectorias de las partículas de fluido, el flujo es radial, como se indica en la Figura 6-4 (a). Esta conclusión queda confirmada al calcular la velocidad compleja,

$$V = \overline{f'(z)} = \left(\overline{\frac{1}{z}}\right) = \frac{1}{r} e^{i\theta}. \tag{6.8}$$

La ecuación (6.8) no solamente nos dice que el flujo es radial, sino que nos da su velocidad numérica

$$|V| = |f'(z)| = \frac{1}{r}.$$

El flujo total que atraviesa la circunferencia $|z| = r$ se obtiene integrando la componente normal de V a lo largo del contorno. Puesto que (6.8) muestra que V está dirigida según un radio apartándose del origen, su componente normal es $|V| = 1/r$. Por consiguiente el flujo total que atraviesa la circunferencia es

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{r} r \, d\theta = 2\pi \tag{6.9}$$

y la circulación es 0. Se dice de manera breve que $f(z)=\log z$ representa un *manantial* de valor 2π situado en el origen.

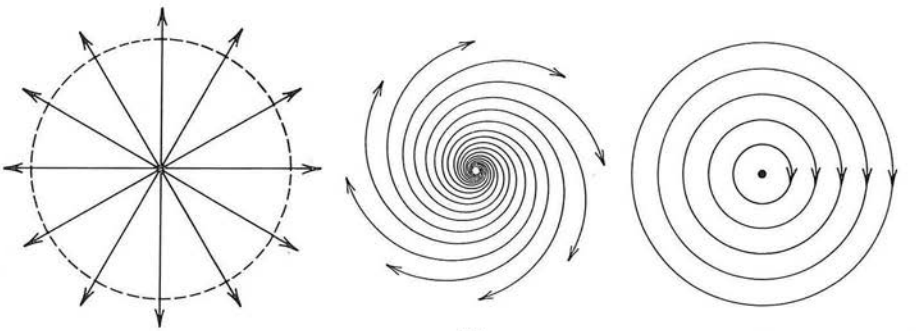


Figura 6-4

El flujo conjugado viene dado por $i \log z$, intercambiándose, por tanto, los papeles de las líneas de corriente y las equipotenciales (Figura 6-4 (c)). Las líneas de corriente del flujo conjugado son circunferencias concéntricas, y la integral (6.9) es ahora la correspondiente a la componente tangencial de la velocidad en lugar de ser la correspondiente a su componente normal. La circulación a lo largo de cualquier circunferencia de centro en el origen es -2π, y el flujo total que la atraviesa es 0. Se dice por ello que $i \log z$ representa un *vórtice* de valor -2π situado en el origen.

Si $f(z)=\alpha \log z$, siendo $\alpha=a+ib$ es constante, la ecuación

$$f(z) = a \log z + b(i \log z)$$

indica que $\alpha \log z$ representa la superposición de un manantial[3] de valor $2\pi a$ y un *vórtice* de valor $-2\pi b$, ambos situados en el origen. La composición de los movimientos radial y circular da líneas de corriente espirales. (Figura 6-4 (b)).

Ejemplo 6.2. Flujo cerca de una pared. Estudiar el comportamiento del flujo creado por un manantial de valor $2\pi c$ situado en el punto $z = a > 0$, en presencia de una barrera situada a lo largo del eje y (Figura 6.5). Resolveremos este problema por el método llamado "de las imágenes". Consideremos un segundo manantial de valor $2\pi c$ situado en el punto $-a$, como se indica en la Figura 6-1. El correspondiente potencial complejo es

$$f(z) = c \log(z - a) + c \log(z + a) = c \log(z^2 - a^2) + 2k\pi ic.$$

[3] Cuando a es negativo, un manantial de valor $2\pi a$ se denomina también sumidero de valor $2\pi|a|$.

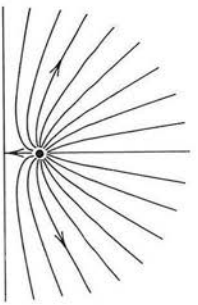


Figura 6-5

Figura 6-6

Por la simetría, es claro que el eje y ha de ser una línea de corriente; esta conjetura queda confirmada calculando

$$f(iy) = c\log(-y^2 - a^2) + 2k\pi ic = c\,\mathrm{Log}(y^2 + a^2) + (2k + 1)\pi ic.$$

La parte imaginaria es constante; luego el eje imaginario es una línea de corriente. Desde el punto de vista físico, esto significa que podemos situar una barrera a lo largo del eje y sin modificar la forma del flujo. Por consiguiente, si se resuelve el problema nuevo, con dos manantiales, en el semiplano derecho, se habrá resuelto el primer problema, en el que intervienen un manantial y una pared.

Puesto que los resultados anteriores dan

$$f'(z) = \frac{2cz}{z^2 - a^2}, \tag{6.10}$$

la velocidad compleja en el punto $z = iy$ es

$$V = \overline{f'(iy)} = \frac{2icy}{a^2 + y^2}. \tag{6.11}$$

La velocidad en dicho punto tiene la dirección del eje y; luego la componente normal de la velocidad en un punto de la pared es 0. Este resultado confirma el hecho, ya conocido por las propiedades de las líneas de corriente, de que el flujo verifica en la pared las condiciones de contorno que eran de esperar. El flujo se muestra en la Figura 6-5.

En este ejemplo no se han impuesto directamente las condiciones de contorno en la pared, pero su verificación quedó asegurada al construir un flujo en el cual la recta $x = 0$ era una línea de corriente. De manera completamente general, cualquier línea de corriente puede considerarse como el borde de un obstáculo rígido en el seno del fluido en movimiento, lo cual sugiere un método indirecto para resolver los problemas de movimiento de fluidos. Se recogen en una especie de diccionario, los modelos de flujos asociados a las diferentes funciones analíticas $f(z)$. Si una curva $\psi = \text{const}$ coincide con algún contorno que posea interés técnico, la función f resuelve el correspondiente problema físico. Cuando este tipo de problemas se formula con suficiente precisión, la unicidad de las soluciones puede ser deducida de propiedades de las funciones analíticas. Supondremos aquí que la unicidad ya ha sido establecida.

Ejemplo 6.3. Supongamos en el Ejemplo 6.2 que el fluido está inicialmente en reposo en todo el plano z, que se construye entonces la pared, y que finalmente, se pone en marcha el manantial. Después de que el sistema haya alcanzado el régimen estacionario, demostrar que la fuerza total sobre el muro está dirigida hacia la derecha y que sus valores $\pi\rho c^2/a$, siendo ρ la densidad del fluido.

De acuerdo con la ley de Bernoulli, la presión p, la densidad ρ y la velocidad numérica $|V|$ están ligadas por la ecuación

$$\frac{p}{\rho} + \frac{|V|^2}{2} = \text{const}$$

cuando la densidad es constante y p se mide en los puntos de cota constante con relación al fondo. La ley de Bernoulli puede deducirse de las leyes del movimiento de Newton; aquí la supondremos ya demostrada. La presión p se mide a la profundidad ½, es decir, a la semidistancia desde la superficie al fondo. Como $V \to 0$ conforme $|z| \to \infty$, la ecuación da

$$p_0 - p = \rho \frac{|V|^2}{2}$$

siendo p_0 la presión en el ∞, o sea, la presión del fluido en reposo. En un fluido ideal se considera que dicha presión es normal a la frontera en todos los puntos de ésta.

Aplicando al Ejemplo 6.2 estos principios se obtiene que la fuerza tiene ordenada 0, y que su abscisa viene dada por

$$\frac{\rho}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |V|^2\, dy = 2\rho c^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y^2}{(a^2 + y^2)^2}\, dy = \pi\rho \frac{c^2}{a}.$$

Este resultado no sufriría variación si se reemplazara el manantial por un sumidero del mismo valor.

Problemas

1. Las siguientes funciones dan el potencial complejo $f(z)$ de un fluido ideal en movimiento. Hallar el potencial de velocidad ϕ, la función de corriente ψ, la velocidad compleja V, el valor numérico de la velocidad $|V|$, y representar gráficamente las líneas de corriente:

$$z, \quad iz, \quad (1+i)z, \quad z^{-1}, \quad iz^{-1}, \quad z^2, \quad iz^2.$$

2. *Flujo en una esquina.* Sea $f(z) = z^c$, siendo c constante $c > \frac{1}{2}$. . Haciendo $z = re^{i\theta}$, demostrar que los rayos $\theta = 0$ y $\theta = \pi/c$ son líneas de corriente, y por lo tanto, pueden reemplazarse por paredes. Representar las líneas de corriente en el sector $0 \leq \theta \leq \pi/c$ en los tres casos $c = 4$, $c = 1$, $c = \frac{2}{3}$. Demostrar que la velocidad del flujo es cr^{c-1}, siendo $r = |z|$ la distancia al vértice.
3. (a) Demostrar que la velocidad máxima en la pared del Ejemplo 6.2 es igual a la velocidad máxima que podría observarse sobre el eje y si se situara un manantial del mismo valor en $z = a$ se suprimiera la pared. (b) Consideremos un manantial de valor $2\pi c$ situado en el punto $z=a>0$ sin otras singularidades o paredes. Si ahora se introduce una pared a lo largo del eje y, como en el Ejemplo 6.2, hallar el lugar geométrico de los puntos del semiplano derecho en los que la introducción de la pared provocará un aumento de la velocidad.
4. Consideremos $f(z)=\alpha \log z$, siendo $\alpha \neq 0$ una constante compleja. Demostrar que la velocidad compleja en el punto $z = re^{i\theta}$ forma un ángulo constante con el radio de 0 hasta z, y que por consiguiente las líneas de corriente son espirales logarítmicas (Figura 6-4 (b)). Hallar la ecuación de las líneas de corriente en coordenadas polares, expresando r en función de θ.
5. Describir los flujos correspondientes a $f(z) = e^z$ y $f(z) = \operatorname{senh} z, 0 \leq y \leq \pi$.
6. Interpretar el potencial $f(z)=\log[(z-1)/(z+1)]$ mediante manantiales y sumideros, y mostrar que $|V||z^2 - 1| = 2$. Demostrar también que las líneas de corriente son circunferencias, y representarlas. (En todos los puntos de una línea de corriente el segmento $-1 \leq x \leq 1$ subtiende un ángulo constante.)
7. Estudiar el flujo conjugado del definido en el Problema 6.

7. Los fundamentos del Análisis de variable compleja. Las condiciones de Cauchy-Riemann constituyen una de las tres grandes vías de penetración en el Análisis de variable compleja, siendo las otras dos la teoría de integración compleja y la teoría de series de potencias. Estos tres métodos de iniciar el estudio del Análisis, están ligados a los nombres de Riemann, Cauchy y Weierstrass, respectivamente. Se da en los capítulos siguientes una introducción al método de Cauchy, los cuales se fundamentan en un teorema del cálculo

de variable compleja que se conoce como teorema integral de Cauchy. En el Capítulo 6 se exponen los rudimentos del método de Weierstrass.

Suplemento de problemas del Capítulo 2.

1.1. *Descomposición en fracciones simples.* Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números complejos distintos, sea

$$Q(z) = (z - a_1)(z - a_2) \cdots (z - a_n),$$

y sea $P(z)$ un polinomio cualquiera de grado $\leq n - 1$. Demostrar que se verifica la igualdad

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{A_1}{z - a_1} + \frac{A_2}{z - a_2} + \cdots + \frac{A_n}{z - a_n} \qquad (*)$$

para todo $z \neq a_i$, viniendo definidas las constantes A_i por

$$A_i = \lim_{z \to a_i} (z - a_i) \frac{P(z)}{Q(z)} = \lim_{z \to a_i} P(z) \frac{z - a_i}{Q(z) - Q(a_i)} = \frac{P(a_i)}{Q'(a_i)}.$$

(Para demostrar que el desarrollo es posible se multiplica (*) por $Q(z)$ y se determinan los A_i imponiendo la condición de que la ecuación entre polinomios de grado $\leqslant n-1$ resultante se verifique en los n puntos a_i. Por ejemplo, cuando $n = 3$ se considera

$$P(z) = A_1(z - a_2)(z - a_3) + A_2(z - a_1)(z - a_3) + A_3(z - a_1)(z - a_2).$$

Es claro que los A_i pueden tomarse de forma que la anterior igualdad entre polinomios de grado ≤ 2 se verifique en los tres valores a_i, por lo que será una identidad. Una vez vista la posibilidad de la descomposición (*), la fórmula para calcular los A_i se obtiene por inspección del desarrollo.)

1.2. Como aplicación de lo expuesto en el Problema 1.1, desarrollar en fracciones simples

$$\frac{z^2 + 1}{z(z^2 - 1)}, \qquad \frac{z^3 + 3z^2}{z(z^2 + 1)(z^2 + 3z + 2)}, \qquad \frac{z^2 - 3z + 1}{(z^4 - 1)(z^2 + 2z + 2)}.$$

1.3. Siendo $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ las raíces de un polinomio $P(z)$ de grado $n \geqslant 2$ y $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}$ las raíces de $P'(z)$, demostrar que

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}{n} = \frac{\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_{n-1}}{n - 1}.$$

1.4. *Teorema de Gauss-Lucas.* Por definición, un semiplano es el lugar geométrico de todos los puntos z tales que $\mathrm{Re}(\alpha z + \beta) < 0$, siendo $\alpha \neq 0$ y β constantes. (a) Interpretar geométricamente esta definición. (b) Siendo $Q(z)$ un polinomio dado, definamos otro polinomio $P(z)$ por la ecuación $P(\bar{z}) = Q(z)$, siendo $\bar{z} = \alpha z + \beta$. Aplicándole a P el resultado del Ejemplo 1.3, demostrar que si todos los ceros de Q se encuentran en el semiplano $\mathrm{Re}\,\bar{z} < 0$, lo mismo puede decirse de los de Q'. (c) La intersección de todos los semiplanos que contienen un conjunto puntual dado S se llama *envoltura convexa* de S. Deducir de (b) que el conjunto de todos los ceros de Q' está contenido en la envoltura convexa del conjunto de ceros de Q. (La intersección de una familia de conjuntos es por definición el conjunto de puntos comunes a todos ellos.)

1.5. Sea $f(z)$ la función definida por la ecuación $(x^6 + y^2)f(z) = x^2yz$ para $z \neq 0$ y $f(0) = 0$. Demostrar que f no es continua en $z = 0$, a pesar de que el límite que define $f'(0)$, existe cuando $z \to 0$ a lo largo de cualquier línea recta que pase por el origen.

1.6. Demostrar: Condición necesaria y suficiente para que $f = u + iv$ sea diferenciable en un pundo dado $z = x + iy$ es que u y v sean ambas diferenciables en (x,y) y verifiquen en él las condiciones de Cauchy-Riemann.

1.7. Supongamos que en todo punto de un dominio D las funciones u y v verifiquen las condiciones de Cauchy-Riemann y que al menos una de las derivadas parciales u_x, u_y, v_x ó v_y sea continua. Demostrar que $f = u + iv$ es analítica en D. (Por resultados de Análisis real, toda función $u(x,y)$ es diferenciable en todo punto donde sus dos derivadas parciales existan y al menos una de ellas sea continua.)

2.1. *Solución trigonométrica de la cúbica.* Demostrar la identidad

$$4\mathrm{sen}^3 z - 3\,\mathrm{sen}\, z + \mathrm{sen}\, 3z = 0.$$

De acuerdo con lo explicado en el Problema 3.1 del Capítulo 1, la ecuación general de tercer grado puede siempre reducirse a la forma $w^3 + b'w + c' = 0$. Haciendo $w = ks$ con un k apropiado, reducir la ecuación anterior a

$$4s^3 - 3s + \gamma = 0.$$

Por consiguiente, si z se determina por la condición $3z = \gamma$, , una solución es $s = \mathrm{sen}\, z$.

2.2. Sea $\omega_k = \exp(2\pi ik/n)$ para $k = 1, 2, \ldots, n$ siendo n un entero positivo. Demostrar que para valores enteros de m,

$$\omega_1{}^m + \omega_2{}^m + \cdots + \omega_n{}^m = 0,$$

excepto cuando m sea múltiplo de n, en cuyo caso, la suma es n. (Obsérvese que $\omega_k = \omega_1{}^k$ y aplíquese el Ejemplo 1.5 del Capítulo 1.)

2.3. Siendo $P(z)$ un polinomio de grado $\leq 2n - 1$, demostrar que, en la notación del Problema 2.2,

$$\frac{P(\omega_1) + P(\omega_2) + \cdots + P(\omega_n)}{n} = P(0) + \frac{P^{(n)}(0)}{n!}.$$

2.4. Sea $f(z)=\exp(-z^{-4})$ para $z\neq 0$ y $f(0)=0$. Demostrar que se verifican las condiciones de Cauchy-Riemann para todo valor de z, a pesar de que f no es continua en $z=0$. (Dado que $f(z)$, es analítica cuando $z\neq 0$, es suficiente estudiar el comportamiento de la función en $z=0$.)

3.1. Denotemos por $N(\alpha)$ el número de soluciones de la ecuación $z^{\alpha}=1$. Discutir qué aspecto podría presentar la gráfica de $N(\alpha)$ para α, $0<\alpha<\infty$.

5.1. *Funciones subarmónicas.* Se dice que una función real w continua en una región R es subarmónica si verifica $w_{xx}+w_{yy}\geq 0$. Demostrar que $w=|f(z)|^2$ es subarmónica en toda región en la que f sea analítica. (Escribiendo $f=u+iv$, $w=u^2+v^2$, realizar los cálculos.)

5.2. *Principio débil del módulo máximo.* Supongamos que w sea subarmónica en una región acotada R, continua sobre $\overline{R}$, y tal que en la frontera de la región, $w\leq m$, siendo m una constante. Demostrar que $w\leq m$ en R. (En caso contrario

$$w(x_0,y_0)=m+\delta, \qquad \delta>0,$$

en algún punto interior (x_0,y_0). Definamos

$$W(x,y)=w(x,y)+\epsilon x^2$$

tomándose la constante positiva ϵ lo suficientemente pequeña como para que $\epsilon x^2<\delta$ en todo punto de $\overline{R}$. Se comprueba sin dificultad que se verifica $W<m+\delta$ en la frontera, y que en cambio, $W\geq m+\delta$ en (x_0,y_0) . Por consiguiente W alcanza su valor máximo en $\overline{R}$ en un punto interior. Por cálculo de variable real, se verifica $W_{xx}\leqslant 0$ y $W_{yy}\leqslant 0$ en el máximo, y por consiguiente $w_{xx}+w_{yy}\leqslant -2\epsilon$ en dicho punto.)

5.3. *Teorema fundamental del Algebra.* Demostrar que todo polinomio no constante posee al menos una raíz. (Si $P(z)$ no se anula nunca, la función $f(z)=1/P(z)$ es entera, Si P no es constante, entonces $|P(z)|\to\infty$ cuando $|z|\to\infty$, y por consiguiente $|f(z)|\to 0$ cuando $|z|\to\infty$. Por consiguiente, podemos hallar un disco $|z|\leqslant r$ tal que sobre $|z|=r$ se verifique $|f(z)|<|f(0)|$ lo que contradice el resultado del Problema 5.2.)

5.4. *Unicidad.* Sean $\tilde{u}$ y u funciones armónicas en una región acotada R y continuas sobre $\overline{R}$. Si sobre la frontera de la región se verifica $u=\tilde{u}$, demostrar que lo mismo ocurre en toda la región R. (Aplicar el Problema 5.2 a las funciones $u-\tilde{u}$ y $\tilde{u}-u$.)

6.1. *Flujo alrededor de una circunferencia.* (a) Si $f(z)=z+z^{-1}$, demostrar que la línea de corriente $\psi=0$ está formada por el eje x y la circunferencia $|z|=1$. Estudiando el comportamiento de $f(z)$ cuando $z\to\infty$, interpretar el resultado como el potencial complejo de un flujo uniforme que rodea un obstáculo circular. Dibujar también algunas líneas de corriente. (b) Hallar la velocidad en los puntos $z=e^{i\theta}$ de lá circunferencia y demostrar que la velocidad máxima es el doble de la velocidad original del flujo uniforme. (c) Hallar la presión sobre el contorno de la circunferencia y mostrar, por simetría o por cualquier otro procedimiento, que la fuerza total resultante sobre la circunferencia es 0. Este curioso hecho se llama a veces *la paradoja hidrodinámica.* (d) Si se le suma a $f(z)$ el término $-ic\log z$, siendo $c>0$ constante, demostrar que la circunferencia continúa siendo una línea de corriente, pero que ahora la resultante de las fuerzas aplicadas sobre el círculo no es nula, siendo perpendicular a la dirección del flujo uniforme y cuyo módulo es proporcional a la circulación.

6.2. *Método de Rankine.* (a) Supongamos que dos familias de curvas, $f(x,y) = \text{const}$ y $g(x,y) = \text{const}$ sean tales que cada curva f corte exactamente a una curva g, y viceversa. Explicar por qué la familia

$$f(x,y) + g(x,y) = \text{const}$$

puede obtenerse uniendo los puntos de intersección, como se sugiere en la Figura 7-1. (b) Aplicar este método para dibujar las líneas de corriente asociadas con $f(z) = z + \log z$, e interpretar el resultado como representación del flujo en la popa de un barco.

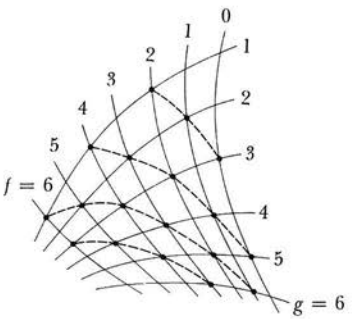


Figura 7-1

6.3. Un punto en el que $V = 0$ se llama *punto de estancamiento.* Hallar el punto de estancamiento de $f(z) = \alpha(z - z_0)^2$, siendo $\alpha \neq 0$ y z_0 constantes, y demostrar que en él dos líneas de corriente se cortan en ángulo recto. Mediante la teoría de series de potencias que se desarrollará más adelante, puede demostrarse que una situación análoga tiene lugar en todo punto de estancamiento en el cual $f'(z_0) = 0$ y $f''(z_0) \neq 0$.

6.4. Sean p y q dos funciones diferenciales con continuidad que verifiquen $P_y = q_x$ en una región apropiada (ver la Figura 5.1) Demostrar que la función definida mediante

$$\phi(x,y) = \int_{x_0}^{x} p(x,y)\,dx + \int_{y_0}^{y} q(x_0,y)\,dy$$

verifica $\phi_x = p$ y $\phi_y = q$.

6.5. Si como ocurre en el Problema 6.4, $p = \phi_x$ y $q = \phi_y$, calcular las cuatro integrales (6.1) explícitamente en función de ϕ y mostrar de este modo que (6.1) es nula.

6.6. Para este problema se requiere conocer la teoría de campos. (a) Dado un flujo fluido para el cual la velocidad $\mathbf{v}$ es diferenciable con continuidad, formular los conceptos de flujo total hacia el exterior y circulación total mediante integrales de superficie e integrales curvilíneas, respectivamente. (b) En virtud de los teoremas de Gauss y Stokes, respectivamente, obtener las ecuaciones

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \qquad \operatorname{rot} \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

en los puntos interiores a una región de comportamiento ideal del fluido. (c) Cuando se escribe $\mathbf{v} = p\mathbf{i} + q\mathbf{j}$, mostrar que la forma cartesiana de estas ecuaciones se reduce a las ecuaciones de Cauchy-Riemann para la función $p - iq$. Mediante la teoría de campos conservativos, discutir la existencia de potenciales para ϕ y ψ.

Capítulo 3

La integración de variable compleja

Las funciones analíticas no solamente son diferenciables sino que admiten derivadas continuas de todos los órdenes, siendo posible incluso desarrollarlas en serie de Taylor convergente. Consecuencia de esto es que una función analítica está totalmente determinada en todo su dominio de analiticidad por los valores que tome sobre una curva de longitud arbitrariamente pequeña contenida en dicho dominio. Se verifica también que una función analítica en un dominio no puede alcanzar en él su módulo máximo so pena de reducirse a una constante. Resulta dificultoso establecer directamente estos hechos, pero es fácil deducirlos de la teoría de la integración de las funciones complejas. Una fórmula integral debida a Cauchy expresa el valor de una función analítica en cada punto de un disco en función de sus valores sobre el borde; de la estructura de esta fórmula se deducen las propiedades de las funciones analíticas que se han mencionado arriba.

***1. Integración sobre un contorno.** Se realiza la integración de una función compleja sobre una curva, lo que conduce a resultados de gran trascendencia tanto en la Matemática pura como en la aplicada. En esta sección se estudian en primer lugar las funciones de variable real a valores complejos, a continuación las curvas, y finalmente, la integración sobre curvas.

Una función ϕ de la variable real t se dice que es de valores complejos en el intervalo $a \leq t \leq b$ si se verifica en ese intervalo que

$$\phi(t) = \phi_1(t) + i\ \phi_2(t)$$

en donde ϕ_1 y ϕ_2 son funciones reales. En esta expresión ϕ_1 se llama parte real de ϕ, análogamente ϕ_2 es la parte imaginaria. Por ejemplo, e^{it} es una función de valores complejos en todos los intervalos. La parte real de esta función es cos t y la imaginaria, sen t.

Una función $\phi(t)$ de valores complejos es continua en el punto t_0 cuando se verifica

$$\lim_{t \to t_0} |\phi(t) - \phi(t_0)| = 0$$

entendiéndose el límite en el sentido ordinario para funciones reales. La condición anterior puede expresarse también en la forma (ϵ,δ). Cuando ϕ es continua en todos los puntos del intervalo se dice que ϕ es continua en el intervalo. Un convenio parecido para

hacer extensivos a un intervalo conceptos definidos para puntos, se aplicará también a propiedades que serán expuestas más tarde.

Si ϕ es continua, lo mismo ocurre con ϕ_1 y ϕ_2. En efecto, como $|\text{Re } z| \leq |z|$, se tiene

$$|\phi_1(t) - \phi_1(t_0)| \leq |\phi(t) - \phi(t_0)|,$$

y si el segundo miembro tiende hacia cero cuando $t \to t_0$, también el primero. Por lo tanto cuando ϕ es continua en t_0 lo es también ϕ_1. Un razonamiento parecido permite establecer esta misma propiedad para ϕ_2. Recíprocamente, si ϕ_1 y ϕ_2 son continuas también lo es ϕ, como se deduce de la desigualdad

$$|z| \leq |\text{Re } z| + |\text{Im } z|$$

aplicada a la función $\phi(t) - \phi(t_0)$.

Se dice que una función ϕ de valores complejos es diferenciable si lo son ϕ_1 y ϕ_2, y en este caso se toma por definición

$$\phi'(t) = \phi_1'(t) + i\ \phi_2'(t). \tag{1.1}$$

se comprueba fácilmente que la suma, la diferencia, el producto y el cociente de funciones de valores complejos pueden derivarse de la misma forma que las funciones reales. También es válida la regla de la cadena,[1] enunciada de la forma siguiente: Si F es analítica en el punto $z=\zeta(t)$, y si existe $\zeta'(t)$ entonces la función $\phi(t) = F[\zeta(t)]$ es diferenciable en t y se verifica

$$\phi'(t) = F'[\zeta(t)]\zeta'(t). \tag{1.2}$$

Se dice que una función $\phi = \phi_1 + i\phi_2$ de valores complejos es integrable sobre un intervalo $[a,b]$ cuando lo son ϕ_1 y ϕ_2, y entonces, por definición,

$$\int_a^b \phi(t)\, dt = \int_a^b \phi_1(t)\, dt + i\int_a^b \phi_2(t)\, dt. \tag{1.3}$$

Muchas de las reglas ordinarias de integración de funciones reales pueden trasladarse sin más al caso complejo. En particular, las dos formas del teorema fundamental del Cálculo para funciones reales dan resultados formalmente idénticos para funciones de valores complejos. Explícitamente,

[1] Ver el Problema 9.

$$\frac{d}{dt}\int_a^t \phi(\tau)\,d\tau = \phi(t), \qquad \int_a^b \phi'(t)\,dt = \phi(t)\Big|_a^b \tag{1.4}$$

cuando ϕ o ϕ' son continuas, respectivamente. En la última fórmula el segundo miembro significa $\phi(b) - \phi(a)$, como en el Análisis real.

Las funciones de valores complejos se utilizan sobre todo para describir analíticamente curvas en el plano complejo. Como se recordará del Análisis real, se puede definir una curva mediante las ecuaciones paramétricas

$$x = \xi(t), \qquad y = \eta(t)$$

en las que ξ y η son funciones reales definidas en cierto intervalo

$$a \leq t \leq b.$$

Se dice que la curva es continua cuando ξ y η son continuas; diferenciable cuando ξ y η son diferenciables, y así sucesivamente. Si definimos

$$\zeta(t) = \xi(t) + i\eta(t), \qquad z = x + iy,$$

las ecuaciones simultáneas $x = \xi(t), y = \eta(t)$ son equivalentes a la única ecuación $z = \zeta(t)$. Como es evidente, la función $\zeta(t)$ que aparece en esta representación toma valores complejos. Quizás convenga añadir que no se hace distinción lógica entre la curva y la función, de manera que desde el punto de vista lógico, la curva "es" la función.

Por cuestión de terminología, el conjunto de puntos ocupados por una curva se llama la *traza* de la curva, y se dice que una curva se halla en una cierta región cuando su traza está contenida en ella. Una curva se llama *simple* si no se corta a sí misma, esto es, si $\zeta(t_1) \neq \zeta(t_2)$ cada vez que $t_1 \neq t_2$, con la posible excepción de $\zeta(a) = \zeta(b)$ que es permisible. Se dice en este último caso que la curva es cerrada. Exceptuando el caso $\zeta(a) = \zeta(b)$, existe una biyección entre los puntos de la curva simple y los del intervalo $a \leqslant t \leqslant b$. Cuando t aumenta desde a hasta b la curva se recorre desde el origen $\zeta(a)$ hasta el extremo $\zeta(b)$. Una curva continuamente diferenciable se llama *arco*. Así pues, un arco está dado por la ecuación $z = \zeta(t)$ sobre un cierto intervalo $a \leqslant t \leqslant b$, en el cual $\zeta'(t)$ es continua. No se excluye la posibilidad de que $\zeta(a) = \zeta(b)$. Así ocurre, por ejemplo, con el arco

$$z = \operatorname{sen} t + i \operatorname{sen} 2t, \qquad 0 \leq t \leq \pi.$$

Este arco y su sentido de recorrido para valores crecientes de t se muestran en la Figura 1.1. La utilización de la terminología anterior se ilustra más ampliamente en la Figura 1-2.

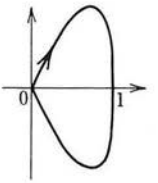


Figura 1-1

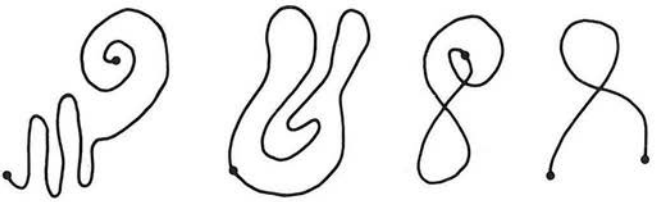


Figura 1-2

Se dice que una función $f(z)$ de valores complejos es continua sobre el arco C cuando la función

$$\phi(t) = f[\zeta(t)]$$

es continua para $a \leqslant t \leqslant b$. En virtud de conocidos teoremas relativos a la continuidad de las funciones compuestas, se ve que f es continua sobre C si f es continua en una región del plano complejo que contenga a C. Si f es continua sobre C, la integral de f sobre C es por definición

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f[\zeta(t)]\zeta'(t)\,dt. \tag{1.5}$$

Conviene notar que el integrando del segundo miembro sería el obtenido al hacer en el primero la sustitución formal

$$z = \zeta(t), \qquad dz = \zeta'(t)\,dt$$

El arco C descrito desde $t = b$ hasta $t = a$, esto es, en el sentido opuesto, se denota por $-C$. Puesto que

$$\int_b^a f[\zeta(t)]\zeta'(t)\,dt = -\int_a^b f[\zeta(t)]\zeta'(t)\,dt,$$

se deduce que

$$\int_{-C} f(z)\,dz = -\int_C f(z)\,dz. \tag{1.6}$$

La integración compleja es una operación lineal, es decir,

$$\int_C [\alpha f(z) + \beta g(z)]\,dz = \alpha \int_C f(z)\,dz + \beta \int_C g(z)\,dz \tag{1.7}$$

siendo α y β constantes complejas y f y g funciones continuas sobre el arco C. este resultado se deduce de (1.5) y de conocidas propiedades de las integrales reales.

Si $F(z)$ tiene derivada continua $F'(z)$ en un dominio que contenga al arco C es válido el teorema fundamental del Cálculo en la forma siguiente

$$\int_C F'(z)\,dz = F(z_2) - F(z_1) \tag{1.8}$$

siendo z_1 el origen de C y z_2 su extremo. En efecto, la regla de la cadena juntamente con la segunda de las relaciones (1.4) dan

$$\int_a^b F'[\zeta(t)]\zeta'(t)\,dt = \int_a^b \frac{d}{dt} F[\zeta(t)]\,dt = F[\zeta(t)]\Big|_a^b.$$

Dado que $z_1 = \zeta(a)$ y $z_2 = \zeta(b)$, esta igualdad es la (1.8).

Los resultados anteriores pueden extenderse por adición a curvas más generales. Consideremos para cada $j = 1, 2, \ldots, n$, un arco C_j dado por

$$z = \zeta_j(t), \qquad a_j \leq t \leq b_j.$$

Se dice que los arcos anteriores forman un *contorno* C cuando el extremo de cada C_j coincide con el origen de C_{j+1} para $j = 1, 2, \ldots, n-1$. La terminología que se introdujo anteriormente se extiende de manera natural a contornos. Del mismo modo, si f es continua sobre C, esto es, si es continua sobre cada C_j, se define su integral sobre C mediante la ecuación

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz + \cdots + \int_{C_n} f(z)\,dz.$$

Aplicando la propiedad (1.7) a cada C_j y sumando, hallamos que (1.7) sigue siendo válida cuando C es un contorno. Análogamente, si definimos $-C$ sustituyendo cada C_j, por $-C_j$, se halla que (1.6) sigue siendo válida para contornos.

El siguiente teorema nos facilita la integración de las funciones más usuales:

TEOREMA 1.1 *Sea $F(z)$ una función analítica con derivada continua $f(z) = F'(z)$ en un dominio D. Sea C un contorno contenido en D, de origen z_1 y extremo z_2 entonces*

$$\int_C f(z)\,dz = F(z_2) - F(z_1).$$

El teorema se demuestra sumando las fórmulas (1.8) correspondintes a los arcos C_j. La expresión $F(z_2) - F(z_1)$ se llama variación de F a lo largo de C y se escribe a veces en la forma

$$F(z)\Big|_C = F(z_2) - F(z_1)$$

siendo z_1 el origen y z_2 el extremo de C.

El Teorema 1.1 nos señala que el resultado de la integración depende solamente del origen y del extremo de C, y por consiguiente es posible utilizar la notación

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz = F(z_2) - F(z_1) \tag{1.9}$$

sobreentendiéndose que el camino de integración es un contorno C de extremos z_1 y z_2, contenido en D, sin imponerle ninguna otra restricción. Se dice entonces, por brevedad, que la integral es independiente del camino. De la independencia del camino se deduce que para curvas cerradas C,

$$\int_C f(z)\,dz = 0, \qquad C \text{ cerradas} \tag{1.10}$$

ya que es posible sustituir C por otro "contorno" de longitud cero que una z_1 con z_2. Recíprocamente, si (1.10) es válida para todo contorno cerrado contenido en D, se comprueba fácilmente que la integral (1.9) es independiente del camino.

El Teorema 1.1. implica (1.10) si se supone satisfecha la condición fundamental $F'(z) = f(z)$ Uno de los principales objetivos de este capítulo es extender este resultado para funciones analíticas $f(z)$ para las cuales no sea fácil asegurar la existencia de una función F tal que $F'=f$. Una función de este tipo es la sen z^2. Se demostrará más adelante que si

$$F(z) = \int_0^z \operatorname{sen} \zeta^2 \, d\zeta$$

efectuándose la integración a lo largo de un segmento rectilíneo que une 0 con z, entonces $F(z)$ es analítica para todo z y además $F'(z) = \operatorname{sen} z^2$. Se deduce de lo anterior que sobre cualquier contorno cerrado C,

$$\int_C \operatorname{sen} z^2 \, dz = 0.$$

Ejemplo 1.1. Sea C la curva $z = z_0 + \rho e^{it}$, $a \leq t \leq b$, siendo constantes z_0 y $\rho \neq 0$. Demostrar que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{dz}{z - z_0} = \frac{b - a}{2\pi}$$

y deducir que esta expresión toma un valor entero N si y solamente si C es un contorno cerrado.

El primer resultado se obtiene haciendo la sustitución

$$z - z_0 = \rho e^{it}, \qquad dz = i\rho e^{it}$$

en el integrando, y efectuando la integración desde a hasta b. La segunda es consecuencia de las propiedades de periodicidad de e^z, que ponen de manifiesto que

$$e^{ia} = e^{ib}$$

es válida si y solamente si $b - a = 2\pi N$ para algún entero N.

Cuando C es cerrado, el número entero N se llama el *número de vueltas* y también el *índice* de C respecto del punto z_0. Desde el punto de vista geométrico, representa el número de veces que el punto z rodea al z_0 cuando z recorre C.

Ejemplo 1.2. Siendo n un número entero, $n \neq -1$, demostrar que

$$\int_{z_1}^{z_2} z^n \, dz = \frac{{z_2}^{n+1} - {z_1}^{n+1}}{n + 1}$$

suponiendo, cuando $n < 0$, que el camino de integración no pasa por el origen. El resultado se obtiene tomando en el Teorema 1.1 $F(z) = z^{n+1}/(n + 1)$. Análogamente,

$$\int_{z_1}^{z_2} e^z \, dz = e^{z_2} - e^{z_1}, \qquad \int_{z_1}^{z_2} \operatorname{sen} z \, dz = -\cos z_2 + \cos z_1,$$

Ejemplo 1.3 Supongamos que f y g sean funciones analíticas en el dominio D con derivadas continuas f' y g' en dicho dominio. Demostrar que la fórmula

$$\int_C f(z)g'(z)\,dz = f(z)g(z)\Big|_C - \int_C f'(z)g(z)\,dz$$

es válida cuando C es un contorno contenido en D; en otras palabras, que el procedimiento de integración por partes es válido en el plano complejo. El resultado se obtiene sin más que integrar

$$\frac{d}{dz}(fg) = f'g + fg'$$

y aplicar el Teorema 1.1. para calcular el primer miembro.

Problemas.

1. Sea C un contorno cerrado y n un número entero. Demostrar que

$$\int_C z^n\,dz = 0 \qquad (n \neq -1)$$

suponiendo, cuando $n < 0$, que el origen no se halla sobre C. ¿Qué valor toma la integral si $n = -1$ y C es la circunferencia $z = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$?

2. (a) Cada una de las ecuaciones siguientes describe un arco cuando $0 \leq t \leq 1$. Dibujar el arco e indicar su sentido de recorrido.

$$z = 1 + it, \qquad z = e^{-\pi it}, \qquad z = 3e^{2\pi it}, \qquad z = e^{4\pi it}, \qquad z = 1 + it + t^2.$$

(b) Utilizando el Teorema 1.1 cuando convenga, integrar las funciones siguientes sobre los arcos de la parte (a): $4z^3$, $\bar{z}$, $1/z$.

3. Si $f'(z) = 0$ en todo el dominio D, hacer uso del Teorema 1.1 para demostrar que f es constante sobre D.
4. Siendo C_0 el arco $z = \zeta(t)$ y α una constante compleja, se define el *arco trasladado*, C_α, mediante la ecuación $z = \zeta(t) + \alpha$. Suponiendo que f sea continua, demostrar que

$$\int_{C_0} f(z + \alpha)\,dz = \int_{C_\alpha} f(z)\,dz.$$

5. Sea $\alpha = a + ib$, donde a y b son constantes. Integrando e^{at} e igualando las partes reales, deducir la fórmula

$$(a^2 + b^2)\int_0^t e^{at} \cos bt\, dt = e^{at}(a \cos bt + b \operatorname{sen} bt) - a.$$

6. Sean $F = F_1 + iF_2$ y $G = G_1 + iG_2$ dos funciones diferenciables de valores complejos de la variable real t. Obténganse las fórmulas

$$(F + G)' = F' + G', \qquad (FG)' = FG' + GF'$$

de otras fórmulas parecidas ya conocidas para funciones reales.

7. Sea $z = \zeta(t)$ $a \leq t \leq b$, un arco. Utilizando que $\zeta' = \xi' + i\eta'$ o lo que es igual,

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{dx}{dt} + i\frac{dy}{dt},$$

interpretar geométricamente $\zeta'(t)$ como la representación en forma compleja de un vector tangente al arco en cualquier punto donde $\zeta'(t)$ no sea 0. Asimismo, interpretar geométricamente $|\zeta'(t)|$ como ds/dt siendo s la longitud de arco.

8. Se define frecuentemente la derivada de una función $z = \zeta(t)$ de valores complejos en la forma

$$\zeta'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} \qquad \text{donde} \qquad \Delta z = \zeta(t + \Delta t) - \zeta(t).$$

(a) Demostrar que esta definición es equivalente a la dada en el texto.
(b) Interpretar geométricamente Δz, $\Delta z/\Delta t$ y $|\Delta z|$ mediante una representación gráfica, y comparar los resultados con los del Problema 7.

9. Demostrar la regla de la cadena. Idea de la demostración: En la igualdad (1.2) sea

$$F(z) = u(x,y) + iv(x,y), \qquad \zeta(t) = \xi(t) + i\eta(t)$$

con lo que $\phi(t) = u(\xi,\eta) + iv(\xi,\eta)$ donde hemos escrito ξ en lugar de $\xi(t)$ y η en el de $\eta(t)$. Aplicando la regla de la cadena para funciones reales y a continuación las condiciones de Cauchy-Riemann para F se tiene

$$\phi'(t) = [u_x(\xi,\eta) + iv_x(\xi,\eta)](\xi' + i\eta').$$

10. Consideremos $\zeta(t) = t^2$ para $-1 \leq t \leq 0$ y $\zeta(t) = it^2$ para $0 \leq t \leq 1$. Demostrar que la curva $z = \zeta(t)$, $-1 \leq t \leq 1$, es un arco, aunque tenga un punto anguloso.

11. *El logaritmo continuo.* Supongamos que $z = \zeta(t)$, $a \leq t \leq b$, represente un arco que no pasa por el punto α, y definamos

$$L(t) = \int_a^t \frac{\zeta'(t)}{\zeta(t) - \alpha}\, dt, \qquad a \leq t \leq b.$$

Demostrar que la función $J(t) = e^{-L(t)}\,[\zeta(t) - \alpha]$ verifica $J'(t) = 0$, y que, por consiguiente, es constante. Determinar la constante haciendo $t = a$, y deducir que

$$e^{L(t)} = \frac{\zeta(t) - \alpha}{\zeta(a) - \alpha}, \qquad a \leq t \leq b.$$

12. Demostrar que dos arcos simples pueden tener infinitos puntos de intersección sin que coincidan en algún intervalo, y que un contorno puede tener infinitos puntos aislados de intersección consigo mismo. (Considérese $z = \zeta(t)$, donde $\zeta(t) = -t$, $-1 \leqslant t \leqslant 0$, y $\zeta(t) = t + it^3 \operatorname{sen}(1/t)$, $0 < t \leqslant 1$.)

*2. **Otras propiedades de las integrales. Invariancia.** Si $F(t)$ es una función continua de valores complejos para $a \leq t \leq b$, se demostrará que

$$\left| \int_a^b F(t)\, dt \right| \leq \int_a^b |F(t)|\, dt, \tag{2.1}$$

es decir, que el valor absoluto de una integral no es nunca mayor que la integral del valor absoluto del integrando. La desigualdad (2.1) es consecuencia de la conocida desigualdad

$$\int_a^b g(t)\, dt \leq \int_a^b G(t)\, dt \tag{2.2}$$

que es válida si g y G son continuas y verifican $g(t) \leq G(t)$ sobre el intervalo $a \leq t \leq b$.

En efecto, si la integral del primer miembro de (2.1) es cero, el resultado es evidente. Si no es cero, es un número complejo que escrito en forma polar, es

$$\int_a^b F(t)\, dt = Je^{i\theta}, \qquad J > 0.$$

Como θ es constante, al multiplicar por $e^{-i\theta}$ se obtiene

$$J = \int_a^b e^{-i\theta} F(t)\, dt = \int_a^b \operatorname{Re} e^{-i\theta} F(t)\, dt + i \int_a^b \operatorname{Im} e^{-i\theta} F(t)\, dt \tag{2.3}$$

en la cual la segunda igualdad resulta de la definición de integral para funciones de valores complejos. Como J es real, la última expresión integral de (2.3) es nula. Si ahora ponemos

$$g(t) = \operatorname{Re} e^{-i\theta}F(t), \qquad G(t) = |F(t)|,$$

se tiene entonces $g(t) \leq G(t)$, y por consiguiente (2.3) y (2.2) dan

$$J = \int_a^b g(t)\,dt \leq \int_a^b |F(t)|\,dt.$$

Esta desigualdad es la (2.1) Como se verá a continuación, también es válida una desigualdad parecida para las integrales sobre arcos o contornos.

Supongamos que $f(z)$ sea continua sobre un arco C dado por $z = \zeta(t)$, $a \leq t \leq b$. Como por definición

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f[\zeta(t)]\zeta'(t)\,dt, \tag{2.4}$$

tomando $F(t) = f[\zeta(t)]\zeta'(t)$ en (2.1) se tiene

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \leq \int_a^b |f[\zeta(t)]||\zeta'(t)|\,dt. \tag{2.5}$$

Sea M una constante para la que se verifique $|f(z)| \leq M$ sobre C. Entonces la acotación (2.5) da

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \leq M\int_a^b |\zeta'(t)|\,dt. \tag{2.6}$$

Puesto que $\zeta = x + iy$ sobre C, derivando

$$|\zeta'(t)| = \left|\frac{dx}{dt} + i\frac{dy}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}.$$

Se observa que esta expresión es ds/dt, donde s es la longitud de arco medida desde el punto $\zeta(a)$ de C. Así pues, la integral del segundo miembro de (2.6) es la longitud L del arco C.

Si s es la longitud de arco sobre C medida desde el punto $\zeta(a)$, la primera y segunda integrales de la fórmula que sigue son, por definición, iguales a la tercera:

$$\int_C f(z)\,ds = \int_C f(z)|dz| = \int_a^b f[\zeta(t)]|\zeta'(t)|\,dt.$$

Con esta notación, la desigualdad (2.5) es equivalente a la

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \leq \int_C |f(z)||dz|, \tag{2.7}$$

y (2.6) puede entonces escribirse en la forma

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \leq M\int_C |dz| = ML.$$

Estas desigualdades pueden extenderse por adición de arcos a contornos. En esta forma general la acotación (2.6) puede enunciarse así:

TEOREMA 2.1. *Supongamos que f(z) sea continua sobre un contorno C. Entonces*

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \leq ML$$

siendo L la longitud de C y M una cota superior de |f| sobre C.

Como ya se ha hecho notar, una curva está asociada a una representación paramétrica $z = \zeta(t), a \leq t \leq b$. No obstante, la magnitud L que aparece en el Teorema 2.1 tiene un sentido geométrico evidente, que en gran medida es independiente de la representación paramétrica de la curva. Una observación parecida es válida para la integración sobre contornos. A pesar de que en la definición (2.4) se utiliza la representación particular $z = \zeta(t)$ de la curva C, el resultado de la integración resulta también en gran parte independiente de esta representación.

Para poner de manifiesto este hecho, sea C_1 un arco $z = \zeta(t), 0 \leq t \leq 2$, y sea C_2 el arco $z = \zeta(2\tau - 4)$, $2 \leq \tau \leq 3$. Se comprueba fácilmente que C_1 y C_2 tienen el mismo origen y el mismo extremo, así como la misma traza. Además, para toda función f que sea continua en una región que contenga a C_2 y a C_1 se verifica la igualdad

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz \tag{2.8}$$

Para comprobarlo, observemos que por la regla de la cadena

$$\frac{d}{d\tau}\zeta(2\tau - 4) = 2\zeta'(2\tau - 4).$$

De aquí,

$$\int_{C_2} f(z)\,dz = \int_2^3 f[\zeta(2\tau - 4)]2\zeta'(2\tau - 4)\,d\tau. \tag{2.9}$$

Tomando $t = 2\tau - 4$ como nueva variable de integración, y aplicando a las partes real e imaginaria de la integral las reglas para el cambio de variable de las integrales reales, se ve que (2.9) se reduce a

$$\int_0^2 f[\zeta(t)]\zeta'(t)\,dt.$$

Esta es la primera de las integrales (2.8).

En el ejemplo anterior las curvas C_1 y C_2 están relacionadas mediante un cambio lineal de parámetro, $t = 2\tau - 4$. Se podría escribir con más generalidad $t = \phi(\tau)$. La igualdad (2.8) continúa siendo válida para amplias clases de funciones ϕ, efectuándose la comprobación mediante un razonamiento parecido al anterior.[1] Se dice, brevemente, que la integral es invariante frente a cambios de parámetro admisibles.

En la teoría de integración se considera que las curvas C_1 y C_2 son equivalentes cuando tienen la misma traza y se verifica la condición (2.8) para todas las funciones f que sean continuas en alguna región que contenga a dicha traza. De la misma forma, podemos escribir

$$C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$$

si se verifica que

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz + \cdots + \int_{C_n} f(z)\,dz$$

para toda función continua f. Así ocurre, por ejemplo, cuando C es un contorno formado por varios arcos, como se ha explicado ya en la sección precedente.

Se puede demostrar que dos arcos simples no cerrados son equivalentes si y solamente si tienen la misma traza, el mismo origen y el mismo extremo. Lo mismo es válido para arcos cerrados si se añade la condición evidente de que ambos sean recorridos en el mismo sentido. En este último caso carece de importancia cual es el punto sea considerado como origen y como extremo.

El motivo de que las consideraciones anteriores sean importantes desde el punto de vista práctico es que permiten efectuar la integración sobre curvas simples para cualquier elección conveniente del parámetro, elección que a veces no se especifica. Se puede pues

1 En el problema 8 se considera un caso más general.

hablar de integración sobre la circunferencia $|z| = 1$, sobre el contorno del cuadrado unidad, etc. En el Ejemplo 2.1 se explican algunos convenios necesarios para que los resultados estén definidos sin ambigüedad.

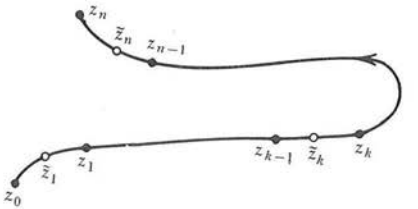


Figura 2-1

Terminaremos esta discusión acerca de las propiedades de invariancia mencionando otra definición de la integral compleja con la cual las propiedades de invariancia resultan bastante evidentes. Aunque la definición (2.4) es completamente satisfactoria para desarrollar rigurosamente la teoría, las observaciones siguientes dan una visión intrínseca del problema, que frecuentemente es de utilidad.

Dividamos el arco C en arcos parciales (z_k, z_{k+1}) mediante los puntos $z_0, z_1, \ldots, z_n$ sea $\tilde{z}_k$ un punto de C comprendido entre z_{k-1} y z_k como se indica en la Figura 2.1. Si C está dado por $z = \zeta(t), a \leq t \leq b$, y si

$$z_k = \zeta(t_k), \qquad \tilde{z}_k = \zeta(\tilde{t}_k),$$

afirmar que $\tilde{z}_k$ se halla entre z_{k-1} y z_k significa que

$$t_{k-1} \leq \tilde{t}_k \leq t_k.$$

Supondremos también que z_0 y z_n son, respectivamente, el origen y el extremo de C, con lo que

$$z_0 = \zeta(a), \qquad z_n = \zeta(b).$$

Dada una función f continua sobre C definimos

$$J = \sum_{k=1}^{n} f(\tilde{z}_k)\, \Delta z_k \tag{2.10}$$

en donde $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$. Convendrá considerar una sucesión de subdivisiones que se irán haciendo más y más finas conforme se vayan eligiendo más y más puntos z_k. De manera precisa, hay que exigir que

$$n \to \infty \qquad \text{y} \qquad \max_k \Delta t_k \to 0$$

siendo $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$. En virtud de la continuidad de $\zeta(t)$, la condición anterior implica también

$$n \to \infty \qquad \text{y} \qquad |\Delta z_k| \to 0.$$

Cuando se verifican estas condiciones, se dice, para abreviar, que la subdivisión se hace arbitrariamente fina. Se demostrará que J posee un único límite J_0, y que este límite es independiente del procedimiento de subdivisión, con tal de que ésta se haga arbitrariamente fina. Además, el límite J_0 coincide con el valor de la integral compleja calculado según la definición (2.4).

Sea ϵ un número positivo dado. Si la subdivisión es suficientemente fina, en virtud de la continuidad uniforme de f se tiene que

$$|f(\tilde{z}_k) - f(z_k)| \leq \epsilon, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Por consiguiente, sustituyendo en (2.10) $f(\tilde{z}_k)$ por $f(z_k)$, el error cometido no es mayor que

$$\epsilon(|\Delta z_1| + |\Delta z_2| + \cdots + |\Delta z_n|).$$

Geométricamente $|\Delta z_k|$ representa la longitud del segmento rectilíneo que une z_{k-1} con z_k, y esta longitud no es nunca mayor que la longitud del arco de C que une ambos puntos. Así pues, podemos afirmar que

$$\left| \sum f(\tilde{z}_k)\, \Delta z_k - \sum f(z_k)\, \Delta z_k \right| \leq \epsilon L$$

siendo L la longitud de C.

El segundo paso de la demostración consiste en observar que

$$\Delta z_k = \zeta(t_k) - \zeta(t_{k-1}) = \zeta'(t_k)\, \Delta t_k + \epsilon_k\, \Delta t_k, \tag{2.11}$$

donde, si la subdivisión es suficientemente fina, $|\epsilon_k| \leq \epsilon$. En efecto, si ponemos $\zeta = \xi + i\eta$ el teorema del valor medio nos da dos relaciones de la forma

$$\xi(t_k) - \xi(t_{k-1}) = \xi'(t_k')\, \Delta t_k, \qquad \eta(t_k) - \eta(t_{k-1}) = \eta'(t_k'')\, \Delta t_k.$$

Como ξ' y η' son ambas continuas, es fácil dar una cota superior del error cometido al sustituir los dos puntos intermedios t_k' y t_k'' por t_k. El resultado es la expresión (2.11). La ecuación (2.11) indica que si se sustituye en J el término Δz_k por $\zeta'(t_k)\,\Delta t_k$, el error cometido es menor que

$$\epsilon M(\Delta t_1 + \Delta t_2 + \cdots + \Delta t_n)$$

siendo M una cota superior de $|f(z)|$ sobre C. Esta expresión, es sencillamente,

$$\epsilon M(b - a).$$

Para el tercer y último paso de la demostración observaremos que la suma

$$\sum f[\zeta(t_k)]\zeta'(t_k)\,\Delta t_k$$

se aproxima a la integral

$$J_0 = \int_a^b f[\zeta(t)]\zeta'(t)\,dt \tag{2.12}$$

tanto como se desee sin más que tomar la subdivisión suficientemente fina. Esta proposición se deduce del hecho de que las partes real e imaginaria de (2.12) son integrales reales de Riemann, cuya existencia está garantizada por resultados del análisis real.

Reuniendo las acotaciones anteriores, concluimos que

$$|J - J_0| \leq \epsilon L + \epsilon M(b - a) + \epsilon \tag{2.13}$$

si la subdivisión es suficientemente fina. El término ϵL surge de reemplazar $\tilde{z}_k$ por z_k, el término $\epsilon M(b - a)$ se debe a la sustitución de Δz_k por $\zeta'(t_k)\,\Delta t_k$, y el ϵ final aparece al aproximar la integral J_0 por una suma finita. Puesto que puede elegirse arbitrariamente pequeño, (2.13) indica que $J \to J_0$ cuando la subdivisión se hace arbitrariamente pequeña, lo que completa la demostración.

Ejemplo 2.1. Dar representaciones paramétricas adecuadas e inadecuadas para calcular la integral

$$\int_C f(z)\,dz \tag{2.14}$$

siendo C la circunferencia $|z| = 1$.

Cuando se da un camino de integración especificando solamente su traza, se supone siempre que la curva en cuestión es simple. Por consiguiente la parametrización

$$z = e^{it}, \qquad 0 \leq t \leq 4\pi,$$

no es adecuada para (2.14), pues con ella la circunferencia se recorre dos veces. Con respecto al sentido de recorrido, si no se especifica otra cosa, se adopta el siguiente convenio: se supone que la tangente en cada punto está recorrida en el mismo sentido que la curva. Entonces la curva ha de recorrerse en el sentido que haga que al girar 90° la tangente alrededor del punto de tangencia en sentido antihorario el punto de tangencia se dirija hacia la región acotada por la curva. De manera intuitiva, el sentido de recorrido de la curva es el que adoptaría un caminante que desease que al caminar sobre ella la región acotada por la curva estuviera siempre a su izquierda. En (2.14) la representación

$$z = e^{-it}, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

tampoco es adecuada, pues la circunferencia se describe en sentido contrario al convenido. Por otra parte, cualquiera de las parametrizaciones

$$z = e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi \qquad \text{o} \qquad z = e^{\pi it}, \quad -1 \leq t \leq 1$$

es adecuada; y existen infinitas.

El hecho de que una curva cerrada, simple, y continua divide al plano en dos regiones exactamente, una de las cuales es acotada, se conoce con el nombre de teorema de Jordan; teorema que no será demostrado en este libro. No obstante, para las curvas que es corriente encontrar en las aplicaciones la comprobación directa del teorema suele ser trivial, y los convenios anteriores son, además, de aplicación sencilla, por lo que se seguirán a lo largo del texto.

Ejemplo 2.2. Si C es un contorno que no pasa por el punto α, calcular la integral

$$\int_C \frac{dz}{z - \alpha}$$

y dar, en el caso de que C sea cerrado, su interpretación geométrica.

Supondremos en primer lugar que C es un arco $z = \zeta(t), a \leq t \leq b$. La integral es entonces

$$\int_a^b \frac{\zeta'(t)\,dt}{\zeta(t) - \alpha} = \int_a^b \frac{d}{dt} \log[\zeta(t) - \alpha]\,dt = \log(z - \alpha)\Big|_C$$

denotando el símbolo del último miembro la variación de $\log(z-\alpha)$ a lo largo de C. Para calcularla se elige una rama de $(z-\alpha)$ en el origen $z_1 = \zeta(a)$ del arco C y se impone que $\log(z-\alpha)$ varíe de forma contínua cuando z recorra C hasta el extremo z_2. En otras palabras, es preciso elegir el valor del logaritmo de modo que la función

$$\phi(t) = \log[\zeta(t) - \alpha]$$

sea continua para $a \leq t \leq b$. Con esta condición,

$$\int_C \frac{dz}{z - \alpha} = \log(z - \alpha)\Big|_C = \log[\zeta(t) - \alpha]\Big|_a^b.$$

Este resultado se extiende por adición de arcos a contornos.

Por lo general, para calcular la variación de una función multiforme a lo largo de una curva dada se impone explícitamente, como en el caso anterior, una condición de continuidad. Por lo común el resultado depende de la rama de la función que se elija en el origen $\zeta(a)$. En el caso que nos ocupa, sin embargo, el resultado es independiente de la rama elegida en el punto inicial, u origen, de la curva.

Para poder dar una interpretación geométrica debe recordarse que

$$\log(z - \alpha) = \operatorname{Log} |z - \alpha| + i\theta$$

siendo $\theta = \arg(z - \alpha)$. Como $\operatorname{Log} |z - \alpha|$ es una función uniforme, cuando C es cerrado su variación a lo largo de C es 0, y así pues,

$$\log(z - \alpha)\Big|_C = i\theta\Big|_C \qquad (C \text{ cerrado}).$$

Ahora bien, θ es el ángulo que la recta que une α con el punto móvil $z = \zeta(t)$ forma con la horizontal, y por consiguiente, la variación total es 2π por el número de veces que z rodea a α conforme recorre C. (Figura 2.2) Así pues,

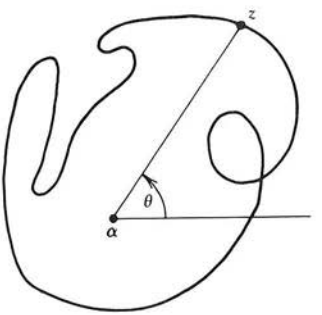


Figura 2-2

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{dz}{z-\alpha} = N \tag{2.15}$$

siendo $N = N(C,\alpha)$ un número entero[2] que se llama *número de vueltas* o *índice* de C con respecto a α. Cuando α se encuentra sobre C el número de vueltas no está definido.

Problemas

1. Siendo C la circunferencia $|z| = 1$, calcular

$$\int_C \frac{dz}{z}, \qquad \int_C \frac{dz}{|z|}, \qquad \int_C \frac{|dz|}{z}, \qquad \int_C \frac{dz}{z^2}, \qquad \int_C \frac{dz}{|z^2|}, \qquad \int_C \frac{|dz|}{z^2},$$

(En el segundo caso considerar las partes de C con $x > 0$ y $x < 0$ separadamente.)

2. Siendo C la circunferencia $|z| = 1$, demostrar mediante el Teorema 2.1 que (Para la segunda integral considerar por separado las partes de C donde $x > 0$ y $x < 0$.)

$$\left|\int_C \frac{dz}{4+3z}\right| \leq 2\pi \qquad \text{y} \qquad \left|\int_C \frac{dz}{4+3z}\right| \leq \frac{6}{5}\pi.$$

3. Sea C la recta que une el punto 1 con el punto $2 + 2i$. (a) Obtener una parametrización adecuada de C que tenga la forma $z = \alpha + \beta t$, $0 \leq t \leq 1$, y calcular las dos primeras integrales

$$\int_C (z^2 + 2z)\,dz, \qquad \int_C (z^2 + 2z)|dz|, \qquad \int_C |z^2 + 2z||dz|.$$

(b) Utilizar el Teorema 2.1 para acotar la tercera de las integrales anteriores.

4. Sea C_0 la circunferencia $|z| = \rho$, donde ρ es una constante positiva. Para toda constante compleja α la circunferencia trasladada es la circunferencia $|z - \alpha| = \rho$ poner de manifiesto la relación geométrica entre C_0 y C_α mediante un dibujo, parametrizar C_0 y C_α como se hizo en el Ejemplo 2.1 y, suponiendo que f sea continua, demostrar que

$$\int_{C_\alpha} f(z)\,dz = \int_{C_0} f(z+\alpha)\,dz.$$

[2] Véase también la Sección 1, Problema 11 con $\xi(a) = \xi(b)$.

5. Sea C la circunferencia $2|z - 1| = 1$ en la que, por lo sugestivo de esta notación, consideraremos que el punto inicial, u origen, es $\frac{1}{2} - 0i$, y que el punto final, o extremo, es $\frac{1}{2} + 0i$. Hallar

$$\int_C \frac{dz}{(z^2 - 1)^{1/2}} \quad \text{de} \quad (z^2 - 1)^{1/2} = \exp\left[\frac{1}{2}\operatorname{Log}(z - 1) + \frac{1}{2}\operatorname{Log}(z + 1)\right].$$

(Obsérvese que $F(z) = \log[z + (z^2 - 1)^{1/2}]$. es una primitiva.)

***Problemas sobre la propiedad invariancia.**

6. (a) Imitando el modelo desarrollado en el texto, establecer la equivalencia de dos arcos C_1 y C_2 deducidos uno de otro mediante un cambio lineal de parámetro, $t = c_1\tau + c_0$, siendo $c_1 \neq 0$ y c_0 constantes reales. (b) Demostrar que, en un cambio lineal de parámetro, cualquier arco es equivalente a un arco definido sobre el intervalo $0 \leqslant t \leqslant 1$. (c) Obtener para contornos un resultado parecido, parametrizando cada C_k de manera que su intervalo sea $k/n \leq t \leq (k + 1)/n$. (d) Discutir la posibilidad de definir $-C$ mediante el cambio de parámetro $\tau = -t$.
7. Si $f = u + iv$ y $dz = dx + i\,dy$, el resultado de efectuar los cálculos sugiere que

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C [u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy] + i\int_C [u(x,y)\,dy + v(x,y)\,dx]$$

siendo cada una de las integrales del segundo miembro una integral curvilínea. Demostrar que esta fórmula está de acuerdo con la definición dada en la Sección 1, y que por consiguiente, las propiedades de invariancia de las integrales complejas son consecuencia de las correspondientes propiedades de las integrales curvilíneas.)
8. Sean respectivamente C_1 y C_2 los arcos

$$z = \zeta_1(t), \quad a \leq t \leq b \qquad \text{y} \qquad z = \zeta_2(\tau), \quad \alpha \leq \tau \leq \beta.$$

Se dice que C_2 se ha deducido de C_1 mediante un cambio de parámetro admisible si existe una función diferenciable $\phi(t)$ tal que $\alpha = \phi(a)$, $\beta = \phi(b)$ y tal que verifique la condición $\tau = \phi(t)$ de $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$, $\zeta_2(\tau) = \zeta_1(t)$ para $a \leqslant t \leqslant b$. Demostrar que en este caso C_1 y C_2 son equivalentes. (Si

$$F_1(t) = \int_a^t f[\zeta_1(s)]\zeta_1'(s)\,ds, \qquad F_2(\tau) = \int_a^\tau f[\zeta_2(\sigma)]\zeta_2'(\sigma)\,d\sigma$$

siendo $\tau = \phi(t)$, se comprueba fácilmente que F_1 y F_2 tienen la misma derivada respecto de t. Como ambas toman el mismo valor para $t = a$, lo mismo ocurre para $t = b$.)
9. Demostrar que cada contorno es equivalente a un arco. (Ver la Sección 1, Problema 10.)

3. El teorema integral de Cauchy; caso particular. La clave de la discusión anterior está en que la diferenciación y la integración de las funciones complejas se efectúan realizando las operaciones correspondientes con las partes real e imaginaria de aquéllas, y también, en que los cálculos formales que vienen sugeridos por la notación están efectivamente justificados. Por ejemplo, si C es la curva $z = \zeta(t)$, $a \leq t \leq b$, entonces

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f[\zeta(t)]\zeta'(t)\,dt$$

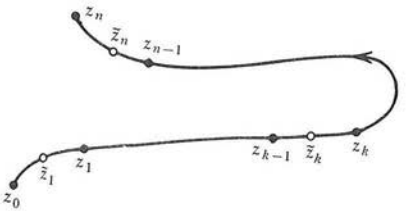


Figura 3-1

dando por supuesto que tanto ζ como ζ' son continuas. Como ocurre en el Análisis real, la integral puede definirse también como el límite de sumas de la forma

$$\sum_{k=1}^{n} f(\tilde{z}_k)(z_k - z_{k-1})$$

siendo $z_0, z_1, \ldots, z_n$ una sucesión de puntos tomados a lo largo de C, y hallándose $\tilde{z}_k$ comprendido entre z_{k-1} y z_k (Figura 3.1). Esta segunda formulación hace evidente el hecho de que la integral sea en gran medida independiente de la representación paramétrica de C, y al mismo tiempo, permite obtener una importante desigualdad.

Efectivamente, si M es una constante tal que $|f(z)| \leq M$ en todos los puntos de C, entonces

$$\left|\sum f(\tilde{z}_k)(z_n - z_{k-1})\right| \leq \sum M|z_k - z_{k-1}| = M\sum|z_k - z_{k-1}|.$$

Como la línea recta es la distancia más corta entre dos puntos,

$$|z_k - z_{k-1}|$$

no excede nunca de la longitud del arco de C que une z_{k-1} y z_k. En consecuencia, la suma anterior está acotada superiormente por ML, siendo L la longitud de C; pasando al límite se obtiene una desigualdad análoga para la integral. Así pues,[1]

[1] Se dio otra demostración en la sección precedente

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \leq ML,$$

siendo M una cota superior de $|f(z)|$ sobre C y L la longitud de C.

El teorema integral de Cauchy establece que en una cierta clase de dominios la integral a lo largo de un contorno cerrado de una función analítica en el dominio es cero. La restricción que para ello debe imponerse sobre el dominio es que sea simplemente conexo. Tanto esta noción como la forma general del teorema se discutirán más adelante; para establecer las propiedades fundamentales de las funciones analíticas es suficiente una versión mucho más sencilla del teorema.

Por el momento nos limitaremos a establecer como teorema previo el caso particular del teorema integral de Cauchy correspondiente al caso de que C sea un contorno cerrado cuya traza esté formada por los tres lados de un triángulo. Denotemos por T la región formada por el interior de un triángulo y los tres lados de éste; representemos mediante C al contorno cerrado formado por los tres lados. El sentido de recorrido de C se elige de manera que el vector que indique el sentido de recorrido de cualquiera de sus lados, girado 90° en sentido antihorario, quede apuntando hacia el interior del triángulo, como se muestra en la Figura 3.2. Este sentido de recorrido de C se llama sentido positivo.

Como se verá más adelante, otras versiones más generales del teorema se basan en el siguiente enunciado para un contorno triangular.

TEOREMA 3.1. *Supongamos que una región triangular cerrada T esté contenida en un dominio sobre el cual la función f(z) es analítica. Denotemos por C el contorno de T recorrido en sentido positivo. Entonces*

$$\int_C f(z)\,dz = 0.$$

Se presentarán dos demostraciones de este teorema, una en esta sección y otra en la sección siguiente. En la primera de ellas la definición de "función analítica *f(z)* en un dominio D" se hace más restrictiva, exigiéndose no sólo que $f'(z)$ exista en todos los puntos de D, sino también que $f'(z)$ sea continua en todos los puntos de D. Esta noción restringida de analiticidad es enteramente adecuada para desarrollar tanto la teoría como las aplicaciones de las funciones analíticas, y de hecho, puede utilizarse para cualquier función concreta sin por ello perder lo más mínimo. Esto es debido a que partiendo de la definición primitiva de analiticidad, en la que no se exige la continuidad de la función derivada, puede demostrarse que $f'(z)$ es continua en D, por lo cual, aunque se utilice la definición más restrictiva, no se empobrece en realidad la clase de funciones en consideración. La primera demostración era usada en las matemáticas del siglo pasado, y en ella se utiliza el hecho de que, en ciertas condiciones, la integral reiterada de una función es igual a su integral doble.

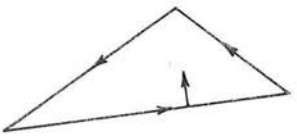


Figura 3-2

Primera demostración del Teorema 3.1 Consideremos la región triangular T de frontera C, cuyos vértices α, β y γ aparecen en ese orden cuando C se recorre en sentido positivo. Si escribimos $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, como f' existe y es continua, lo mismo es cierto para $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$, $\partial v/\partial x$ y $\partial v/\partial y$, las cuales verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Además,

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C (u\,dx - v\,dy) + i\int_C (u\,dy + v\,dx) \tag{3.1}$$

siendo, por ejemplo,

$$\int_C u\,dx = \left(\int_\alpha^\beta + \int_\beta^\gamma + \int_\gamma^\alpha \right) u(x,y)\,dx$$

En cada una de las integrales anteriores se expresa y en función de x en cada lado del triángulo. Así que puede utilizarse x para parametrizar cada lado, esto es, $x = \phi(x)$ y $y = \psi(x)$ siendo $\phi(x)$ simplemente x y ψ una función lineal de x. Evidentemente, si x es constante sobre un lado, es decir, si el lado es vertical, entonces $\int u\,dx$ es nula sobre dicho lado.

La proyección del triángulo T sobre el eje x es un segmento rectilíneo de extremos x_1 y x_2. Como se muestra en la Figura 3-3, la recta vertical de abscisa x cortará al triángulo en $g_1(x)$ y $g_2(x)$ tomándose $g_1(x) \leq g_2(x)$. Se verifica entonces

$$\int_C u\,dx = \int_{x_1}^{x_2} u(x, g_1(x))\,dx + \int_{x_2}^{x_1} u(x, g_2(x))\,dx$$

$$= \int_{x_2}^{x_1} [u(x, g_2(x)) - u(x, g_1(x))]\,dx.$$

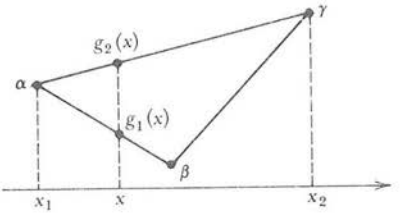


Figura 3-3

Como

$$u(x,g_2(x)) - u(x,g_1(x)) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\,dy,$$

se sigue que

$$\int_C u\,dx = -\int_{x_1}^{x_2} \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\,dy \right) dx.$$

La integral que aparece en segundo miembro es la integral reiterada de $\partial u/\partial y$ sobre la región triangular T. Al escribir en lugar de la integral reiterada la integral doble se tiene

$$\int_C u\,dx = -\int_T \frac{\partial u}{\partial y}\,dx\,dy.$$

Análogamente,

$$\int_C v\,dy = \int_T \frac{\partial v}{\partial x}\,dx\,dy.$$

y así pues

$$\int_C (u\,dx - v\,dy) = -\int_T \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx\,dy.$$

En virtud de la segunda de las condiciones de Cauchy-Riemann la integral del segundo miembro es cero. En consecuencia

$$\int_C (u\,dx - v\,dy) = 0.$$

Se demuestra de la misma forma que la segunda integral del segundo miembro de (3.1) es también 0, quedando así probado el teorema.

Se demostrará mediante el Teorema 3.1 que una función analítica en un dominio estrellado tiene integral indefinida y que es válido en este caso el teorema integral de Cauchy. Se dice que un dominio es *estrellado* (o que es una *estrella*) cuando existe un punto z_0 en el dominio, tal que el segmento rectilíneo que une el punto z_0 con cualquier otro punto del dominio, está totalmente contenido en el dominio. Así, por ejemplo, el interior de un círculo es un dominio estrellado, y lo mismo ocurre con el interior de un paralelogramo. En estos dos casos se puede tomar como punto z_0 cualquier punto del dominio. Se muestran otros tipos de dominios estrellados en la Figura 3-4. El plano z finito, $|z|<\infty$, es un dominio estrellado, pudiéndose tomar en él como z_0 cualquiera de sus puntos. Cuando es conveniente subrayar el papel privilegiado de z_0 suele decirse que el dominio es *estrellado* (es una *estrella*) respecto de z_0. Por ejemplo, suprimiendo en un disco tres segmentos rectilíneos radiales puede conseguirse un dominio estrellado que solamente lo sea respecto al centro, y no con relación a ningún otro punto.

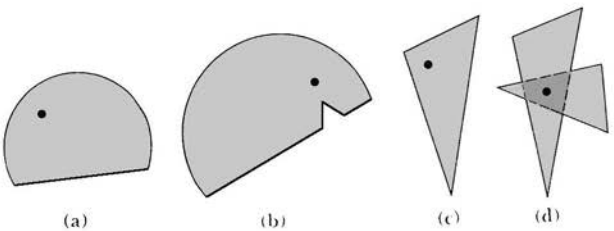


Figura 3-4

Demostraremos el siguiente:

TEOREMA 3.2. *Si la función $f(z)$ es analítica en un dominio estrellado D, existe entonces una función $F(z)$ analítica en D y tal que $F'(z) = f(z)$.*

Demostración. Sea D un dominio estrellado respecto a z_0, y sea z un punto cualquiera de D. Se define la función F por

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\, d\zeta \tag{3.2}$$

efectuándose la integración a lo largo del segmento rectilíneo que une z_0 con z. Como z es un punto interior de D existe un entorno de z contenido en D. Por lo tanto, si h es un número complejo de módulo $|h|$ suficientemente pequeño, $z + h$ es también un punto de D, y el segmento que une z con $z + h$ se halla contenido en D, como muestra la Figura 3-5.

Como todos los puntos del segmento que une z con $z + h$ están contenidos en D, el segmento que une z_0 con cualquiera de dichos puntos está también contenido en D (pues D es un dominio estrellado) y por lo tanto, está contenida en D la región triangular cerrada de vértices z_0, z, $z + h$. Por el Teorema 3.1,

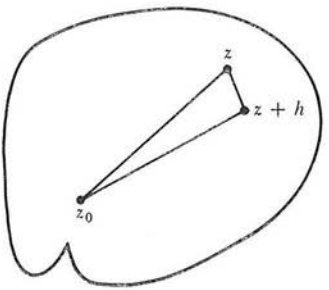


Figura 3-5

$$\left(\int_{z_0}^{z+h} + \int_{z+h}^{z} + \int_{z}^{z_0} \right) f(\zeta)\, d\zeta = 0 \tag{3.3}$$

ó

$$\left(\int_{z_0}^{z+h} - \int_{z}^{z} \right) f(\zeta)\, d\zeta = \int_{z}^{z+h} f(\zeta)\, d\zeta.$$

En virtud de (3.2) podemos escribir

$$F(z + h) - F(z) = \int_{z}^{z+h} f(\zeta)\, d\zeta.$$

Así pues, si $h \neq 0$,

$$\frac{F(z + h) - F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h} \int_{z}^{z+h} [f(\zeta) - f(z)]\, d\zeta. \tag{3.4}$$

Como $f(\zeta)$ es continua en z, dado cualquier $\epsilon > 0$ arbitrario, existe un $\delta > 0$ tal que

$$|f(\zeta) - f(z)| < \epsilon \qquad \text{cuando } |\zeta - z| < \delta.$$

Así pues, si $|h| < \delta$, es válida la desigualdad sobre el segmento de integración, desde z hasta $z + h$. Por lo tanto,

$$\left| \int_{z}^{z+h} [f(\zeta) - f(z)]\, d\zeta \right| < \epsilon |h|$$

y en virtud de (3.4) se tiene

$$\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h}-f(z)\right|<\epsilon.$$

Como esta desigualdad es válida para todo número positivo ϵ, hemos demostrado así que

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(z+h)-F(z)}{h}=f(z)$$

o, en otras palabras, que $F'(z)=f(z)$.

En realidad, en el proceso de demostración anterior solamente se ha utilizado la hipótesis de analiticidad de f para asegurar que $f(z)$ es continua y que su integral sobre cualquier contorno triangular es cero. Por consiguiente, con este razonamiento hemos establecido una versión algo diferente del teorema, que es en ocasiones de más utilidad:

TEOREMA 3.3. *Supongamos que $f(z)$ es una función continua en un dominio estrellado D, y supongamos que se verifique*

$$\int_C f(z)\,dz=0$$

sobre todo contorno triangular cerrado contenido en D. Entonces existe una función $F(z)$ analítica en D tal que $F'(z)=f(z)$.

El Teorema 3.2 conduce al teorema integral de Cauchy para dominios estrellados, cuyo enunciado es el siguiente:

TEOREMA 3.4. *Si la función $f(z)$ es analítica en un dominio estrellado D, y si C es un contorno cerrado contenido en D, entonces*

$$\int_C f(z)\,dz=0.$$

Este teorema es consecuencia inmediata del Teorema 3.2 y de (1.10). Como se indica en la Figura 3-6, C puede cortarse a sí mismo.

Ejemplo 3.1 Siendo $0<r<R$, integrar la función

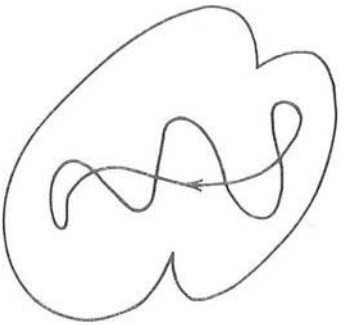


Figura 3-6

$$\frac{R+z}{(R-z)z} \equiv \frac{1}{z} + \frac{2}{R-z} \tag{3.5}$$

sobre la circunferencia $|z| = r$ y deducir que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos\theta + r^2}\, d\theta = 1. \tag{3.6}$$

En virtud del Teorema 3.4, el último sumando del segundo miembro de (3.5) tiene integral 0. Luego, haciendo $z = re^{i\theta}$, $dz/z = i\, d\theta$, se obtiene

$$\int_0^{2\pi} \frac{R + re^{i\theta}}{R - re^{i\theta}}\, i\, d\theta = \int_0^{2\pi} i\, d\theta = 2\pi i. \tag{3.7}$$

Dado que la fracción del primer miembro de (3.7) puede escribirse

$$\frac{(R + re^{i\theta})(R - re^{-i\theta})}{(R - re^{i\theta})(R - re^{-i\theta})} = \frac{R^2 - r^2 + 2iRr\,\mathrm{sen}\,\theta}{R^2 - 2Rr\cos\theta + r^2},$$

dividiendo (3.7) por $2\pi i$ e igualando las partes reales se obtiene (3.6).

Problemas

1. Considerando la función $f(z) = 1/z$ en el anillo $1 < |z| < 3$, poner de manifiesto que la conclusión del Teorema 3.4 puede ser falsa si el dominio no es una estrella. (Se toma como C la circunferencia $|z| = 2$.)

2. Integrando $(R - z)^{-1}$ sobre $|z| = r$ y utilizando el ejemplo 3.1, demostrar que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R\cos\theta}{R^2 - 2Rr\cos\theta + r^2}\, d\theta = \frac{r}{R^2 - r^2}, \qquad 0 \leq r < R.$$

3. Demostrar que si a es real, la integral

$$I(a) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+ia)^2}\, dx$$

no depende de a. (Puede suponerse sin pérdida de generalidad que $a > 0$. Por el Teorema 3.4

$$\int_C e^{-z^2}\, dz = 0$$

siendo C el rectángulo de vértices $-b$, b, $\overline{b} + ia$ y $-b + ia$. Dado que

$$\left|\int_0^a e^{-(b+iy)^2}\, dy\right| \leq e^{-b^2}\int_0^a e^{y^2}\, dy,$$

haciendo tender $b \to \infty$ se tiene $I(a) = I(0)$.)

4. Sabiendo que en el Problema 3 $I(0) = \sqrt{\pi}$ utilícese el resultado de dicho problema para demostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\cos ux\, dx = \sqrt{2\pi}e^{-u^2/2}.$$

5. *Teorema fundamental del álgebra.* Siendo $P(z)$ un polinomio que no se reduce a una constante, demostrar que $P(z)$ posee al menos una raíz. Se darán también otras demostraciones. (Supongamos que

$$P(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0 = zQ(z) + a_0$$

siendo $n \geq 1$, $a_n \neq 0$, y estando definido el polinomio $Q(z)$ mediante esta misma ecuación. Entonces

$$\frac{1}{z} = \frac{P(z)}{zP(z)} = \frac{zQ(z) + a_0}{zP(z)} = \frac{Q(z)}{P(z)} + \frac{a_0}{zP(z)}.$$

Si se supone que $P(z)$ no se anula nunca, el primer sumando del segundo miembro tiene integral nula en virtud del Teorema 3.4, y por lo tanto,

$$2\pi i = \int_{|z|=R} \frac{a_0}{zP(z)}\, dz.$$

Es evidente que $\lim P(z)/a_n z^n = 1$, cuando $|z| = R \to \infty$, y por consiguiente, para valores grandes de R

$$\left|\frac{P(z)}{a_n z^n}\right| \geq \frac{1}{2} \qquad \text{ó} \qquad |P(z)| \geq \frac{1}{2}|a_n||z|^n.$$

La desigualdad resultante

$$2\pi = \left|\int_{|z|=R} \frac{a_0}{zP(z)}\,dz\right| \leq (2\pi R)\frac{2|a_0|}{R|a_n|R^n} = \frac{4\pi|a_0|}{|a_n|R^n}$$

nos lleva a contradicción cuando $R \to \infty$.)

6. Supongamos que la función $f(z)$ sea analítica cuando $|z| < R$, y continua cuando $|z| \leq R$. Siendo C la circunferencia $|z| = R$, demostrar que

$$\int_C f(z)\,dz = 0.$$

Idea de la solución: Para $r < R$

$$\int_C f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} f(\mathrm{R}e^{i\theta})\mathrm{R}e^{i\theta} i\,d\theta - \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})re^{i\theta} i\,d\theta$$

pues, en virtud del Teorema 3.4, la seguńda integral del segundo miembro es nula. Como la función $f(z)/z$ es continua en el disco cerrado $|z| \leq R$, es también uniformemente continua. Por consiguiente, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(Re^{i\theta})Re^{i\theta} - f(re^{i\theta})re^{i\theta}| < \epsilon \qquad \text{para } R - r < \delta.$$

lo cual pone de manifiesto que el valor absoluto de la integral anterior está acotado por $2\pi\epsilon$.

7. Para este problema es necesario estar familiarizado con la teoría de las integrales curvilíneas. Comprobar que las condiciones de Cauchy-Riemann son las condiciones que han de cumplir los integrantes del Problema 7 de la Sección 2 para ser diferenciales exactas, y obtener de este modo una demostración inmediata del Teorema 3.4 en el caso de que $f'(z)$ sea continua.

*4. **El teorema de Cauchy-Goursat; caso particular.** Más de medio siglo después de que el Análisis de variable compleja fuera reconocido como importante rama de la Matemática,

Edouard Goursat descubrió que la hipótesis de continuidad de $f'(z)$ era redundante, y que por consiguiente, podía ser suprimida del enunciado de los teoremas anteriores. Para la demostración de este hecho, que se da más adelante, se precisa el siguiente resultado: Supongamos dada una sucesión de intervalos cerrados

$$a_n \leq x \leq b_n$$

de la recta real, tal que cada uno de ellos contenga al siguiente; es decir

$$a_m \leq b_n, \qquad a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \qquad \text{y} \qquad b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \cdots$$

Supongamos también que $b_n - a_n \to 0$ cuando $n \to \infty$; esto es, supongamos que las longitudes de los intervalos tiendan hacia cero. Una colección de esta clase, como la que se muestra en la Figura 4.1, se denomina encaje de intervalos. Dado un encaje de intervalos cerrados, una de las propiedades fundamentales del sistema de los números reales es que existe un número ξ contenido en todos los intervalos y tal que $a_n \to \xi$ y $b_n \to \xi$ cuando $n \to \infty$.

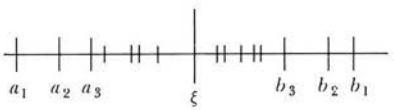


Figura 4-1

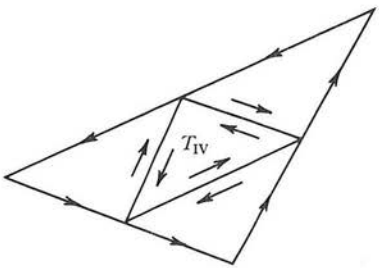


Figura 4-2

Segunda demostración del Teorema 3.1. Se utiliza en esta demostración la definición no restringida de función analítica, en la cual no se supone *a priori* que f' sea continua. Se utilizará el mismo triángulo T de la Sección anterior. Uniendo mediante segmentos los puntos medios de los lados de T se forman cuatro triángulos T_{I}, T_{II}, T_{III} y T_{IV}, cuyas fronteras son C_{I}, C_{II}, C_{III} y C_{IV} recorridas en sentido positivo como se muestra en la Figura 4-2. Entonces,

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C_{\mathrm{I}}} f(z)\,dz + \cdots + \int_{C_{\mathrm{IV}}} f(z)\,dz \tag{4.1}$$

ya que la suma de las integrales tomadas en sentidos opuestos sobre los lados de T_{IV} es cero. Se deduce de (4.1) que

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \leq \left|\int_{C_I} f(z)\,dz\right| + \cdots + \left|\int_{C_{IV}} f(z)\,dz\right|.$$

Uno de los cuatro términos no negativos del segundo miembro de la expresión anterior es mayor o igual que los otros tres. Llamemos T_1 al triángulo al que corresponda dicho término y C_1 a su contorno. Entonces

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \leq 4\left|\int_{C_1} f(z)\,dz\right|.$$

Al unir por segmentos los puntos medios de los lados de T_1 se forman otros cuatro triángulos. Procediendo con T_1 del mismo modo que con T, hallaremos que uno de estos cuatro triángulos, que denotaremos T_2, y C_2 a su contorno, verifica

$$\left|\int_{C_1} f(z)\,dz\right| \leq 4\left|\int_{C_2} f(z)\,dz\right|.$$

Así

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \leq 4^2\left|\int_{C_2} f(z)\,dz\right|.$$

Continuando de este modo se obtiene una sucesión de triángulos T, $T_1, T_2, \ldots$, cada uno contenido en el anterior, tal que

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \leq 4^n\left|\int_{C_n} f(z)\,dz\right|. \tag{4.2}$$

Las proyecciones horizontales de los triángulos T, $T_1, \ldots$ anteriores sobre el eje x forman una sucesión encajada de intervalos, tal que la longitud de cada uno de ellos es justamente la mitad de la del precedente. Las proyecciones verticales de T, $T_1, \ldots$ sobre el eje y forman también una sucesión encajada de intervalos de las mismas características. Así pues, cuando $n \to \infty$, las respectivas sucesiones definen dos números reales ξ y η tales que todos los puntos de T_n convergen hacia $\zeta = \xi + i\eta$ cuando $n \to \infty$. Dicho de otro modo, dado cualquier $\delta > 0$ existe un número natural N dependiente de δ tal que si $n \geq N$, entonces T_n está contenido en el interior del círculo $|z - \zeta| < \delta$. Se deduce de la existencia de $f'(\zeta)$ que dado cualquier $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$\left|\frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} - f'(\zeta)\right| < \epsilon$$

cuando $0 < |z - \zeta| < \delta$. Entonces,

$$f(z) = f(\zeta) + (z - \zeta)f'(\zeta) + (z - \zeta)\omega$$

donde $\omega = \omega(z)$ verifica la condición $|\omega| < \epsilon$. Eligiendo n suficientemente grande para que T_n se encuentre contenido en el interior del círculo $|z - \zeta| < \delta$ se tiene

$$\int_{C_n} f(z)\,dz = f(\zeta)\int_{C_n} dz + f'(\zeta)\int_{C_n} (z - \zeta)\,dz + \int_{C_n} (z - \zeta)\omega(z)\,dz. \tag{4.3}$$

Como C_n es cerrado,

$$\int_{C_n} dz = z\Big|_{C_n} = 0, \qquad \int_{C_n} z\,dz = \frac{z^2}{2}\Big|_{C_n} = 0.$$

Por consiguiente, las dos primeras integrales del segundo miembro de (4.3) son 0, y así pues,

$$\int_{C_n} f(z)\,dz = \int_{C_n} (z - \zeta)\omega(z)\,dz. \tag{4.4}$$

Denotemos por s_n la longitud de C_n. Entonces, como ζ está en T_n, $|z - \zeta| \leq s_n$ cuando z está en T_n. Usando en (4.4) la acotación anterior y la $|\omega| < \epsilon$ se tiene

$$\left|\int_{C_n} f(z)\,dz\right| \leq \epsilon s_n \int_{C_n} |dz| = \epsilon s_n{}^2.$$

Recordando como se ha construido T_{n+1} a partir de T_n, se tiene $s_{n+1} = s_n/2$ y en consecuencia

$$s_n = \frac{1}{2^n} s$$

siendo s la longitud de C. Resulta pues,

$$\left|\int_{C_n} f(z)\,dz\right| \leq \frac{\epsilon s^2}{4^n}$$

y por consiguiente, en virtud de (4.2)

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \leq \epsilon s^2. \tag{4.5}$$

Dado que ϵ es arbitrario, la integral de la expresión (4.5) ha de ser 0. Así pues, hemos podido demostrar el Teorema 3.1 usando la noción general de analiticidad. Por lo tanto, las consecuencias del Teorema 3.1 que se dedujeron en la sección anterior son también válidas con la definición general. En las siguientes secciones de este capítulo la densidad de teoremas y demostraciones será mucho más alta que hasta ahora. Hemos optado, en vista de ello, por exponer aquí algunos ejemplos y problemas que aunque no están directamente relacionados con el tema de esta sección, han sido seleccionados como ilustración de los métodos generales de razonar con las integrales complejas y los dominios estrellados.

Ejemplo 4.1 Siendo C un contorno cualquiera, demostrar que la integral

$$I(\alpha) = \int_C \frac{d\zeta}{\zeta - \alpha}$$

es función continua de α en cualquier punto α que no se encuentre sobre C.

Sea $\delta > 0$, la mínima distancia de α a C; tomamos $|h| < \delta/2$. Entonces $I(\alpha + h) - I(\alpha)$ es igual a

$$\int_C \left(\frac{1}{\zeta - \alpha} - \frac{1}{\zeta - \alpha - h}\right) d\zeta = -h\int_C \frac{d\zeta}{(\zeta - \alpha)(\zeta - \alpha - h)}.$$

Como $|\zeta - \alpha| \geq \delta$ y $|\zeta - (\alpha + h)| \geq \delta/2$, el valor absoluto del integrando es menor o igual que $2/\delta^2$, y por consiguiente

$$|I(\alpha + h) - I(\alpha)| \leq |h|\frac{2L}{\delta^2}$$

siendo L la longitud del contorno C. El segundo miembro de esta expresión tiende hacia 0 cuando $h \to 0$ y por lo tanto, también el primero.

Ejemplo 4.2 Consideremos, como se muestra en la Figura 4-3, una semirrecta infinita L que una un punto dado con el punto del ∞, y un contorno cerrado C que no corte a L. Demostrar que ahora la integral del Ejemplo 4.1 es 0.

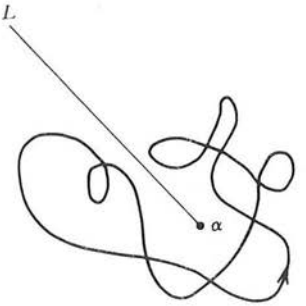


Figura 4-3

El dominio D obtenido al suprimir del plano complejo la semirrecta L es un dominio estrellado sobre el cual $1/(z-\alpha)$ tiene derivada continua. La conclusión es consecuencia del Teorema 3.4, en la forma dada en la Sección 3, no siendo necesario utilizar la versión fuerte del teorema.

Como consecuencia de lo demostrado en el Ejemplo 4.2, la integral

$$\int_{z_0}^{z} \frac{dz}{z-\alpha}$$

es independiente del camino que une los puntos z_0 y z de D y puede servirnos para definir un logaritmo continuo. Esta definición es más sencilla que la dada en la Sección 2.

Problemas

1. Consideremos un contorno cerrado C y un dominio D que no contenga ningún punto de C. Demostrar que la integral $I(\alpha)$ del Ejemplo 4.1 es independiente de α mientras α permanezca en D. (En el Ejemplo 2.2, $I(\alpha)/2\pi i$ toma solamente valores enteros en D, y por el Ejemplo 4.1, es una función continua en D.)
2. Sea C un contorno cerrado $z = r(\theta)e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, siendo $r(\theta) > 0$. (a) Describir analíticamente el dominio formado por el interior de C y demostrar que es una estrella respecto del origen. (b) Deducir que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{d\zeta}{\zeta-\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{si es exterior a } C \\ 1 & \text{si es interior a } C \end{cases}$$

(El valor 0 se obtiene del Ejemplo 4.2. Se comprueba fácilmente que la integral toma el valor 1 para $\alpha = 0$; el estudio para un valor arbitrario de α se hace utilizando el Problema 1.)

3. Sea $P(z)$ un polinomio que no tenga ninguna raíz en el contorno considerado en el Problema 2. Demostrar que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{P'(z)}{P(z)}\,dz = \text{número de raíces de } P(z) \text{ en el interior de } C$$

contándose las raíces de acuerdo con su multiplicidad. (Como ya se vio en el Ejemplo 1.3 del Capítulo 2,

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{1}{z - z_1} + \frac{1}{z - z_2} + \cdots + \frac{1}{z - z_n}.$$

En virtud del Problema 2, el resultado se deduce por simple inspección de esta última identidad.)

***La geometría de los dominios estrellados.**

4. Se dice que un dominio es convexo cuando es estrellado respecto de todos sus puntos. Demostrar que el semiplano $\text{Im } z > 0$ y el disco $|z| < 1$ son convexos.
5. Sean D_1 y D_2 dos dominios. El conjunto de todos los puntos que se encuentran simultáneamente en D_1 y en D_2 se llama intersección de D_1 y D_2. El conjunto de puntos que pertenecen a D_1, a D_2 o a ambos se llama unión de D_1 y D_2. Demostrar que la intersección de dos dominios convexos es convexa, pero que en cambio, la unión de dos dominios convexos puede no serlo.
6. Si los dos dominios D_1 y D_2 son estrellados respecto a un y un mismo punto z_0, demostrar que la unión y la intersección de ambos son también dominios estrellados respecto de z_0.
7. Utilícense los Problemas 4-6 para demostrar que los dominios que se muestran en la Figura 3-4 (a)-(d) son todos ellos estrellados.

5. La fórmula integral de Cauchy y sus consecuencias. Una notable fórmula debida a Cauchy muestra que los valores que toma una función analítica en el contorno de un disco determinan por completo los valores de la función en los puntos interiores del disco. Denotaremos al centro del disco por α, por $\rho > 0$, a su radio, y supondremos además que $f(z)$ es analítica en un disco mayor, de centro α. (Ver la Figura 5-1).

TEOREMA 5.1. *Sea $f(z)$ una función analítica en el disco $|z - \alpha| < R$, sea C la circunferencia $|z - \alpha| = \rho < R$, y z un punto cualquiera tal que $|z - \alpha| < \rho$. Entonces*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta. \tag{5.1}$$

De acuerdo con nuestros anteriores convenios, se recorre C en el sentido positivo, es decir, en sentido contrario al de las agujas del reloj.

Demostración. Consideremos que z sea fijo y tomemos ζ como variable de integración. Encerremos a z en un circulito de centro z y consideremos las dos curvas cerradas C_1 y C_2 que se muestran en la Figura 5.2, en la cual llamaremos C al círculo grande y k al pequeño. Entonces,

$$\int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 0 \tag{5.2}$$

Lo mismo vale para la integral sobre C_2. Efectivamente, C_1 está contenido en un dominio estrellado del plano ζ en el cual $f(\zeta)/(\zeta - z)$ es función analítica de ζ. (Ver la Figura 5-2.) (Se puede demostrar analíticamente que C_1 está contenida en dicho dominio dando las ecuaciones del contorno del dominio estrellado y las de C_1.) En virtud del Teorema 3.4, se verifica (5.2). Sumando miembro a miembro la igualdad (5.2) con la correspondiente para C_2, y teniendo en cuenta que la suma de las integrales a lo largo de los segmentos rectilíneos comunes a los dos contornos se anula, se obtiene

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \int_k \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

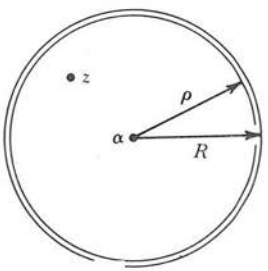


Figura 5-1

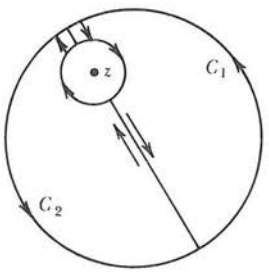


Figura 5-2

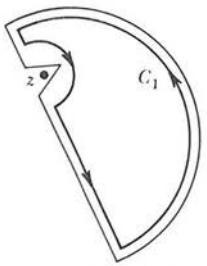


Figura 5-3

estando también k recorrida en sentido antihorario. Así pues,

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = f(z) \int_k \frac{d\zeta}{\zeta - z} + \int_k \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta. \tag{5.3}$$

Evidentemente, la primera integral del segundo miembro es

$$\int_k \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \log(\zeta - z)\Big|_k = i \arg(\zeta - z)\Big|_k = 2\pi i. \tag{5.4}$$

Por lo que respecta a la segunda integral, observemos que como $f(\zeta)$ es continua en z, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(\zeta) - f(z)| < \epsilon \qquad \text{para } |\zeta - z| < \delta.$$

Tomando el radio de k igual a $b < \delta$, entonces

$$\left| \int_k \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta \right| \leq \frac{\epsilon}{b} \int_k |d\zeta| = 2\pi\epsilon.$$

Teniendo en cuenta en (5.3) este resultado y el (5.4), se tiene

$$\left| \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - 2\pi i f(z) \right| \leq 2\pi\epsilon.$$

Como ϵ es arbitrario, queda así demostrada la igualdad (5.1).

Se demostrará mediante el Teorema 5.1 que toda función analítica posee derivadas de todos los órdenes. Es este un resultado sorprendente, en marcado contraste con lo que ocurre en el Análisis real. No es cierto, desde luego, que una función de variable real que sea diferenciable una vez tenga todas las derivadas de orden superior, como puede comprobarse tomando, por ejemplo, $f(t) = |t|^3$, $-\infty < t < \infty$.

TEOREMA 5.2. *Supongamos que $f(z)$ es analítica en un dominio D. Entonces existen en D todas las derivadas $f'(z), f''(z), \cdots, f^{(n)}(z), \cdots$ y estas son funciones analíticas.* (Obsérvese que D es arbitrario.)

Demostración. Sea α un punto de D. Se demostrará que f tiene en dicho punto derivadas de todos los órdenes. Como α es arbitrario, se habrá demostrado así la existencia de todas las derivadas en D.

Si C es una circunferencia suficientemente pequeña de centro α, en virtud de (5.1) se tiene, para todo punto z del interior de C

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta. \tag{5.5}$$

Derivando formalmente (5.5) n veces respecto de z, resulta

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta. \tag{5.6}$$

Se demostrará [1] ahora la validez de la fórmula (5.6)

Si h se toma lo bastante pequeño como para que $z + h$ se encuentre en el interior del disco de contorno C, utilizando la fórmula (5.5) en los puntos z y $z + h$,

$$\begin{aligned}\frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{h}\int_C f(\zeta)\left[\frac{1}{\zeta - z - h} - \frac{1}{\zeta - z}\right]d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_C f(\zeta)\frac{1}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)}\,d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,d\zeta + J \end{aligned} \tag{5.7}$$

donde

$$J = \frac{h}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2(\zeta - z - h)}\,d\zeta.$$

Como z está en el interior de C, cuando ζ recorre C, $|\zeta - z|$ es estrictamente positivo. Denotando por 2δ, a este mínimo, se tiene que si $|h| < \delta$, entonces, para todo punto ζ de C,

$$|\zeta - z - h| \geq |\zeta - z| - |h| > 2\delta - \delta = \delta.$$

Existe una constante M tal que $|f(\zeta)| \leq M$ en todos los puntos ζ de C. (La existencia de esta constante puede deducirse, por ejemplo, de la continuidad de f sobre la circunferencia C). Si ρ es el radio de la circunferencia C, entonces,

$$|J| \leq \frac{|h|}{2\pi}\frac{M}{(4\delta^2)(\delta)}2\pi\rho = |h|\frac{M\rho}{4\delta^3}.$$

Haciendo tender $|h| \to 0$ se tiene $|J| \to 0$, y por lo tanto (5.7) demuestra la existencia de $f'(z)$. De este modo se ha demostrado la validez de (5.6) para el caso $n = 1$.

La existencia de f' estaba de antemano asegurada por la hipótesis de analiticidad de f. Sin embargo, repitiendo el proceso anterior comenzando esta vez con la fórmula (5.6)

[1] Se da otra demostración en la Sección 3 del Capítulo 6.

particularizada para $n = 1$ se demuestra al mismo tiempo la existencia de $f''(z)$ y la validez de la fórmula (5.6) para el caso $n = 2$. Así pues, f' tiene derivada f'' y por lo tanto es analítica. Este razonamiento demuestra que si $f(z)$ es analítica también lo es $f'(z)$. Aplicando este resultado para f' en lugar de para f, se tiene que f'' es analítica. De manera general, la analiticidad de $f^{(n)}$ implica la de $f^{(n+1)}$. Ahora es fácil demostrar por inducción que todas las derivadas existen y son analíticas. Puesto que $f^{(n)}(z)$ es analítica,

$$f^{(n)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f^{(n)}(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Integrando por partes n veces esta fórmula se demuestra la (5.6).

Escribiendo $f(z) = u(x,y) + i\, v(x,y)$, el Teorema 5.2 nos permite obtener una colección de fórmulas que expresan $f^{(n)}(z)$ en función de las derivadas parciales de u y de v. Derivando en direcciones paralelas a los ejes x e y, como se hizo en la Sección 1 del Capítulo 2, se obtiene

$$f'(z) = u_x + iv_x, \qquad f'(z) = v_y - iu_y. \tag{5.8}$$

Como el Teorema 5.2 afirma que $f'(z)$ es analítica, podemos repetir el proceso comenzando con $f'(z)$ en lugar de $f(z)$. Las fórmulas (5.8) nos dan las partes real e imaginaria de $f'(z)$ (que juegan ahora el papel de u y de v en la discusión del Capítulo 2). De la primera igualdad de (5.8) se deduce

$$f''(z) = u_{xx} + iv_{xx}, \qquad f''(z) = v_{xy} - iu_{xy}$$

y de la segunda,

$$f''(z) = v_{yx} - iu_{yx}, \qquad f''(z) = -u_{yy} - iv_{yy}.$$

De manera análoga se obtienen las fórmulas que dan las derivadas de orden superior.

Como $f'(z)$ es analítica, es con certeza continua, y por lo tanto $\mathrm{Re}\, f'(z)$ y $\mathrm{Im}\, f'(z)$ son también continuas. Teniendo esto en cuenta, observamos que las cuatro derivadas parciales de primer orden son continuas. Las ocho derivadas parciales de segundo orden son también continuas, pues cada una de ellas es igual a $\pm\mathrm{Re}\, f''(z)$ o a $\pm\mathrm{Im}\, f''(z)$. Este proceso se generaliza fácilmente por inducción y nos permite enunciar el siguiente

TEOREMA 5.3. *Todas las derivadas parciales de u y v son continuas en todo punto donde* $f = u + iv$ *sea analítica.*

La siguiente desigualdad se debe a Cauchy:

TEOREMA 5.4. *Supongamos en el Teorema 5.1 que exista una constante positiva M tal que* $|f(z)| \leq M$ *siempre que* $|z - \alpha| < R$. *Entonces*

$$|f^{(n)}(\alpha)| \leq \frac{Mn!}{R^n}. \tag{5.9}$$

Demostración. Si en la fórmula (5.6) el radio de C es igual a ρ y $z = \alpha$, se tiene

$$|f^{(n)}(\alpha)| \leq \frac{n!}{2\pi} \frac{M}{\rho^{n+1}} 2\pi\rho = \frac{Mn!}{\rho^n}.$$

Puesto que esta desigualdad es válida para todo $\rho < R$, haciendo tender $\rho \to R$ se obtiene (5.9).

El teorema siguiente suele llamarse "teorema de Liouville", aunque fue Cauchy el primero en establecerlo:

TEOREMA 5.5. *(Liouville). Si la función f(z) es analítica y acotada en todo el plano z, entonces f(z) es constante. (Dicho de otro modo, una función entera no puede ser acotada sin ser constante.)*

Demostración. Existe por hipótesis una constante M tal que $|f(z)| \leq M$. En virtud de (5.9), con $n = 1$,

$$|f'(\alpha)| \leq \frac{M}{R}$$

para todo valor arbitrario de R. Por lo tanto, $f'(\alpha) = 0$ como α, es arbitrario, $f'(z) = 0$. De

$$f(z) - f(0) = \int_0^z f'(\zeta)\, d\zeta$$

se deduce $f(z) = f(0)$, lo que prueba el teorema.

Se establecerá ahora el siguiente teorema:

TEOREMA 5.6. *(Morera). Supongamos que f(z) sea continua en un dominio D, y supongamos que además se verifica*

$$\int_C f(z)\, dz = 0 \tag{5.10}$$

para todo triángulo C que esté contenido junto con su interior en el dominio D. Entonces f(z) es analítica en D. (Obsérvese que no se impone ninguna restricción a D.)

Demostración. Sea α un punto de D, y supongamos que el número positivo ρ sea lo bastante pequeño como para que el disco G: $|z - \alpha| < \rho$ esté contenido en D. Entonces G es un dominio estrellado sobre el cual son válidas las hipótesis del Teorema 3.3. Existe, por lo tanto, una función analítica $F(z)$ tal que $F'(z) = f(z)$ en todo punto de G. Como $F(z)$ es analítica en G. posee derivadas analíticas de todos los órdenes, y en particular $F'(z) = f(z)$ es analítica en G. Como α era un punto arbitrario de D, se sigue que $f(z)$ es analítica en D.

El teorema de Morera es con frecuencia un recurso extraordinariamente útil para establecer la analiticidad de una función, pues suele ser más fácil justificar la existencia de una integral que la de una derivada.

Ejemplo 5.1. Teorema fundamental del álgebra. Demostrar que todo polinomio no constante $P(z)$ tiene al menos una raíz. Se comprueba fácilmente que $|P(z)| \to \infty$ cuando $|z| \to \infty$, y por consiguiente $1/P(z)$ está acotada en el exterior de una circunferencia $|z| = R$. Si $P(z)$ no es nunca nulo, entonces $1/P(z)$ está acotada también para $|z| \leq R$, puesto que es continua, y por consiguiente, $1/P(z)$ está acotada para todo z. En virtud del teorema de Liouville, $1/P(z)$ es constante, y por lo tanto, $P(z)$ es también constante.

Problemas.

1. Si $f(z)$ es una función entera tal que $\mathrm{Re} f(z) \leq M$ para todo valor de z, siendo M constante, demostrar que $f(z)$ es constante. (Se aplica al teorema de Liouville a $e^{f(z)}$.)
2. Si $f(z)$ es una función analítica para $|z| \leq R$, demostrar que

$$|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!}{2\pi R^n} \int_0^{2\pi} |f(\mathrm{Re}^{i\theta})| \, d\theta.$$

3. Sea $f(z)$ una función entera tal que $|f(z)| \leq M|z|^m$ para valores grandes de $|z|$, siendo M una constante y $m \geq 0$ un número entero. Demostrar que $f(z)$ es un polinomio de grado a lo sumo igual a m. (Se usa la desigualdad de Cauchy con $n = m + 1$ a fin de establecer

$$|f^{(m+1)}(\alpha)| \leq \frac{M(m+1)!(R + |\alpha|)^m}{R^{m+1}}$$

y deducir de aquí que $f^{(m+1)}(\alpha) = 0$.)

4. Supongamos que la función entera $f(z)$ verifique $|f(z)| \leq |R|\epsilon(R)$ para valores grandes de $|z| = R$, siendo $\lim \epsilon(R) = 0$ cuando $R \to \infty$. Demostrar que $f(z)$ es constante. (Se procede como en la demostración del teorema de Liouville.)
5. Supongamos que la función u sea armónica en un dominio D y que tenga derivadas segundas continuas. Demostrar que u tiene derivadas de todos los órdenes en todos los puntos de D. (Se construye en un disco pequeño contenido en D una función v conjugada armónica de u como se explicó en el Capítulo 2, Sección 5.)
6. Sea $w = f(z)$ siendo $f(z)$ analítica cuando $|z| < 1$. Si $0 \leq r < 1$, demostrar que la longitud L de la imagen en el plano w de la circunferencia $|z| = r$ verifica

$$L \geq 2\pi r\,|f'(0)|.$$

La longitud es

$$L = \int |dw| = r\int_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})|\,d\theta.$$

Dar una acotación de esta última integral aplicando para ello el Problema 2 con f' en lugar de $n = 0$ y $R = r$.)

7. Utilizando el resultado del Problema 6 de la Sección 3, demostrar que si en el Teorema 5.1 se hace la hipótesis adicional de que $f(z)$ sea continua para $|z - \alpha| \leq R$, entonces la igualdad (5.9) es válida aun en el caso de que C sea la circunferencia $|z - \alpha| = R$
8. *Integrales del tipo de Cauchy.* Supongamos que f sea continua, aunque no necesariamente analítica, sobre el contorno C. Demostrar que la función

$$F(z) = \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \qquad \text{satisface} \qquad F'(z) = \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,d\zeta$$

en cualquier punto z que no se encuentre sobre C. Luego F es analítica en todo punto que no pertenezca a C. Es posible debilitar algo las hipótesis acerca de f; por ejemplo, sería suficiente que f fuera continua a trozos.
9. Supongamos que $f(t)$ sea continua cuando $a \leq t \leq b$. (a) Demostrar que la función

$$F(z) = \int_a^b e^{izt} f(t)\,dt \qquad \text{satisface} \qquad F'(z) = i\int_a^b e^{izt} t f(t)\,dt$$

en todo punto z, y que por consiguiente es una función entera. (b) Establecer un resultado análogo cuando el camino de integración sea un contorno arbitrario C.

10. Utilícese el teorema de Morera para dar una demostración diferente de la analiticidad de las funciones consideradas en los Problemas 8 y 9.

6. La serie de Taylor. Aparecen en Cálculo las series de Taylor de e^x, sen x, $\log(1 + x)$, Se demostrará aquí que toda función analítica puede ser representada mediante una serie de Taylor.

Aunque el estudio sistemático de las series se pospondrá hasta el Capítulo 6, haremos ahora un breve resumen de la terminología y las notaciones. Las sumas parciales de una serie de potencias

$$a_0 + a_1(z - \alpha) + a_2(z - \alpha)^2 + \cdots,$$

donde los a_j son números complejos, se definen por

$$s_n(z) = a_0 + a_1(z - \alpha) + \cdots + a_n(z - \alpha)^n.$$

Las sumas parciales forman una sucesión de polinomios $\{s_n(z)\}, n = 0, 1, 2, \ldots$.

Supongamos dadas una función $f(z)$ y una sucesión de funciones, $\{s_n(z)\}$ definidas todas ellas en una región G del plano complejo. Se dice que la sucesión *converge uniformemente* hacia la función f en la región G si para cada $\epsilon > 0$ existe un número entero N, que puede depender de ϵ pero no de ζ' tal que

$$|f(z) - s_n(z)| < \epsilon \tag{6.1}$$

para todos $n \geq N$ y z pertenecientes a G. Al usar la palabra "uniforme" lo que se desea es poner de manifiesto que el número N de (6.1) puede elegirse de modo que dependa solamente de ϵ y no del punto z considerado, mientras z se elija en la región G. La convergencia uniforme de la sucesión $\{s_n(z)\}$ hacia la función $f(z)$ en una región G se enuncia a veces en la forma

$$f(z) = \lim_{n \to \infty} s_n(z) \tag{6.2}$$

uniformemente sobre la región G. En particular, si $s_n(z)$ son las sumas parciales de una serie de potencias, (6.2) se escribe en ocasiones en la forma

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} a_k(z - \alpha)^k$$

uniformemente sobre la región G.

TEOREMA 6.1. *Supongamos que f(z) sea analítica para* $|z - \alpha| < R$ *y sea* $\rho < R$. *Entonces,*

$$f(z) = \sum_0^\infty \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(z - \alpha)^k$$

uniformemente en la región $|z - \alpha| \leq \rho$. *Es decir, f(z) está representada uniformemente por su serie de Taylor en el disco* $|z - \alpha| \leq \rho$.

Antes de dar la demostración de este hecho, mencionemos otra forma del Teorema 6.1 que es en ciertas ocasiones más conveniente, Sustituyendo en todas partes z por $z + \alpha$, la igualdad que figura en la tesis del teorema, puede escribirse

$$f(z + \alpha) = \sum_0^\infty \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!} z^k \tag{6.3}$$

y la condición $|z - \alpha| \leq \rho$ del Teorema 6.1 pasa a ser $|z| \leq \rho$ en (6.3). Por consiguiente, el Teorema 6.1 equivale a afirmar que (6.3) converge uniformemente para $|z| \leq \rho$.

Demostración. Definamos $h(z) = f(z + \alpha)$. Puesto que $f(z + \alpha)$ es analítica para

$$|(z + \alpha) - \alpha| < R,$$

evidentemente, $h(z)$ es analítica para $|z| < R$. Elijamos ρ_1 con la condición $\rho < \rho_1 < R$ y sea C_1 la circunferencia $|z| = \rho_1$. En virtud de la fórmula integral de Cauchy,

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} h(\zeta)\frac{1}{\zeta - z}\,d\zeta. \tag{6.4}$$

Sea n un entero positivo y $w \neq 1$, La identidad

$$\frac{1}{1 - w} = 1 + w + w^2 + \cdots + w^{n-1} + \frac{w^n}{1 - w}$$

se comprueba sin más que multiplicar ambos miembros por $1 - w$. Haciendo $w = z/\zeta$ y dividiendo por ζ se tiene

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta} + \frac{z}{\zeta^2} + \cdots + \frac{z^{n-1}}{\zeta^n} + \frac{z^n}{\zeta^n}\frac{1}{\zeta - z}$$

Por consiguiente, la igualdad (6.4) se transforma en

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{h(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta + \cdots + \frac{z^{n-1}}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{h(\zeta)}{\zeta^n}\,d\zeta + z^n h_n(z) \tag{6.5}$$

donde se ha puesto

$$h_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{h(\zeta)}{\zeta^n}\frac{d\zeta}{\zeta - z}. \tag{6.6}$$

En virtud de la fórmula (5.6), cuando $z = 0$,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{h(\zeta)}{\zeta^{k+1}}\,d\zeta = \frac{h^{(k)}(0)}{k!} = \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!} \tag{6.7}$$

La última de las igualdades anteriores es consecuencia de que $h(z) = f(z + \alpha)$. Así pues, (6.5) es equivalente a

$$f(z + \alpha) = f(\alpha) + f'(\alpha)z + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!}z^{n-1} + z^n h_n(z). \tag{6.8}$$

De acuerdo con la expresión (6.8), $z^n h_n(z)$ es la diferencia entre $f(z + \alpha)$ y los n primeros términos de la serie de Taylor (6.3). Para dejar establecido el teorema bastará demostrar que $|z^n h_n(z)|$ es arbitrariamente pequeño cuando n se toma suficientemente grande; hablando con precisión, debe demostrarse que dado $\epsilon > 0$ existe un N tal que

$$|z^n h_n(z)| < \epsilon \tag{6.9}$$

para todos $n \geq N$ y $|z| \leq \rho$.

Sea M_1 una cota superior de $h(z)$ sobre la circunferencia $|z| = \rho_1$ y sea $|z| \leq \rho$. Dado que $|\zeta - z| \geq |\zeta| - |z| \geq \rho_1 - \rho$, se deduce de (6.6) que

$$|z^n h_n(z)| \leq \rho^n \frac{M_1}{2\pi\rho_1{}^n(\rho_1 - \rho)}2\pi\rho_1 = \frac{M_1\rho_1}{\rho_1 - \rho}\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^n. \tag{6.10}$$

Como $\rho < \rho_1$, el segundo miembro tiende hacia 0 cuando $n \to \infty$, y por consiguiente podemos hallar un N que haga verdadera la acotación (6.9) quedando completa de este modo la demostración.

Como se demostrará ahora, la función $h_n(z)$ que figura en el segundo miembro de (6.8) es analítica cuando $|z| < R$. Evidentemente, la ecuación (6.8) define $h_n(z)$ y demuestra que ésta es analítica para $0 < |z| < R$. Así sólo queda demostrar que $h_n(z)$ es analítica en $z = 0$. Esto es consecuencia de (6.6), pues $h(\zeta)\zeta^n$ es continua sobre C_1 (ver el Problema 8 de la Sección 5). De hecho, (6.7) y (6.6) dan $h_n(0) = f^{(n)}(\alpha)/n!$

Como ya se hizo notar arriba, una serie de Taylor admite dos formas. Podemos desarrollar $f(z+\alpha)$ en potencias de z, o bien podemos desarrollar $f(z)$ en potencias de $z - \alpha$. Sustituyendo en (6.8) z por $z - \alpha$ y escribiendo $g_n(z) = h_n(z - \alpha)$ se obtiene el siguiente:

TEOREMA 6.2. *En las mismas hipótesis del Teorema 6.1,*

$$f(z) = f(\alpha) + f'(\alpha)(z - \alpha) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!}(z - \alpha)^{n-1} + g_n(z)(z - \alpha)^n$$

siendo $g_n(z)$ analítica cuando $|z - \alpha| < R$

$$g_n(\alpha) = \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}. \tag{6.11}$$

Las series de Taylor se comportan en muchos aspectos de manera muy parecida a los polinomios. Como ilustración de este hecho daremos el siguiente:

TEOREMA 6.3. *Supongamos que $f(z)$ sea analítica para $|z - \alpha| < R$. Entonces, la serie obtenida al derivar término a término la serie de Taylor de f converge uniformemente a $f'(z)$ en todo disco $|z - \alpha| \leq \rho < R$. Además, la serie de las derivadas es la serie de Taylor de $f'(z)$.*

Demostración. Como $f(z)$ es analítica para $|z - \alpha| < R$, lo mismo puede decirse, en virtud del Teorema 5.2, respecto de $f'(z)$ luego, $f'(z)$ tiene una serie de Taylor, que, explícitamente, es la

$$f'(\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{1!}(z - \alpha) + \cdots + \frac{f^{(n)}(\alpha)}{(n-1)!}(z - \alpha)^{n-1} + \cdots.$$

Como es evidente, esta es la misma serie que se obtendría por derivación formal término a término de la serie de Taylor de f, esto es, derivando respecto de z la serie

$$f(\alpha) + f'(\alpha)(z - \alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(z - \alpha)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(z - \alpha)^n + \cdots$$

Puesto que la serie obtenida por derivación formal y la serie de Taylor de $f'(z)$ coinciden, el Teorema 6.1 indica que aquélla converge uniformemente hacia $f'(z)$ en todo disco $|z-\alpha| \leqslant \rho < R$.

Ejemplo 6.1. Demostrar que

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots \tag{6.12}$$

y que la convergencia es uniforme en el disco $|z| \leq \rho$ para todo ρ.

Escribiendo $f(z) = \cos z$, sus derivadas son $-\operatorname{sen} z$, $-\cos z$, $\operatorname{sen} z$, $\cos z, \ldots$ y por consiguiente,

$$f(0) = 1, \qquad f'(0) = 0, \qquad f''(0) = -1, \qquad f'''(0) = 0.$$

Como $f^{(iv)}(z) = f(z)$, la sucesión se repite periódicamente, y, por lo tanto, (6.12) es efectivamente la serie de Taylor de $\cos z$ en torno del punto $\alpha = 0$. Ya que $\cos z$ es analítica en el disco $|z| < R$ para todo valor positivo de R, el Teorema 6.1 demuestra, sin necesidad de mayor discusión que, para cada ρ fijo, la convergencia es uniforme en el disco $|z| \leq \rho$ Este resultado difiere notablemente de lo que ocurre en análisis real, en el cual es preciso estudiar en cada caso el comportamiento del resto de la serie.

Ejemplo 6.2. Dar una acotación del resto de la serie del Ejemplo 6.1 si se detiene el desarrollo en el término $z^{2m}/(2m!)$. Siendo $z = x + iy$,

$$2|\cos z| = |e^{iz} + e^{-iz}| \leq e^{y} + e^{-y} \leq e^{|y|} + 1$$

y de aquí, $2|\cos \zeta| \leq 1 + \exp \rho_1$ cuando $|\zeta| = \rho_1$. Esta acotación nos da el valor M_1 que figura en la expresión (6.10), y tomando $n = 2m+1$, concluimos que

$$\left|\cos z - \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}\right| \leq \frac{1 + e^{\rho_1}}{\rho_1 - \rho} \frac{\rho_1}{2} \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^{2m+1}$$

para $|z| \leqslant \rho < \rho_1$. No es sencillo elegir ρ_1 de manera óptima. Sin embargo, si se toma $\rho_1 = 2\rho$, es fácil obtener la cota $(1 + e^{2\rho})/2^{2m+1}$.

Ejemplo 6.3. Hallar $\lim(1-\cos z)/z^2$ cuando $z \to 0$. En virtud de (6.12) y del Teorema 6.2,

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2} + z^3 g(z)$$

siendo $g(z)$ una función entera. Por consiguiente, si $z \neq 0$

$$\frac{1 - \cos z}{z^2} = \frac{1}{2} - zg(z)$$

y el límite cuando $z \to 0$ es igual a $1/2$.

Ejemplo 6.4. Si $f(z) = (1 - \cos z)/z^2$ para $z \neq 0$ y $f(0) = \frac{1}{2}$, demostrar que f es una función entera. Por el ejemplo anterior, $f(z) = \frac{1}{2} - zg(z)$ para $z \neq 0$ y también para $z = 0$. Como g es entera, también lo es f.

Ejemplo 6.5. Demostrar que una serie de Taylor puede integrarse término a término. Concretamente, demostrar que si $f(z)$ es analítica para $|z| < R$, y si su serie de Taylor en torno al origen es

$$f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n,$$

entonces,

$$\int_0^z f(\zeta)\, d\zeta = \sum_0^\infty \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} \tag{6.13}$$

uniformemente para $|z| \leq \rho < R$.

Si se denota la integral por $F(z)$ entonces $F(z)$ es analítica para $|z| < R$ y además $F'(z) = f(z)$. Aplicando a $F(z)$ el Teorema 6.3, se ve que la serie de Taylor de $F(z)$ debe ser (6.13), y la conclusión se deduce del Teorema 6.1.

Problemas

1. Demostrar que $|z| \leq \rho < \infty$,

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots, \qquad \operatorname{sen} z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots.$$

2. Obtener la serie de Taylor de $(1 - z)^{-1}$ en torno del punto 0 y deducir de ella que

$$\frac{1}{(1-z)^2} = 1 + 2z + 3z^2 + \cdots, \quad \operatorname{Log}(1-z) = -z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \cdots$$

uniformemente sobre $|z| \leq \rho < 1$.

3. Sea β un número complejo arbitrario. Demostrar que tomando $(1+z)^\beta = e^{\beta \operatorname{Log}(1+z)}$ se verifica

$$(1+z)^\beta = 1 + \frac{\beta}{1}z + \frac{\beta(\beta-1)}{1\cdot 2}z^2 + \frac{\beta(\beta-1)(\beta-2)}{1\cdot 2\cdot 3}z^3 + \cdots.$$

siendo la convergencia uniforme para $|z| \leq \rho < 1$. Esta serie es la llamada serie binómica. Idea de la demostración: se comprueba por inducción que

$$\frac{d^n}{dz^n} e^{\beta \operatorname{Log}(1+z)} = \beta(\beta-1)\cdots(\beta-n+1)e^{(\beta-n)\operatorname{Log}(1+z)}.$$

4. Demostrar que asignando a las funciones $(\operatorname{sen} z)/z$, $(e^z - 1)/z$, y $(1/z)\operatorname{Log}(1+z)$ el valor 1 para $z = 0$, las funciones que se obtienen de este modo son analíticas para todos los puntos "suficientemente próximos" a 0. Obtener entonces la serie de Taylor de

$$S(z) = \int_0^z \frac{\operatorname{sen}\zeta}{\zeta}\,d\zeta, \qquad E(z) = \int_0^z \frac{e^\zeta - 1}{\zeta}\,d\zeta, \qquad L(z) = \int_0^z \frac{\operatorname{Log}(1+\zeta)}{\zeta}\,d\zeta.$$

5. Imitando el Ejemplo 6.2, dar una cota superior del resto de la serie de e^z. De acuerdo con dicha acotación, ¿cuántos términos serán necesarios para calcular e^z con un error menor que $\pm 10^{-20}$ para el disco $|z| \leq 1$? Solución: si se toma $\rho_1 = 2\rho$ son necesarios 70 términos.
6. Siendo $P(z)$ un polinomio de grado ≤ 3, hallar a_n tales que

$$\frac{P(z)}{(z^2+1)(z-1)(z-2)} = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

para $|z| < 1$. (Se utiliza el desarrollo en fracciones simples; ver el Capítulo 2, Problema 1.1)

7. Deducir el resultado del Ejemplo 6.5 usando el procedimiento empleado para demostrar el Teorema 6.3.
8. Sea C la circunferencia $|z - \alpha| = \rho_1$. Consultando el Problema 4 de la Sección 2 y la fórmula (6.6) demostrar que las funciones $h_n(z)$ y $g_n(z) \equiv h_n(z - \alpha)$ definidas en el texto satisfacen

$$h_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha)^n}\frac{d\zeta}{\zeta-\alpha-z}, \quad g_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha)^n}\frac{d\zeta}{\zeta-z}.$$

9. Utilizar el teorema de Morera para demostrar que la función $g_n(z)$ del Problema 8 es analítica.
10. Aunque no sea completamente evidente con la notación utilizada en texto, es claro que $h_n(z)$ depende de α; es decir, $h_n(z) = h_n(z,\alpha)$ y análogamente para g_n. Utilizando el teorema de Morera, demostrar que la función $h_n(z,\alpha)$ es función analítica de α.
11. Demostrar que si la serie de potencias $\Sigma_0^\infty a_n z^n$ converge uniformemente hacia la función analítica $f(z)$ cuando $|z| \leq \rho$, entonces dicha serie es la serie de Taylor de f. (Sea C la circunferencia $z = \rho e^{i\theta}$. En virtud de (6.1), si k es un número entero,

$$\left|\int_C [f(z) - s_n(z)]z^{-k-1}\,dz\right| \leq \frac{2\pi\epsilon}{\rho^k}.$$

Para $n > k$ la acotación anterior se transforma en

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z^{k+1}}\,dz - a_k\right| \leq \frac{\epsilon}{\rho^k}.$$

Puesto que ϵ es arbitrario, el primer miembro es 0, y la fórmula (5.6) nos da $a_k = f^{(k)}(0)/k!$)

12. Demostrar que las series de Taylor pueden multiplicarse por la regla de Cauchy. Concretamente, demostrar que si f y g son analíticas en el disco $|z| < R$ y sus series de Taylor son, respectivamente,

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots, \qquad g(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots,$$

entonces la serie de Taylor de $f(z)g(z)$ es

$$a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)z + \cdots + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0)z^n + \cdots$$

y esta serie converge uniformemente hacia $f(z)g(z)$ en el disco $|z| \leq \rho < R$. (Bastará demostrar que el coeficiente de z^n en esta última serie es

$$\frac{1}{n!}\frac{d^n}{dz^n}[f(z)g(z)] \qquad \text{para } z = 0.$$

La segunda conclusión se deduce entonces del Teorema 6.1)

7. **Principios de identidad y del módulo máximo.** El desarrollo de Taylor nos muestra que, conocidos los valores de $f(\alpha), f'(\alpha), f''(\alpha), \ldots$ en un punto α de un dominio D en el cual f es analítica, se conoce también el valor de $f(z)$ en todos los puntos de un disco $|z - \alpha| < R$ de centro α. Resulta entonces que conocida $f(z)$ sobre un arco indefinidamente diferenciable contenido en $|z - \alpha| < R$, por pequeño que sea, $f(z)$ está determinada de modo único en todo el disco $|z - \alpha| < R$, pues derivando $f(z)$ sobre el arco es posible conocer todas sus derivadas en un punto. Este resultado no se deducé inmediatamente de la fórmula integral de Cauchy, pues para poder aplicar dicha fórmula para determinar f en el interior de un disco es preciso conocer el valor de $f(z)$ en toda la frontera del disco.

Demostraremos ahora que $f(z)$ está unívocamente determinada en la totalidad del dominio D, y no solamente en un pequeño disco, una vez conocidas todas sus derivadas $f^{(k)}(\alpha)$. Otros resultados, que enunciamos algo más adelante, permiten demostrar que $f(z)$ está determinada también de modo único en D conocidos sus valores sobre cualquier curva continua C, que no es necesario que sea indefinidamente diferenciable.

TEOREMA 7.1. *Supongamos que f y g sean analíticas en el dominio D, y que $f(z) = g(z)$ sobre un entorno de algún punto de D. Entonces $f = g$ sobre todo el dominio D.*

La demostración de este teorema se apoya en la siguiente propiedad de los números reales. Sea S un conjunto no vacío de puntos de un intervalo $a \leq t \leq b$. Se dice que el número t_0 es extremo superior de S cuando

(1) Todo número t perteneciente a S verifica $t \leq t_0$.

(2) Para todo $\epsilon > 0$, existen números t pertenecientes al conjunto S tales que $t > t_0 - \epsilon$.

Entonces el extremo superior de S existe, pertenece al intervalo $a \leq t \leq b$ y además es único.

Demostración. Definamos $F(z) = f(z) - g(z)$ y supongamos que $f(\beta) \neq g(\beta)$ en algún punto β de D. Unamos α con β mediante una línea poligonal contenida en D, como se muestra en la Figura 7.1. Esta línea quebrada se denota $z = \zeta(t)$, $a \leq t \leq b$, siendo $\zeta(t)$ continua y $\zeta(a) = \alpha$, $\zeta(b) = \beta$. Sea S el conjunto de puntos de $a \leq t \leq b$ tales que F y todas sus derivadas se anulan en el punto $z = \zeta(t)$, esto es, t está en S si y solamente si

$$F^{(k)}[\zeta(t)] = 0, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

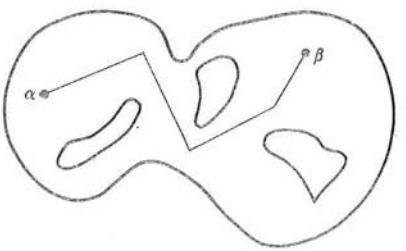


Figura 7-1

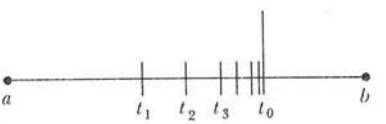


Figura 7-2

El conjunto S no es vacío, pues $t = a$ se encuentra en S, y por lo tanto S tiene un extremo superior t_0. Por la definición de extremo superior, podemos encontrar una sucesión t_n de puntos de S tal que $t_n \to t_0$ (Figura 7-2). Puesto que las derivadas son continuas,

$$F^{(k)}[\zeta(t_0)] = \lim_{n\to\infty} F^{(k)}[\zeta(t_n)] = 0$$

La validez de la última igualdad se debe a que todos los puntos t_n están en S. Esto demuestra que F se anula juntamente con todas sus derivadas en el punto $z_0 = \zeta(t_0)$, y por lo tanto, el punto t_0 se halla en S. Como $F(\beta) \neq 0$, concluimos que $t_0 < b$.

El desarrollo de Taylor de $F(z)$ según las potencias de $z - z_0$, donde $z_0 = \zeta(t_0)$, muestra que $F(z)$ es idénticamente nula en un entorno de z_0. Por consiguiente todo t para el cual $|t - t_0|$ sea "pequeño" se encuentra en S, y en particular hay un $t > t_0$, que está en S. Esto contradice el hecho de que t_0 sea el extremo superior de S. Por consiguiente, no hay ningún punto β en el cual $f(\beta) \neq g(\beta)$ quedando demostrado el teorema. (Es posible dar otra demostración basada en el hecho de que el conjunto de puntos en los que se verifica $f^{(n)}(z) = g^{(n)}(z)$ para todo valor entero $n \geq 0$ es al mismo tiempo abierto y cerrado en D, y por lo tanto, ha de ser vacío o igual a D.)

TEOREMA 7.2. *Sea $f(z)$ una función analítica en un dominio D. Sea α un punto de D y supongamos que $f(\alpha) = 0$. Entonces, o bien $f(z)$ es idénticamente nula sobre D o bien existen un eterno positivo m y una función $g(z)$ analítica en D tales que*

$$f(z) = (z - \alpha)^m g(z) \tag{7.1}$$

siendo $g(\alpha) \neq 0$ y $g(\alpha) = f^{(m)}(\alpha)/m!$

Demostración. O bien se verifica $f^{(k)}(\alpha) = 0$ para todo k o bien existe un número entero $m > 0$ tal que $f^{(k)}(\alpha) = 0$ para $k < m$ y $f^{(m)}(\alpha) \neq 0$. En el primer caso la serie de Taylor es idénticamente nula, y por el Teorema 6.1, $f(z)$ ha de ser nula en todos los puntos de un disco. Aplicando ahora el Teorema 7.1 con $g = 0$, se deduce que $f(z) \equiv 0$ en todo D.

En el segundo caso, tomemos el n que aparece en el Teorema 6.2 igual a m. Entonces se verifica $f(z) = (z - \alpha)^m g_m(z)$ en un entorno de α. Sirviéndonos de (6.11) y designando por $g_m(z)$ a $g(z)$ en el entorno de $z = \alpha$ vemos que $g(\alpha) = f^{(m)}(\alpha)/m! \neq 0$. Para terminar de demostrar el Teorema basta tomar

$$g(z) = f(z)/(z - \alpha)^m$$

fuera del entorno de α.

Como consecuencia inmediata del Teorema 7.2 se tiene el siguiente

TEOREMA 7.3. *Si $f(z)$ es analítica y no idénticamente nula en un dominio D, sus ceros son puntos aislados; es decir, si $f(\alpha) = 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $f(z) \neq 0$ para $0 < |z - \alpha| < \delta$.*

Demostración. En virtud de (7.1), siendo g analítica y $f(z) = (z - \alpha)^m g(z)$. Como g es continua, existe un entorno de $g(\alpha) \neq 0$ de lo que se sigue la conclusión del teorema $g(z) \neq 0$.

El teorema siguiente implica un resultado que ya ha sido enunciado, el hecho de que $f(z)$ está determinada de manera única en un dominio, una vez conocidos su valor sobre una curva continua contenida en D,

TEOREMA 7.4. *Supongamos que f y g sean funciones analítica en un dominio D y que $f(z_n) = g(z_n)$ sobre una sucesión z_n de puntos distintos que tenga un límite α perteneciente a D. Entonces $f = g$ sobre D.*

Demostración. Puesto que es continua, la función $F(z) = f(z) - g(z)$ se anula también en α. Dado que $F(z_n) = 0$ y $z_n \to \alpha$, este cero de F no es aislado, y en virtud del Teorema 7.3, $F = 0$

A pesar de que el Teorema 7.4 muestra que $f(z)$ está unívocamente determinada por su valor sobre la sucesión $\{z_n\}$, no se da ningún procedimiento para calcular su valor de modo efectivo. Este resultado difiere, pues, notablemente de la fórmula integral de Cauchy, la cual no solamente nos muestra que f está determinada por su valor en el contorno de un disco, sino que además nos proporciona un método efectivo para calcular su valor. Otra de las diferencias entre el Teorema 7.4 y la fórmula de Cauchy es que en el Teorema 7.4 es esencial que el límite sea interior al dominio de analiticidad. En cambio, si f es continua, no es necesario que f sea analítica sobre el contorno para que sea válida la fórmula de Cauchy [1]. Es decir, f está determinada en todo el círculo por su valor sobre la circunferencia, aún en el caso de que f no sea analítica sobre ésta.

Demostramos ahora que es válido para todo dominio acotado D un resultado parecido, y más aún, que $f(z)$ está determinada, salvo una constante imaginaria pura, conociendo tan sólo su parte real sobre la frontera del dominio. En la demostración de estos hechos juega un papel fundamental el principio del módulo máximo, que se analiza a continuación.

LEMA 7.1. *Sea $g(\theta)$ una función real continua sobre el intervalo $a \leqslant \theta \leqslant b$, y supongamos que $g(\theta) \leq k$ siendo k una constante. Si*

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b g(\theta)\, d\theta \geq k,$$

entonces $g(\theta) = k$

El lema afirma que si el valor medio de una función real continua en un intervalo es mayor o igual que una cota superior de la función en el intervalo, entonces la función es en todo él constantemente igual a dicha cota superior.

Demostración. Si en algún punto ξ, se verificara $g(\xi) < k$, por la continuidad de la función $g(\theta)$ existirían números positivos ϵ y δ tales que

[1] Ver la sección 5, Problema 7.

$$g(\theta) \leq k - \epsilon \qquad \text{para } \xi - \delta \leq \theta \leq \xi + \delta.$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}\int_a^b g(\theta)\,d\theta &= \left(\int_a^{\xi-\delta} + \int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} + \int_{\xi+\delta}^{b}\right) g(\theta)\,d\theta \\ &\leq (\xi - \delta - a)k + 2\delta(k - \epsilon) + (b - \xi - \delta)k \\ &= (b - a)k - 2\delta\epsilon\end{aligned}$$

ó

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b g(\theta)\,d\theta \leq k - \frac{2\delta\epsilon}{b-a},$$

lo que contradice la hipótesis; quedando así demostrado el Lema.

TEOREMA 7.5. *(Principio del Módulo máximo) Sea f(z) una función analítica en un dominio D. Entonces* $|f(z)|$ *no puede tener un máximo en ningún punto de D, salvo en el caso de que f(z) sea constante. De manera precisa, (7.2) implica que f es constante.*

Demostración. Sea α un punto de D, y supongamos que en un cierto ϵ–entorno de α,

$$|f(\alpha)| \geq |f(z)|, \qquad |z - \alpha| < \epsilon. \quad (7.2)$$

Si $f(\alpha) = 0$, en virtud de (7.2), $f(z) = 0$ en todo un entorno de α, y por consiguiente $f(z) = 0$ en todo D, lo que demostraría en este caso el teorema. Supongamos ahora que $f(\alpha) \neq 0$. Por la fórmula integral de Cauchy, con $\zeta = \alpha + re^{i\theta}$ y $z = \alpha$,

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha + re^{i\theta})\,d\theta \quad (7.3)$$

para todo $r < \epsilon$. Si se define

$$F(r,\theta) = \operatorname{Re}\frac{f(\alpha + re^{i\theta})}{f(\alpha)}, \quad (7.4)$$

entonces F es continua, y tomando $z = \alpha + re^{i\theta}$, en (7.2),

$$F(r,\theta) \leq \left|\frac{f(\alpha + re^{i\theta})}{f(\alpha)}\right| \leq 1. \quad (7.5)$$

Dividiendo los dos miembros de (7.3) por $f(\alpha)$ y tomando la parte real se tiene

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(r,\theta)\, d\theta.$$

Como F es continua, (7.5) y la igualdad anterior implican, en virtud del Lema 7.1, que $F(r,\theta) = 1$. Por (7.4),

$$\operatorname{Re} \frac{f(\alpha + re^{i\theta})}{f(\alpha)} = 1$$

la cual, combinada con (7.5), nos da

$$\operatorname{Im} \frac{f(\alpha + re^{i\theta})}{f(\alpha)} = 0$$

y por tanto

$$\frac{f(\alpha + re^{i\theta})}{f(\alpha)} = 1$$

En otras palabras, hemos demostrado que $f(z) = f(\alpha)$ en un entorno de α. En virtud del Teorema 7.1, con $g(z) = f(\alpha)$, se deduce que $f(z) = f(\alpha)$ *en* D y el teorema queda demostrado.

TEOREMA 7.6 (Principio del módulo máximo) Supongamos que $f(z)$ *sea analítica en una región acotada* D, *y que* $|f(z)|$ *sea continua en la región cerrada* $\overline{D}$. *Entonces* $|f(z)|$ *alcanza su máximo en la frontera de dicha región.*

Demostración. Si $f(z)$ es constante el teorema es trivial. Supongamos que $f(z)$ no sea constante. Como $|f(z)|$ es continua, en virtud de un conocido teorema de Análisis real, $|f(z)|$ alcanza un máximo en algún punto de la región cerrada y acotada $\overline{D}$. Por el teorema anterior, no podrá alcanzarse dicho máximo en ningún punto interior; por lo tanto, habrá de ser alcanzado en la frontera.

TEOREMA 7.7. *Supongamos que $f(z)$ y $g(z)$ sean analíticas en el dominio acotado D, que $\mathrm{Re}\, f(z)$ y $\mathrm{Re}\, g(z)$ sean continuas en $\overline{D}$, y supongamos además que $\mathrm{Re}\, f(z) = \mathrm{Re}\, g(z)$ en todos los puntos de la frontera del dominio. Entonces $f(z) - g(z) =$ en todo D, siendo c una constante real.*

Se da una demostración del teorema en el Problema 5. El resultado anterior indica que f está casi determinada por el valor de $\mathrm{Re}\, f(z)$ sobre la frontera del dominio, pero no nos proporciona ningún método para calcular efectivamente su valor. La determinación efectiva de $f(z)$ en D, conociendo $\mathrm{Re}\, f(z)$ en la frontera, es un problema de primera magnitud tanto en la Matemática pura como en la aplicada. En el capítulo siguiente se darán algunos métodos para abordar este problema.

Ejemplo 7.1. Regla de l'Hospital. Supongamos que f y g sean funciones analíticas y no idénticamente nulas en un dominio D. Si $f(\alpha) = g(\alpha) =$ 0 en un punto α del dominio D, demostrar que

$$\lim_{z \to \alpha} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \to \alpha} \frac{f'(z)}{g'(z)},$$

pudiendo ser ∞ el valor de los dos miembros. Por el Teorema 7.2,

$$f(z) = (z - \alpha)^m F(z), \qquad g(z) = (z - \alpha)^n G(z)$$

siendo $m \geq 1$, $n \geq 1$ y $F(\alpha) \neq 0, G(\alpha) \neq 0$. Cuando $z \neq \alpha$ pero hallándose z "cerca" de α, un cálculo sencillo nos da

$$\frac{f(z)}{g(z)} = (z - \alpha)^k \frac{F(z)}{G(z)}, \qquad \frac{f'(z)}{g'(z)} = (z - \alpha)^k \frac{mF(z) + (z - \alpha)F'(z)}{nG(z) + (z - \alpha)G'(z)}$$

donde $k = m - n$. Si $k = 0$ entonces $m = n$ y el valor común de ambos límites es $F(\alpha)/G(\alpha)$. Si $k > 0$, ambos límites son 0, y si $k < 0$ ambos límites son ∞.

Problemas.

Desde ahora en adelante, aunque no se anuncie explícitamente, la letra M designará siempre una constante.

1. Demostrar que si dos funciones enteras f y g coinciden sobre un segmento del eje real, por pequeño que éste sea, entonces son idénticas para todo valor de z.
2. Siendo f analítica en una región cerrada y acotada G y $f(z) \neq 0$ en G, demostrar que $|f|$ alcanza su valor mínimo en la frontera de G. (Considérese $1/f$.)
3. Utilícese el Problema 2 para demostrar el Teorema fundamental del álgebra.
4. Supongamos que $f(z)$ y $g(z)$ sean analíticas en una región acotada D y continuas en $\overline{D}$. Si en la frontera se verifica $f(z) = g(z)$, demostrar que ésta igualdad es válida en todo D utilizando el principio del módulo máximo. El Teorema 7.7 da un resultado mucho más fuerte, pero no debe utilizarse para resolver este problema.
5. (a) Si $h(z)$ es analítica en un dominio D y no se reduce a una constante, demostrar que $\operatorname{Re} h$ no puede alcanzar ni un máximo ni un mínimo en D. (Considérese e^h.) (b) Demostrar el Teorema 7.7 aplicando la parte (a) a la función $h = f - g$.
6. Bien por la regla de l'Hospital, bien mediante cualquier otro procedimiento, calcular

$$\lim_{z \to \pi} \frac{\operatorname{sen} z}{\pi - z}, \quad \lim_{z \to i} \frac{e^{\pi z} + 1}{z^2 + 1}, \quad \lim_{z \to 0} \frac{(1 - \cos z)^2}{\operatorname{sen} z + \operatorname{senh} z - 2z}.$$

7. *Lema de Schwarz.* Supongamos que $f(z)$ sea analítica cuando $|z| \leq R$, sea $f(0) = 0$, y $|f(z)| \leq M$ para $|z| = R$. Demostrar que

$$|f(z)| < \frac{M}{R}|z| \qquad \text{para } 0 < |z| < R$$

excepto en el caso de que $f(z) = cz$ para una constante c. (El Lema 7.2 con $m = 1$ y $\alpha = 0$ nos da $f(z) = zg(z)$ siendo $g(z)$ una función analítica para $|z| \leq R$. Obtener una cota superior de $|g(z)|$ utilizando la hipótesis en el caso $|z| < R$ y el principio del módulo máximo para $|z| = R$.
8. Supongamos que $f(z)$ sea analítica para $|z| < R$ y que $f(0) = 0$. Si $|f(z)| \leq M$ para $|z| < R$, demostrar que $|f(z)| \leq M|z|/R$ para $|z| < R$. (Se aplica el Problema 7 para el disco $|z| \leq \rho < R$ y se hace tender $\rho \to R$.)
9. Sea $f(z)$ una función analítica para $|z| < R$ y supongamos que $\operatorname{Re} f(z) < A$ siendo A una constante. Si $f(0) = 0$, demostrar que

$$|f(z)| \leq \frac{2A|z|}{R - |z|}, \qquad |z| < R.$$

(Se demuestra que $|f(z)/[2A - f(z)]| \leq 1$ y se utiliza el Problema 8).
10. Sea C un contorno de longitud L y sea $f(z)$ una función continua en C. Si se verifica sobre C que $|f(z)| \leq M$, demostrar que

$$\left| \int_C f(z)\, dz \right| < ML$$

salvo en el caso de que $|f(z)| = M$ en todo punto de C.

11. Explicar de qué modo sería posible utilizar el resultado del Problema 10 en lugar del Lema 7.1 para demostrar el Teorema 7.5.

8. **Singularidades aisladas.** Sea f una función analítica en el disco perforado $0<|z-\alpha|<R$. Así pues, $f(z)$ es una función uniforme y derivable excepto posiblemente en el punto α donde f puede no estar definida. Se demostrará que $f(z)$ solamente tiene tres formas posibles de comportamiento en el entorno de $z = \alpha$. El punto $z = \alpha$ se denomina punto singular de $f(z)$, y se dice entonces que f presenta una singularidad aislada en $z = \alpha$. En caso de que $f(z)$ se pueda convertir en una función analítica en todo el disco $|z - \alpha|<R$ asignándole a f un valor conveniente en el punto $z = \alpha$ se dice que α es un punto singular evitable de $f(z)$.

A fin de dar un ejemplo de punto singular evitable, consideremos la función $f(z) = \operatorname{sen} z/z$. En el punto $z = 0$ el cociente no está definido, y por consiguiente, $z = 0$ es un punto singular de $f(z)$. Por el Teorema 6.2 aplicado a la función $\operatorname{sen} z$ con $\alpha = 0$ y $n = 3$,

$$\operatorname{sen} z = z + z^3 g(z)$$

siendo $g(z)$ una función analítica para todo z. Así, para $z \neq 0$

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z} = 1 + z^2 g(z).$$

Evidentemente, la función del segundo miembro es analítica para todo valor de z, incluido $z = 0$. Por consiguiente, si se define $f(0) = 1$ y $f(z) = \operatorname{sen} z/z$, $z \neq 0$, la función $f(z)$ es analítica en $z = 0$ y tomando $f(0) = 1$ se ha eliminado la singularidad.

Demos todavía otro ejemplo. Sea $f(z)$ analítica en un dominio D, sea β un punto de D, y definamos

$$F(z) = \frac{f(z) - f(\beta)}{z - \beta} \qquad (z \neq \beta), \qquad F(\beta) = f'(\beta). \tag{8.1}$$

Entonces F no solamente es continua en D (lo cual es evidente) sino que es también analítica en D. Este hecho se deduce del Teorema 6.2 tomando $n = 1$, exactamente del mismo modo que en la discusión que acabamos de hacer para $(\operatorname{sen} z)/z$. La función definida mediante la primera de las fórmulas (8.1) tiene una singularidad evitable en β, singularidad que se elimina mediante la segunda fórmula (8.1). Nos serviremos de esta función para demostrar el siguiente teorema.

TEOREMA 9.1. *(Riemann) Sea f(z) una función analítica en el disco perforado* $0<|z-\alpha|<R$ *y supongamos que*

$$\lim_{z\to\alpha}(z-\alpha)f(z)=0.$$

Entonces $f(z)$ *tiene una singularidad evitable en el punto* $z=\alpha$. *En otras palabras, puede asignársele a* $f(z)$ *un valor* $f(\alpha)$ *en el punto* α *de tal manera que la función resultante sea analítica en* $|z-\alpha|<R$.

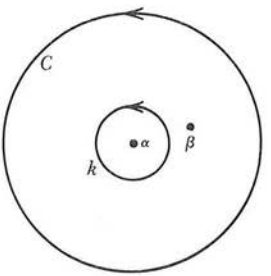


Figura 8-1

Demostración. Consideremos un punto cualquiera β del disco perforado y definamos F mediante la primera de las ecuaciones (8.1), con lo cual F será analítica en el disco perforado. Si C y k son dos circunferencias como las que se muestran en la Figura 8.1, entonces

$$\int_C F(z)\,dz=\int_k F(z)\,dz \tag{8.2}$$

como es fácil demostrar mediante un razonamiento parecido al de la Sección 5 (Ver la Figura 5-3). Sustituyendo F por su valor dado en (8.1) se tiene

$$\int_C \frac{f(z)}{z-\beta}\,dz-\int_C \frac{f(\beta)}{z-\beta}\,dz=\int_k \frac{f(z)}{z-\beta}\,dz-\int_k \frac{f(\beta)}{z-\beta}\,dz.$$

La segunda integral es igual a $2\pi i f(\beta)$, como puede verse aplicando la fórmula integral de Cauchy a la función constante $f(\beta)$. Como su integrando es una función analítica en el círculo limitado por k, la última integral es igual a 0. Ordenando convenientemente los restantes términos, se tiene:

$$2\pi i f(\beta) = \int_C \frac{f(z)}{z-\beta}\,dz - \int_k \frac{f(z)}{z-\beta}\,dz. \tag{8.3}$$

La hipótesis $(z-\alpha)f(\alpha) \to 0$ significa que si $\epsilon > 0$, existe un número $\eta > 0$ tal que

$$|(z-\alpha)f(z)| \leq \epsilon \qquad \text{para } |z-\alpha| \leq \eta.$$

Por consiguiente, si k es la circunferencia $|z-\alpha| = \eta$, se sigue que

$$\left|\int_k \frac{f(z)}{z-\beta}\,dz\right| = \left|\int_k \frac{(z-\alpha)f(z)}{(z-\alpha)(z-\beta)}\,dz\right| \leq \frac{2\pi\epsilon}{|\beta-\alpha|-\eta}.$$

Para deducir esta acotación hemos tenido en cuenta que

$$|z-\beta| = |(z-\alpha)-(\beta-\alpha)\,| \geq |\beta-\alpha| - \eta.$$

Haciendo tender $\epsilon \to 0$ vemos que la integral es 0, y de aquí, en virtud de (8.3),

$$2\pi i f(\beta) = \int_C \frac{f(z)}{z-\beta}\,dz. \tag{8.4}$$

Designamos ahora a la variable de integración con la letra ζ en lugar de z, y en lugar de β escribiremos z. Entonces la fórmula (8.4) da

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \tag{8.5}$$

en la cual $z \neq \alpha$ y $|z-\alpha| < \rho$. Se indicó ya en la demostración del Teorema 5.2 que la integral del segundo miembro representa una función analítica cuando $|z-\alpha| < \rho$. Por lo tanto, si se pone que por definición $f(\alpha)$ sea igual al segundo miembro de (8.5) cuando $z = \alpha$, $f(z)$ se convierte en una función analítica para $|z-\alpha| < \rho$ quedando demostrado el Teorema 8.1.

Si $f(z)$ es continua en α, entonces $\lim(z-\alpha)f(z) = 0$ y el Teorema 8.1 es aplicable. Lo mismo ocurre si $|f(z)|$ es acotada; efectivamente, $|f(z)| \leq M$ da

$$|(z-\alpha)f(z)| \leq M\,|z-\alpha|$$

y puesto que el segundo miembro tiende a 0, también habrá de tender a 0 el primero

Con mayor generalidad todavía, el Teorema 8.1 muestra que si una función analítica tiene una singularidad aislada en el punto α y se verifica (por ejemplo)

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z - \alpha|^{3/4}}$$

en un entorno de $z = \alpha$, f será analítica también en $z = \alpha$ sin más que definir convenientemente el valor $f(\alpha)$.

Puesto que una función analítica es continua, si se sabe que f tiene una singularidad evitable en α, basta definir $f(\alpha)$ de manera que $f(z)$ sea continua en $z = \alpha$ para poder asegurar que $f(z)$ es analítica en α.

Se dice que una singularidad aislada de la función $f(z)$ en el punto α es un *polo* de la función cuando

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - \alpha)^m} \tag{8.6}$$

siendo $m \geq 1$ un número entero, $g(z)$ una función analítica en un entorno de α y tal que $g(\alpha) \neq 0$. Se usa también la expresión "α es un polo de $f(z)$". Cuando $m = 1$, se dice que el polo es *simple*.

TEOREMA 8.2. *Una condición necesaria y suficiente para que una singularidad aislada de la función $f(z)$ en el punto $z = \alpha$ sea un polo es que*

$$\lim_{z \to \alpha} |f(z)| = \infty. \tag{8.7}$$

La igualdad (8.7) significa que dado cualquier $N > 0$ existe un $\delta > 0$, que depende de N, tal que

$$|f(z)| > N \qquad \text{para } 0 < |z - \alpha| < \delta.$$

Demostración. La condición (8.7) es necesaria como consecuencia inmediata de (8.6), puesto que $g(\alpha) \neq 0$. Para demostrar que la condición también es suficiente, consideramos $F(z) = 1/f(z)$. Entonces $F(z)$ tiene una singularidad aislada en $z = \alpha$. Evidentemente, $F(z) \not\equiv 0$. En virtud de (8.7), $F(z) \to 0$ cuando $z \to \alpha$. Por consiguiente, por el Teorema 8.1 $F(z)$ tiene una singularidad evitable en el punto α. Puesto que $F(z) \to 0$ cuando $z \to \alpha$, se sigue que tomando por definición $F(\alpha) = 0$, $F(z)$ es analítica en un entorno de α. Como $F(\alpha) = 0$, se deduce del Teorema 7.2 que existe un número entero $m > 0$ tal que

$$F(z) = (z - \alpha)^m h(z) \qquad h(\alpha) \neq 0$$

en un entorno de α. Puesto que $h(\alpha) \neq 0$, $g(z) = 1/h(z)$ es analítica en un entorno de α. Pero como $f = 1/F$

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - \alpha)^m}, \qquad g(\alpha) \neq 0, \quad (8.8)$$

lo que demuestra el teorema.

Se deduce de lo anterior que si f tiene un polo de orden m en el punto α, entonces $1/f$ tiene un cero de ese orden en dicho punto, y recíprocamente.

Una singularidad aislada de una función analítica que ni sea evitable ni tampoco un polo se llama una *singularidad esencial.* La función $e^{1/z}$ tiene una singularidad esencial en $z=0$. En efecto, si x es real y positivo y si $\xi = 1/x$, y $m > 0$

$$\lim_{x \to 0} x^m e^{1/x} = \lim_{\xi \to \infty} \frac{e^\xi}{\xi^m} = \infty,$$

y por consiguiente, ni $e^{1/z}$ es acotada en $z = 0$ ni tampoco puede tener un polo de orden m, cualquiera que éste sea, en el punto $z = 0$. Por consiguiente, tiene una singularidad esencial.

Una notable propiedad de las singularidades esenciales es que una función f toma en un entorno cualquiera de una de sus singularidades esenciales todos los valores excepto, a lo sumo, uno. Este hecho se conoce con el nombre de teorema de Picard. Por ejemplo, dado cualquier número complejo $\gamma \neq 0$ y cualquier $\delta > 0$, arbitrariamente pequeño, es fácil demostrar que $e^{1/z}$ toma el valor γ una infinidad de veces en $0 < |z| < \delta$. No demostraremos aquí el teorema de Picard. Demostraremos en cambio un teorema más débil:

TEOREMA 8.3. *(Casorati-Weierstrass).* Si $f(z)$ *tiene una singularidad esencial en el punto* $z = \alpha$ *si* γ *es un número complejo arbitrario, entonces en todo entorno de* α, $f(z)$ *toma valores arbitrariamente próximos a* γ. *Dicho con más precisión: Dados* γ, $\epsilon > 0$ y $\delta > 0$, *arbitrariamente, existe* ζ *tal que* $|\zeta - \alpha| < \delta$ y $|f(\zeta) - \gamma| < \epsilon$.

Demostración. Supongamos que el teorema sea falso. Existen entonces γ, ϵ y δ tales que, para todo valor de z perteneciente al disco perforado $0 < |z - \alpha| < \delta$

$$|f(z) - \gamma| \geq \epsilon > 0.$$

Por consiguiente, la función

$$\phi(z) = \frac{1}{f(z) - \gamma}$$

es analítica y acotada en el disco perforado anterior; y más concretamente, $|\phi(z)| \leq 1/\epsilon$. Dado que la singularidad que tiene $\phi(z)$ en α es aislada, y que $|\phi(z)|$ es acotada, esta singularidad es evitable. Por tanto, eligiendo convenientemente el valor $\phi(\alpha)$, $\phi(z)$ es analítica en el disco $|z - \alpha| < \delta$. Es evidente que $\phi(z)$ no es idénticamente nula. Puesto que

$$f(z) = \gamma + \frac{1}{\phi(z)}$$

se sigue que $f(z)$ o bien es analítica en $z = \alpha$ si $\phi(\alpha) \neq 0$, o bien $f(z)$ tiene un polo en α si $\phi(\alpha) = 0$. En cualquier caso, se contradice la hipótesis de que α es una singularidad esencial de f, lo que demuestra el teorema.

Se recordará que el comportamiento de una función $f(z)$ en el punto $z = \infty$ se estudia considerando el comportamiento de $f(1/\zeta)$ en el punto $\zeta = 0$. Por ejemplo, $f(z)$ es continua en $z = \infty$ si $f(1/\zeta)$ es continua en $\zeta = 0$, o lo que es equivalente si $|f(z) - f(\infty)| \to 0$, cuando $|z| \to \infty$. Supongamos que $f(z)$ sea una función analítica (uniforme) para $R < |z| < \infty$. Haciendo $z = 1/\zeta$ y considerando que el caso $\zeta = 0$, se ve que el punto $z = \infty$ es un punto singular aislado. Dicho punto puede ser (1) una singularidad evitable, (2) un polo, o (3) una singularidad esencial de f, casos que se discuten a continuación.

(1) Si $|f(z)|$ es acotada cuando $|z| \to \infty$, o si $|f(z)|/|z| \to 0$ cuando $|z| \to \infty$, entonces la singularidad en el punto ∞ es evitable. Luego, es posible definir $f(\infty)$ de manera que $f(z)$ sea continua en $z = \infty$, y entonces $f(z)$ se convierte en una función analítica en el ∞. En el caso particular de que $|f(z)| \to 0$ cuando $|z| \to \infty$, como es natural, se define $f(\infty) = 0$. Entonces $f(z)$ tiene un cero en ∞, y si $f(z) \not\equiv 0$ cuando $|z| > R$, f es de la forma

$$f(z) = \frac{h(z)}{z^m}$$

para $|z| > R$, siendo $m \geq 1$ un número entero, $h(z)$ una función analítica para $|z| > R$ (incluido el punto $z = \infty$ y $h(\infty) \neq 0$. El número entero m se llama orden del cero.

(2) Si $|f(z)| \to \infty$ cuando $|z| \to \infty$, entonces f tiene un polo en ∞, si es de la forma

$$f(z) = z^m h(z)$$

para $|z| > R$, siendo $m \geq 1$ un número entero, $h(z)$ una función analítica para $|z| > R$ (incluido el punto $z = \infty$), y $h(\infty) \neq 0$. El número entero m se llama orden del polo.

(3) Si $z = \infty$ es un punto singular aislado de f y no es ni una singularidad evitable ni tampoco un polo, entonces es una singularidad esencial. En este caso, para cualquier número complejo γ, cualquier $\epsilon > 0$ cualquier N arbitrariamente grande, existe ζ tal que $|\zeta| > N$ y en el cual se verifica

$$|f(\zeta) - \gamma| < \epsilon.$$

Luego $f(z)$ toma valores arbitrariamente próximos a cualquier número complejo dado en todo entorno de $z = \infty$.

Ejemplo 8.1. Estudiar las singularidades de la función en todo el plano ampliado

$$f(z) = \frac{(z^2 - 1)(z - 2)^3}{(\operatorname{sen} \pi z)^3}.$$

Evidentemente $f(z)$ es analítica para $|z| < \infty$, excepto en los puntos $z = 0, \pm 1, \pm 2$, en los cuales se anula el denominador. Todos los ceros de $\operatorname{sen}\pi z$, en dichos puntos son de orden 1, pues su derivada, $\pi \cos \pi z$, no es nula en ellos y por consiguiente, los ceros de $(\operatorname{sen} \pi z)^3$ son de orden 3. Por lo tanto, $f(z)$ tiene un polo de orden 3 en todo valor entero de z, excepto en $z = -1$, 1 y 2. Como $z^2 - 1 = (z + 1)(z - 1)$ tiene un cero de orden 1 en cada uno de los puntos -1 y 1, resulta que $f(z)$ tiene un polo de orden 2 en cada uno de dichos puntos. Aplicando la regla de l'Hospital en el punto $z = 2$ se tiene

$$\lim_{z \to 2} \frac{z - 2}{\operatorname{sen} \pi z} = \lim_{z \to 2} \frac{1}{\pi \cos \pi z} = \frac{1}{\pi}.$$

Por lo tanto, $f(z) \to 3/\pi^3$ cuando $z \to 2$ y la singularidad en $z = 2$ es evitable.

Nos queda por estudiar el caso $z = \infty$. Puesto que $f(1/\zeta)$ tiene un polo en $\zeta = 1/n$ para todo valor entero $n > 2$, la singularidad de $f(1/\zeta)$ en $\zeta = 0$ no es singularidad aislada. Esto demuestra que la singularidad de $f(z)$ en $z = \infty$ no es tampoco aislada.

Ejemplo 8.2. Supongamos que $f(z)$ sea analítica para $0 < |z - \alpha| < R$ y que tenga un polo de orden m en α. Sea $g(z) = (z - \alpha)^m f(z)$. Demostrar que

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - \alpha)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z - \alpha)^{m-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z - \alpha)} + h(z)$$

para $0 < |z - \alpha| < R$, donde $h(z)$ es analítica para $|z| < R$ y donde,

$$a_j = \frac{g^{(m+j)}(\alpha)}{(m+j)!}. \tag{8.9}$$

La parte de la serie que contiene los coeficientes a_j de índice $j < 0$ se llama *parte principal* o *parte singular* de $f(z)$ en α.

Para demostrarlo, supongamos que se ha eliminado la singularidad que tiene $g(z)$ en el punto α. En virtud del Teorema 6.2,

$$g(z) = g(\alpha) + g'(\alpha)(z-\alpha) + \cdots + \frac{g^{(m-1)}(\alpha)}{(m-1)!}(z-\alpha)^{m-1} + h(z)(z-\alpha)^m$$

poseyendo $h(z)$ las propiedades pedidas. Dividiendo por $(z-\alpha)^m$ se ve que la parte principal de $f(z)$ en el punto α es

$$\frac{g(\alpha)}{0!(z-\alpha)^m} + \frac{g'(\alpha)}{1!(z-\alpha)^{m-1}} + \cdots + \frac{g^{(m-1)}(\alpha)}{(m-1)!(z-\alpha)} \tag{8.10}$$

lo que concuerda plenamente con (8.9).

Dando la serie de Taylor completa de g, se llega a la conclusión de que

$$f(z) = \sum_{-m}^{\infty} a_j(z-\alpha)^j$$

siendo la convergencia uniforme en la corona $\eta \leq |z-\alpha| \leq \rho$ para todos $\eta > 0$ y $\rho < R$. Los coeficientes a_j están dados por la fórmula (8.9). Sin embargo, como ya se demostró en la Sección 6, están también dados por

$$a_j = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{g(\zeta)}{(\zeta-\alpha)^{m+j+1}}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha)^{j+1}}\,d\zeta$$

donde C es cualquier circunferencia $|z-\alpha| = c$ de radio $0 < c < R$. Se obtendrá en la sección siguiente la misma fórmula cuando $f(z)$ tenga una singularidad esencial en el punto α.

Problemas.

1. Clasificar los puntos singulares que puedan tener las funciones

$$e^z, \quad \frac{\cos z}{z}, \quad \frac{e^z - 1}{z(z-1)}, \quad \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1}, \quad \frac{z^5}{z^3 + z}, \quad e^{\cosh z}, \quad \frac{z(z-\pi)^2}{(\operatorname{sen} z)^2}.$$

en todo el plano complejo ampliado.

2. Estudiar las singularidades de $1/f(z)$, siendo $f(z)$ la función considerada en el Ejemplo 8.1.
3. Demostrar que una función analítica en todo el plano complejo ampliado es constante.
4. Demostrar que las partes principales de $8z^3(z+1)^{-1}(z-1)^{-2}$ en los puntos -1 y 1 son, respectivamente,

$$\frac{-2}{z+1} \qquad \text{y} \qquad \frac{4}{(z-1)^2} + \frac{10}{z-1}.$$

(Utilícese la fórmula (8.10) tomando $g(z) = z^3(z-1)^{-2}$ y con $g(z) = z^3(z+1)^{-1}$.)

5. Si $f(z)$ tiene un polo en ∞ se obtiene su parte principal tomando $\zeta = 1/z$ en la parte principal de $f(1/\zeta)$ en $\zeta = 0$. Demostrar que la parte principal de $(z^2+1)^2/(z^2 - z)$ en ∞ es $z^2 + z$ y comprobarlo por división en orden inverso.
6. Hallar constantes a_n, b_n y c_n tales que

$$\frac{e^z}{z^5} = \sum_{-5}^{\infty} a_n z^n, \qquad \frac{\operatorname{sen} z}{(z-2\pi)^2} = \sum_{-1}^{\infty} b_n (z-2\pi)^n, \qquad \frac{z^6}{(1-z)^3} = \sum_{-3}^{3} c_n (z-1)^n$$

para $z \neq 0$, $z \neq 2\pi$ y $z \neq 1$, respectivamente. ¿Cuáles son las partes principales de estas funciones en dichos puntos?

7. Comprobar directamente que e^z toma todos los valores excepto el 0 y que sen z toma todos los valores complejos en todo entorno de ∞.
8. Demostrar que si $f(z)$ es analítica en ∞, entonces $f(z)$ puede representarse para valores grandes de $|z|$ mediante una serie de la forma

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} \frac{b_n}{z^n}.$$

siendo uniforme la convergencia. (Considérense $\zeta = 1/z$, $g(\zeta) = f(1/\zeta)$. Se encontrará que $b_n = g^{(n)}(0)/n!$)

9. Desarrollar $(z-1)/(z+1)$ en serie de potencias de $1/z$.

Desarrollo en fracciones simples.

10. Sea $f(z)$ una función racional, es decir, una función $f = P/Q$ siendo P y Q polinomios. Supongamos que los polos de f en el plano z finito se encuentran en los puntos

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, y sean $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_k(z)$ respectivamente, las partes principales de f en dichos polos. Explícitamente,

$$f_j(z) = \frac{A_{j,1}}{(z-\alpha_j)} + \frac{A_{j,2}}{(z-\alpha_j)^2} + \cdots + \frac{A_{j,m}}{(z-\alpha_j)^m} \qquad (m = m_j).$$

Asimismo, sea el polinomio $f_{k+1}(z)$ la parte principal de f en el punto del ∞ Demostrar que

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_{k+1}(z) + C$$

siendo C una constante. La conclusión de este teorema se llama *desarrollo en fracciones simples.* Para determinar la constante C se le da a z un valor conveniente, por ejemplo, $z = 0$ o $z = \infty$. (Se debe demostrar que $g = f - f_1 - f_2 - \cdots - f_{k+1}$ es una función entera y acotada.)

11. Utilizando los resultados de los Problemas 4, 5 y 10, desarrollar en fracciones simples

$$\frac{8z^3}{(z+1)(z-1)^2}, \qquad \frac{(z^2+1)^2}{z(z-1)}, \qquad \frac{(z^2+1)^4}{z^3}, \qquad \frac{z^3-z}{z^2+4}.$$

12. Hallar las partes principales en todos los polos del plano ampliado y desarrollar en fracciones simples las siguientes funciones racionales

$$\frac{12}{z^2(z^2+4)}, \qquad \frac{24z^6}{(z-1)^2(z-2)}, \qquad \frac{z^4+1}{z(z^2+1)^2}, \qquad \frac{60z^9+60}{(z-1)^3(z^2+4)^2}.$$

9. **Series de Laurent.** En el entorno de un punto singular aislado, $z=\alpha$, de una función f, la función puede representarse como suma de un función f_1 analítica en $z = \alpha$ y una función f_2 cuya única singularidad en todo el plano ampliado es el punto $z = \alpha$(Esto se ha hecho ya, Ejemplo 8.2, en el caso de que $z = \alpha$ sea un polo de la función.). La función f_1 tiene un desarrollo en serie de Taylor válido en un cierto círculo de centro α; la f_2 tiene un desarrollo en serie de potencias de $1/(z-\alpha)$ que es válido en todo punto exceptuado el $z = \alpha$. La suma de estas dos series se denomina *serie de Laurent de f.*

Demostraremos ahora todos estos resultados. Como se ha indicado anteriormente, el caso de que $z = \alpha$ sea un polo de la función se ha tratado ya en el Ejemplo 8.2. Por consiguiente, la discusión que vamos a desarrollar es necesaria solamente en el caso de una singularidad esencial.

TEOREMA 9.1. *Supongamos que f(z) sea analítica en el disco perforado* $0 < |z - \alpha| < R$, *y que tanga una singularidad aislada en* α. *Entonces f(z). puede escribirse de una y solamente una manera en la forma*

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) \tag{9.1}$$

siendo $f_1(z)$ *analítica en el disco* $|z - \alpha| < R$, $f_2(z)$ *analítica para todo* $z \neq \alpha$ *incluido el punto* $z = \infty$, *y* $f_2(\infty) = 0$.

Demostración. Recordando la igualdad (8.3) y sustituyendo z por ζ y β por z, se tiene

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_k \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \tag{9.2}$$

siendo C la circunferencia $|\zeta - \alpha| = \rho < R$ y k la $|\zeta - \alpha| = \eta > 0$. Los radios η y ρ han de ser respectivamente, lo bastante pequeño y lo bastante grande como para que z se encuentre fuera de k y dentro de C, como se indica en la Figura 9-1. Sea

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \tag{9.3}$$

para $|z - \alpha| < \rho$ y para $|z - \alpha| > \eta$, sea

$$f_2(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_k \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta. \tag{9.4}$$

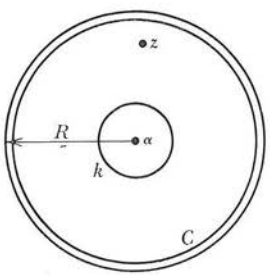


Figura 9-1

Entonces se verifica la ecuación (9.1). La analiticidad de $f_1(z)$ para $|z-\alpha|<\rho$ y la de $f_2(z)$ para $|z-\alpha|>\eta$ se demuestra mediante el mismo razonamiento que nos sirvió para demostrar el Teorema 5.2.

Se necesita ahora demostrar que $f_1(z)$ no sufre variación al aumentar ρ y, análogamente, que $f_2(z)$ tampoco varía al disminuir η. Fijemos η. Puesto que en (9.1) ni $f(z)$ ni $f_2(z)$ dependen de ρ, se sigue que $f_1(z)$ no puede variar al aumentar ρ mientras que sea $|z-\alpha|<\rho<R$. Análogamente, (9.1) demuestra que $f_2(z)$ no depende de η en tanto que $0<\eta<|z-\alpha|$. Por consiguiente, la fórmula (9.3) define unívocamente a $f_1(z)$ cuando $|z-\alpha|<R$ sin más que tomar ρ con la condición $|z-\alpha|<\rho<R$ y $f_1(z)$ es analítica para $|z-\alpha|<R$. Similarmente, (9.4) define una función analítica $f_2(z)$ para $|z-\alpha|>0$ cuando se toma η con la condición $|z-\alpha|>\eta>0$. Dado que el segundo miembro de (9.4) tiende hacia 0 cuando $|z|\to\infty$, la singularidad de $z=\infty$ en el punto $f_2(z)$ es evitable, y tomando $f_2(\infty)=0$. $f_2(z)$ es analítica en $z=\infty$. Luego, $f_2(z)$ es analítica para todo $z\neq\alpha$, incluido el punto $z=\infty$.

Demostremos ahora que f_1 y f_2 están determinadas de modo único. Sea $g_1(z)+g_2(z)$ otra descomposición como la del Teorema 9.1, donde $g_1(z)$ es una función analítica para $|z-\alpha|<R$, $g_2(z)$ es analítica para $|z-\alpha|>0$, y $g_2(\infty)=0$. Entonces

$$f_1(z)+f_2(z)=g_1(z)+g_2(z), \qquad 0<|z-\alpha|<R,$$

puesto que sus dos miembros son iguales a f. Por lo tanto,

$$f_1(z)-g_1(z)=g_2(z)-f_2(z), \qquad 0<|z-\alpha|<R.$$

Si definimos $F(z)$ por el primer miembro de la ecuación anterior para $|z-\alpha|<R$ y por el segundo para $|z-\alpha|>0$, entonces $F(z)$ es analítica para $0\leq|z-\alpha|\leq\infty$ y por lo tanto, en virtud del teorema de Liouville, $F(z)$ es constante. Puesto que $g_2(\infty)=f_2(\infty)=0$ su valor constante es 0, y el Teorema 9.1 queda demostrado.

TEOREMA 9.2. *(Laurent) Sea f(z) una función analítica en el disco perforado* $0<|z-\alpha|<R$. *Sea*

$$a_j=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{(z-\alpha)^{j+1}}\,dz \qquad -\infty<j<\infty \quad (9.5)$$

donde C es la circunferencia $|z-\alpha|=c$ *y c es cualquier constante que verifique* $0<c<R$. *Entonces, la serie de Laurent*

$$f(z)=\sum_{-\infty}^{\infty}a_j(z-\alpha)^j \quad (9.6)$$

converge uniformemente hacia $f(z)$ en toda corona circular cerrada contenida en el disco perforado $0 < |z - \alpha| < R$.

La afirmación relativa a la convergencia uniforme significa que dados dos números cualesquiera η y ρ tal que, $0 < \eta < \rho < R$, y dado cualquier $\epsilon > 0$, existe un N (que puede depender de ϵ, η y p, pero no de z) tal que

$$\left| f(z) - \sum_{-m}^{n} a_j (z - \alpha)^j \right| < \epsilon \tag{9.7}$$

para todos $n \geq N, m \geq N$ y $\eta \leq |z - \alpha| \leq \rho$.

Antes de demostrar el teorema hagamos notar que, con frecuencia, empleando juiciosamente la serie de Taylor puede evitarse el cálculo de la integral (9.5) al obtener la serie de Laurent de una función dada. Por ejemplo, la serie de Laurent

$$\cos \frac{1}{z} = 1 - \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{4!z^4} - \frac{1}{6!z^6} + \cdots, \qquad 0 < |z|,$$

se obtiene fácilmente haciendo la sustitución $w = 1/z$ en la serie de Taylor de $\cos w$. Otros métodos indirectos de cálculo están justificados en virtud del teorema de unicidad que se da más adelante, el cual afirma que un desarrollo uniformemente convergente de la forma (9.6) necesariamente ha de coincidir con el desarrollo de Laurent, independientemente del método que se haya seguido para obtenerlo.

TEOREMA 9.3. *Supongamos que una serie de la forma (9.6) converge uniformemente sobre la circunferencia $|z - \alpha| = c$ hacia una función continua $f(z)$. Entonces los coeficientes a_j son necesariamente los dados por la fórmula (9.5).*

Demostración del Teorema 9.3. Supongamos dados un entero j y una constante $\epsilon > 0$, y tomemos m y n de manera que $-m \leq j \leq n$ y que se verifique (9.7) sobre la circunferencia $C: |z - \alpha| = c$. Entonces,

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_C \left[\sum_{-m}^{n} a_j (\zeta - \alpha)^j - f(\zeta) \right] \frac{d\zeta}{(\zeta - \alpha)^{j+1}} \right| \leq \frac{\epsilon}{c^j}.$$

Pero como, siendo k un número entero,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C (\zeta - \alpha)^k \, d\zeta = \begin{cases} 1 & \text{para } k = -1 \\ 0 & \text{para } k \neq -1 \end{cases}$$

al integrar la suma que figura en la penúltima expresión se obtiene únicamente el término a_j. Por lo que, la desigualdad se reduce a

$$\left| a_j - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - \alpha)^{j+1}} d\zeta \right| \leq \frac{\epsilon}{c^j}.$$

Como ϵ es arbitrario, y el miembro es independiente de ϵ, se sigue que el primer miembro es 0. Esto demuestra que a_j está dado por la fórmula de Laurent, (9.5).

Demostración del Teorema 9.2. Sea $0 < \eta < c < \rho < R$ y sea $f = f_1 + f_2$ la descomposición dada por el Teorema 9.1. Puesto que $f_1(z)$ es analítica para $|z - \alpha| < R$, tiene una serie de Taylor

$$f_1(z) = \sum_0^\infty A_j(z - \alpha)^j$$

uniformemente convergente en el disco $|z - \alpha| \leq \rho$. A fin de obtener una representación parecida de la función $f_2(z)$ definamos

$$w = \frac{1}{z - \alpha}, \qquad z = \frac{1}{w} + \alpha$$

y de este modo, $f_2(z) = f_2(1/w + \alpha)$, que es una función entera de w. En efecto, la única singularidad que tiene $f_2(z)$ en todo el plano ampliado es la correspondiente a $z = \alpha$, y por lo tanto, la única singularidad de $f_2(1/w + \alpha)$ es la correspondiente a $1/w + \alpha = \alpha$. Esta ecuación no puede satisfacerse para ningún valor finito de w.

El desarrollo de Taylor [1]

$$f_2\left(\frac{1}{w} + \alpha\right) = \sum_1^\infty B_j w^j$$

converge uniformemente en el disco $|w| \leq \frac{1}{\eta}$ o lo que es igual,

$$f_2(z) = \sum_1^\infty B_j(z - \alpha)^{-j}$$

1 La suma comienza en 1 porque al hacer $w = 0$ se obtiene $\beta_0 = f_2(\infty) = 0$.

siendo la convergencia uniforme para $|z - \alpha| \geq \eta$. Sumando las series correspondientes a $f_1(z)$ y a $f_2(z)$ se obtiene una serie de la misma forma que la de Laurent que converge uniformemente hacia $f(z)$en la corona

$$\eta \leq |z - \alpha| \leq \rho.$$

En virtud del Teorema 9.3 esta serie coincide con la serie de Laurent, hecho del que se sigue el Teorema 9.2.

La serie de Laurent se descompone en dos partes, que corresponden a la descomposición $f = f_1 + f_2$; explícitamente

$$f_1(z) = \sum_0^{\infty} a_j(z - \alpha)^j, \qquad f_2(z) = \sum_1^{\infty} \frac{a_{-j}}{(z - \alpha)^j}. \tag{9.8}$$

La función $f_2(z)$ contiene las potencias negativas de $z - \alpha$ y se llama *parte principal* o *parte singular* de $f(z)$ en el punto α. Como se demostrará inmediatamente, existe una relación muy íntima entre la naturaleza de la singularidad en el punto α y la parte principal del desarrollo de Laurent en dicho punto.

TEOREMA 9.4. *Supongamos que $f(z)$ sea analítica en el disco perforado $0 < |z - \alpha| < R$, y designemos por a_j sus coeficientes de Laurent en dicho punto. Entonces,*

(1) Si para todo $j < 0$, es $a_j = 0$, entonces $f(z)$ tiene en el peor de los casos una singularidad evitable en el punto α, y la serie de Laurent coincide con la serie de Taylor de $f(z)$. Recíprocamente, si $f(z)$ tiene una singularidad evitable para $z = \alpha$, entonces para todo $j < 0$ es $a_j = 0$.

(2) Si solamente hay un número finito de a_j distintos de 0 cuando $j < 0$, entonces $f(z)$ posee un polo en α. Recíprocamente, si $f(z)$ tiene un polo en α, entonces solamente un número finito de a_j para $j < 0$ pueden ser diferentes de 0.

(3) Si hay un número infinito de a_j que sean diferentes de 0, para $j < 0$, entonces $f(z)$ tiene una singularidad esencial en el punto α Recíprocamente, si $f(z)$ tiene una singularidad esencial entonces un número infinito de a_j son diferentes de 0 para $j < 0$.

Demostración. Caso (1). Si para todo $j < 0$ es $a_j = 0$, se deduce de (9.8) que $f_2(z) = 0$ por lo tanto, $f(z) = f_1(z)$ para $0 < |z - \alpha| < R$. Puesto que $f_1(z)$ es analítica en el disco $|z - \alpha| < R$, se sigue que $f(z)$ tendrá, en el peor de los casos, una singularidad evitable en $z = \alpha$. Recíprocamente, si $f(z)$ tiene una singularidad evitable en $z = \alpha$, eligiendo convenientemente el valor $f(\alpha)$ es posible convertirla en una función analítica también en dicho punto. Se deduce entonces de (9.5) y del teorema integral de Cauchy que $a_j = 0$ para todo valor $j < 0$.

Caso (2). Supongamos ahora que $a_j = 0$ para $j < -m$ y que $a_{-m} \neq 0$. Entonces

$$f(z) = f_1(z) + \sum_1^m \frac{a_{-j}}{(z - \alpha)^j}.$$

Como $f_1(z)$ es analítica en el disco $|z-\alpha| < R$, la fórmula anterior demuestra que $f(z)$ tiene un polo de orden m en el punto α. La proposición recíproca ha sido ya discutida en el Ejemplo 8.2.

Caso (3) Puesto que una singularidad aislada de una función uniforme solamente puede ser una singularidad evitable, un polo, o una singularidad esencial, el resultado correspondiente al Caso (3) se deduce de los Casos (1) y (2).

Ejemplo 9.1. Dar el desarrollo de Laurent de $e^{1/z}$ para $0<|z|\leq \infty$ y demostrar a partir de él que para todo $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{\cos\theta}\cos(\operatorname{sen}\theta - n\theta)\,d\theta = \frac{1}{n!}. \tag{9.9}$$

Como $1/z$ es analítica para $|z| > 0$ y su singularidad en ∞ es evitable, lo mismo es cierto para $(1/z)$. Luego $(1/z)$ tiene una serie de Laurent que no contiene términos de exponente positivo. El coeficiente de z^j en esta serie está dado por (9.5), y es

$$a_j = \frac{1}{2\pi i}\int_C e^{1/\zeta}\zeta^{-j-1}\,d\zeta$$

siendo C cualquier circunferencia $|z| = c > 0$. Tomando $c = 1$ y $\zeta = e^{i\theta}$, entonces

$$e^{1/\zeta} = e^{(\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta)} = e^{\cos\theta}e^{-i\operatorname{sen}\theta}$$

y la integral se convierte en

$$a_j = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos\theta}e^{-i(\operatorname{sen}\theta + j\theta)}\,d\theta.$$

La parte imaginaria tiene integral nula, pues el integrando es función impar de θ; por lo tanto, a_j está dada por la parte real:

$$a_j = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos\theta}\cos(\operatorname{sen}\theta + j\theta)\,d\theta. \tag{9.10}$$

El cálculo directo de esta integral no es en modo alguno sencillo. Sin embargo, puesto que

$$e^w = 1 + w + \frac{w^2}{2!} + \cdots + \frac{w^j}{j!} + \cdots$$

es la serie de Taylor de e^w, se sigue que

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \cdots + \frac{1}{j!z^j} + \cdots$$

es la serie de Laurent de $e^{1/z}$. El examen de esta fórmula nos proporciona el coeficiente a_j y haciendo $j = -n$ se obtiene (9.9) sin más que observar que el integrando de (9.10) es función par de θ.

Problemas

1. Sea $f(z) = A_{-m}z^{-m} + A_{-m+1}z^{-m+1} + \cdots + A_0 + A_1z + \cdots + A_nz^n$, donde m y n son enteros positivos. Mostrar por cálculo directo que los coeficientes del desarrollo de Laurent en torno al punto $\alpha = 0$ verifican $a_j = A_j$ para $-m \leq j \leq n$, y $a_j = 0$ en los restantes casos.
2. Aplicándole el Problema 1 a las funciones $(z + 1/z)^m$ y $(z - 1/z)^m$, demostrar que

$$\int_0^{2\pi} (\cos\theta)^m e^{ij\theta}\, d\theta = \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen}\theta)^m e^{ij\theta}\, d\theta = 0$$

   siendo m y j números enteros y $|m| < |j|$. (Hacer $z = e^{i\theta}$.)
3. ¿Cuál es la fórmula integral que se obtiene en el Ejemplo 9.1 si $c \neq 1$?
4. Sea w un número complejo. Demostrar que

$$\exp\left[\frac{w}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right] = \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(w)z^n$$

   para $0 < |z| < \infty$, siendo

$$J_n(w) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{iw\operatorname{sen}\theta}e^{-in\theta}\, d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos[w\operatorname{sen}\theta - n\theta]\, d\theta.$$

   La función $J_n(w)$ se llama función de Bessel de orden n.
5. En virtud del Problema 9 de la Sección 5, la expresión $J_n(w)$ anterior es función entera de w y sus derivadas pueden calcularse derivando bajo el signo integral. Esto supuesto, demostrar que $J_n(w)$ tiene un cero de orden n en $w = 0$. (Ver el Problema 2.)

6. Sea C_0 la circunferencia $|z| = c$, $0 < c < R$. Demostrar que el desarrollo de Laurent dado por el Teorema 9.2 es equivalente a

$$f(z + \alpha) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_j z^j, \qquad a_j = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\alpha + \zeta)}{\zeta^{j+1}} d\zeta,$$

siendo esta serie uniformemente convergente en la corona $\eta \leq |z| \leq \rho$.

7. Haciendo uso de los contornos que se indican en la Figura 9.2, demostrar que las integrales que definen los coeficientes a_j en el problema precedente y en el Teorema 9.2 son independientes de c, $0 < c < R$.

Deducción directa de la serie de Laurent.

8. Sea $f(z)$ una función analítica para $0 < |z - \alpha| < R$ y sean $0 < \eta_1 < \eta < \rho < \rho_1 < R$. Si $h(z) = f(z + \alpha)$, demostrar mediante la fórmula (9.2) que

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{h(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{k_1} \frac{h(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

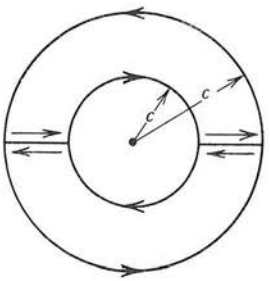


Figura 9-2

siendo C_1 la circunferencia $|z| = \rho_1$ y k_1 la $|z| = \eta_1$.

9. Escribamos en la primera integral del Problema 8 $1/(\zeta - z)$ en la forma

$$\frac{1}{\zeta} \frac{1}{1 - z/\zeta} = \frac{1}{\zeta} + \frac{z}{\zeta^2} + \cdots + \frac{z^{n-1}}{\zeta^n} + \frac{z^n}{\zeta^n} \frac{1}{\zeta - z}$$

y en la segunda integral, $-1/(\zeta - z)$ en la forma

$$\frac{1}{z} \frac{1}{1 - \zeta/z} = \frac{1}{z} + \frac{\zeta}{z^2} + \cdots + \frac{\zeta^{m-1}}{z^m} + \frac{\zeta^m}{z^m} \frac{1}{z - \zeta}.$$

Imitando en líneas generales la demostración del Teorema 6,2, obtener el desarrollo de Laurent en la forma indicada en el Problema 6. (Se usa el Problema 7 para sustituir las circunferencias C_1 y k_1 por la C_0 al calcular los coeficientes).

10. La noción de analiticidad. Si se dice que una función $f(z)$ es analítica en un dominio D, esta afirmación puede interpretarse de varias maneras. Algunas de ellas son las siguientes:

(1) La derivada $f'(z)$ existe en todos los puntos de D, excepto a lo sumo en un número finito de ellos, en los cuales solamente se le exige a $f(z)$ que sea continua.
(2) $f'(z)$ existe en todos los puntos de D.
(3) $f'(z)$ es continua en todos los puntos de D.
(4) $f(z)$ tiene derivadas continuas de todos los órdenes en todos los puntos de D.
(5) $f(z)$ puede representarse uniformemente por su serie de Taylor en un entorno de cada uno de los puntos de D.

Se deduce de resultados demostrados en este capítulo que estas cinco interpretaciones son equivalentes; es decir, todas ellas definen la misma clase de funciones. Esto nos permitirá utilizar en cada caso la formulación que más convenga.

Suplemento de problemas del Capítulo 3.

1.1. Teniendo en cuenta que $(2\cos\theta)e^{i\theta} = 1 + e^{2i\theta}$, demostrar que

$$\int_0^{\pi} (\cos\theta)^3 \cos 3\theta \, d\theta = \frac{\pi}{8}.$$

1.2. La posición de un punto móvil en el instante t está dada por

$$z = x(t) + iy(t) = r(t)e^{i\theta(t)}$$

siendo r y θ las coordenadas polares del punto, y $r \neq 0$. Suponiendo que existan las derivadas que sean necesarias, demostrar que

$$z' = (r' + ir\theta')e^{i\theta}, \qquad z'' = \left[r'' - r(\theta')^2 + i\frac{(r^2\theta')'}{r}\right]e^{i\theta}$$

denotando las comillas derivación respecto de t. La primera expresión de la velocidad instantánea en forma compleja, y la segunda, la aceleración instantánea, también en forma compleja.

1.3. Se dice que un campo de fuerzas es central cuando el vector fuerza viene dado en forma compleja por $F = f(r,\theta)e^{i\theta}$, Demostrar que la ley de Newton $mz'' = F$ da para el movimiento de un cuerpo sometido a un campo central de fuerzas $(r^2\theta')' = 0$, y por lo tanto, $r^2\theta' = C$, siendo C una constante. Deducir que

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{1}{2} r^2 \, d\theta = \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2} C \, dt$$

y dar la interpretación geométrica. Aplicado lo anterior al movimiento de los planetas se obtiene la segunda ley de Kepler.

2.1. Sea C la circunferencia $|z| = 1$ y sea α un número complejo tal que $|\alpha| \neq 1$. Si escribimos

$$I(\alpha) = \int_C \frac{dz}{z - \alpha},$$

demostrar analíticamente que $I(\alpha) + I(1/\alpha) = 2\pi i$, y dar su interpretación geométrica. (Se parametriza C en la forma $z = e^{i\theta}$ para calcular $I(\alpha)$ y en la forma $z = e^{-i\theta}$ para calcular $I(1/\alpha)$. Al sumar se obtiene una integral sencilla.)

2.2. *Una fórmula de Wallis.* Si n es un entero positivo, calcular el valor de

$$\int_{|Z|=1} \left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n} \frac{dz}{z}$$

utilizando para ello la serie binómica, y demostrar así que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (2\cos\theta)^{2n} \, d\theta = \frac{(2n)!}{n!n!}.$$

2.3. Sea C la elipse $x = a\cos t$, y $y = b \operatorname{sen} t$, donde $a > 0$, $b > 0$ y t recorre el intervalo desde 0 hasta 2π. Calculando por inspección el número de vueltas de C alrededor del origen, demostrar así que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2 t + b^2 \operatorname{sen}^2 t} = \frac{1}{ab}.$$

2.4. Para este problema se requiere cierta familiaridad con la teoría del flujo de fluidos. Supongamos que, al igual que en la Sección 6 del Capítulo 2, la velocidad compleja $V = p + iq$ de un fluido venga dada por $f'(z) = p - iq$. Si C es un arco $z = \zeta(t)$ con $\zeta'(t) \neq 0$, la velocidad del fluido, y los vectores unitarios tangente y normal a la curva en uno de sus puntos son, respectivamente,

$$\mathbf{v} = p\mathbf{i} + q\mathbf{j}, \qquad \mathbf{t} = \frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j}, \qquad \mathbf{n} = \frac{dy}{ds}\mathbf{i} - \frac{dx}{ds}\mathbf{j}.$$

Teniendo en cuenta el Problema 7 de la Sección 2, demostrar que

$$\int_C f'(z)\,dz = \int_C \mathbf{v}\cdot\mathbf{t}\,ds + i\int_C \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,ds.$$

La primera integral del segundo miembro es la circulación total a lo largo de C, y la segunda, el gasto total que atraviesa C.

3.1. Sea C la circunferencia $|\zeta| = c$, donde $c > 0$ es constante, y sea C^* la circunferencia $|\zeta| = 1/c$. Siendo $F(z)$ continua sobre C, demostrar que

$$\int_C F(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta} = \int_{C^*} F\left(\frac{1}{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Deducir que la integral es nula cuando $\zeta F(\zeta)$ sea analítica en la región $c \leq |\zeta| \leq \infty$.

3.2. Supongamos que $F(z)$ sea continua sobre un contorno cerrado C y supongamos que $F(z)$ pueda ser aproximada uniformemente por polinomios; es decir, que para todo $\epsilon > 0$ exista un polinomio $P(z)$ tal que $|f(z) - P(z)| \leq \epsilon$, para todo z perteneciente a C. Demostrar que la integral de f a lo largo de C es 0.

3.3. Se desea aproximar la función $1/z$ en $|z| = 1$ por una función $f(z)$ que sea analítica para $|z| \leq 1$. Demostrar que el error máximo es por lo menos igual a 1, es decir,

$$\max_{|z|=1}\left|\frac{1}{z} - f(z)\right| \geq 1.$$

(En virtud del teorema de Cauchy,

$$\int_C \left[\frac{1}{z} - f(z)\right]dz = 2\pi i$$

siendo C la circunferencia $|z| = 1$. Acotar el primer miembro.)

4.1. Sea C un contorno cerrado y sea α un punto que no se encuentre sobre C y que pueda unirse con ∞ mediante una curva continua que no corte a C. Demostrar que el número de vueltas de C con respecto de α es 0. (El número de vueltas es un entero, es función continua de α y es igual a 0 en el ∞.)

4.2. Sea $P(z)$ un polinomio de grado n cuyas raíces sean $z_1, z_2, \ldots, z_n$ ninguna de las cuales se encuentra sobre un contorno dado C. Demostrar que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{P'(z)}{P(z)}\,dz = N(z_1) + N(z_2) + \cdots + N(z_n)$$

siendo $N(z_k)$ el número de vueltas de C con respecto a.

5.1. Si $f = u + iv$ es una función analítica en una región D, demostrar que uv es armónica en D, pero que u^2 puede no serlo.

5.2. Una función f tiene el período p cuando $f(z + p) = f(z)$ para todo z. Demostrar que una función entera que tenga los períodos 1 e i ha de ser necesariamente constante.

5.3. Si $f(z)$ es analítica para $|z| \leq 1$, demostrar que

$$\frac{1}{\pi}\int_{|z|\leq 1} f(x + iy)\,dx\,dy = f(0).$$

(Expresar la integral mediante coordenadas polares y usar la fórmula de Cauchy.)

5.4. Siendo $f = u + iv$ analítica y p un número real, demostrar que en aquellos puntos en los que $f(z) \neq 0$

$$\frac{\partial^2 |f(z)|^p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 |f(z)|^p}{\partial y^2} = p^2 |f(z)|^{p-2} |f'(z)|^2$$

y que cuando $u(x,y) \neq 0$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}|u(x,y)|^p + \frac{\partial^2}{\partial y^2}|u(x,y)|^p = p(p-1)|u|^{p-2}|f'(z)|^2.$$

6.1. Los números de Bernouilli B_n están definidos mediante la serie de Taylor

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_0^\infty \frac{B_n}{n!} z^n, \qquad |z| < 2\pi.$$

Expresar B_n como una integral real.

6.2. Sea $f(z)$ una función entera que sea real sobre un pequeño segmento del eje real; por ejemplo, real para $-\epsilon < x < \epsilon$. Demostrar que $f(x)$ es real para todo valor real de x, y que a valores conjugados de z le corresponden valores conjugados de $f(z)$

6.3. Sea $f(z)$ una función entera que sea real sobre el eje real e imaginaria sobre el eje imaginario. Demostrar que f es una función impar.

6.4. Siendo $P(z)$ y C la circunferencia $|z - \alpha| = R$, demostrar que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \overline{P(z)}\,dz = R^2\overline{P'(\alpha)}.$$

(Se desarrolla $P(z)$ en potencias de $z - \alpha$.)

6.5. Demostrar que las dos funciones $[(z-\alpha)(z-\beta)]^{1/2}$ son analíticas en la región que se obtiene al suprimir del plano el segmento rectilíneo de extremos α y β, y que cada una de estas funciones tiene un polo simple en $z = \infty$. Demostrar que para $|z|$ suficientemente grande una de las funciones es

$$f(z) = z\exp\left[\frac{1}{2}\operatorname{Log}\left(1-\frac{\alpha}{z}\right)\left(1-\frac{\beta}{z}\right)\right]$$

y que la otra es la opuesta de la anterior. Mediante la serie binómica

$$\left(1-\frac{\alpha}{z}\right)^{1/2} = \exp\left[\frac{1}{2}\operatorname{Log}\left(1-\frac{\alpha}{z}\right)\right] = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{z}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{\alpha}{z}\right)^2 + \cdots,$$

hallar los tres primeros términos del desarrollo en serie de $f(z)$ para $|z|$ suficientemente grande.

6.6. Supongamos que $f(z)$ sea analítica en $z = 0$ y que tenga en este punto un cero de orden m. Demostrar que en cualquier sector $a < \arg z < b$ con $b - a > \pi/m$, cambia de signo en el entorno de $z = 0$. (En virtud del Teorema 6.2, $f(z) = z^m g(z)$, $g(0) = Ae^{i\gamma}$,

$$\operatorname{Re} f(z) = |z|^m |g(z)| \cos(m\theta + \arg g)$$

con $\arg g \to \gamma$ cuando $|z| \to 0$.)

7.1. Si u es armónica y dos veces diferenciable con continuidad en el disco $|z| \leq 1$ demostrar que $|\operatorname{grad} u|$ alcanza su máximo para $|z| \leq 1$ en la frontera. (La función $g = u_x - i\,u_y$ es analítica.)

7.2. Sea $f(z)$ una función analítica en el disco $|z| \leq 1$ y tal que $f(\alpha) = 0$ siendo $|\alpha| < 1$. Si sobre la circunferencia $|f(z)| \leq 1$ se verifica $|z| = 1$, demostrar que

$$|f(z)| \leq \left|\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}\right|, \qquad |z| \leq 1.$$

7.3. Sean, para $j = 1, 2, 3, \ldots, n$ y b_j constantes positivas, y definamos

$$f(z) = \sum\left(\frac{a_i}{A}\right)^z\left(\frac{b_i}{B}\right)^{1-z}, \qquad A = \sum a_j, \qquad B = \sum b_j.$$

(a) Demostrar que $f(z)$ es entera, y que sobre cada recta vertical $z = x_0 + iy$, $|f(z)|$ alcanza su valor máximo en el punto correspondiente a $y = 0$. (b) Demostrar que el máximo de $|f(z)|$ sobre el disco $|z - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2}$ se alcanza en los puntos $z = 0$ y 1. Deducir de aquí que

$$\sum a_j^x b_j^{1-x} \leq \left(\sum a_j\right)^x \left(\sum b_j\right)^{1-x}, \qquad 0 \leq x \leq 1.$$

Esta desigualdad se conoce como desigualdad de Hölder.

7.4. Sea $f(z)$ una función analítica en un dominio D que contenga al punto $z = 0$, y sea $|f(1/n)| < 1/2^n$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$. Demostrar que $f = 0$ en todo punto de D.

8.1. Definir una rama uniforme $f(z)$ de la función multiforme $(1 + z)^{1/z}$ que sea analítica para $0 < |z| < 1$ y real cuando z sea real. Eliminar la singularidad de f en el punto 0 definiendo convenientemente $f(0)$ y calcular $f'(0)$.

8.2. ¿Qué orden tiene el polo de la función $(\operatorname{sen} z + \operatorname{senh} z - 2z)^{-2}$ en $z = 0$?

8.3. Recurriendo al Problema 3 de la Sección 5, demostrar que una función cuya única singularidad sea un polo en $z = \infty$ es necesariamente un polinomio.

8.4. Se sabe que una cierta función $f(z)$ no tiene otras singularidades que polos en los puntos 0, i, $-i$, y ∞. Demostrar que

$$f(z) = \frac{P(z)}{[z(z^2 + 1)]^m} \qquad (z \neq 0, i, -i, \infty)$$

siendo $P(z)$ un polinomio y m un entero apropiado. (Si m es suficientemente grande, $z^m(z + i)^m(z - i)^m f(z)$ tiene singularidades evitables en los puntos $0, i, -i$ y un polo en ∞.)

8.5. Una función $f(z)$ no tiene otras singularidades que un número finito de polos en el plano ampliado. Demostrar que f es racional.

8.6. Si $f(z)$ tiene una singularidad aislada en $z = \alpha$, demostrar que $e^{f(z)}$ no puede tener un polo en dicho punto. (Obsérvese que $f(z)$ es uniforme.)

8.7. Si $f(z)$ tiene una singularidad aislada en α, y si $\operatorname{Re} f(z) \leq -m \log |z - \alpha|$ para una cierta constante m, demostrar que la singularidad es evitable.

8.8. Supongamos que $f(z)$ sea una función entera y tal que $f(1) = 2f(0)$. Dado $\epsilon > 0$, demostrar que existe un punto z en el cual $|f(z)| < \epsilon$.

8.9. Supongamos que $f(z)$ sea analítica para $0 < |z| < 1$ y que verifique $|f(z)| \leq 4|z|^{1.1}$. Demostrar que $|f'(1/2)| \leq 1$.

9.1. Comparando el desarrollo de Laurent de $(z + 1/z)^m$ con el obtenido mediante la serie binómica, calcular

$$\int_0^{2\pi} (\cos\theta)^m \cos n\theta \, d\theta, \qquad m, n \text{ enteros}$$

9.2. Demostrar que

$$\cosh\left(z + \frac{1}{z}\right) = \sum_0^{\infty} b_n \left(z^n + \frac{1}{z^n}\right)$$

siendo

$$b_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos n\theta \cosh(2\cos\theta)\, d\theta.$$

9.3. Sea $f(z)$ una función analítica para $0 < |z| < R$, sea $|z| = r$, y sea

$$0 < \eta \leq r \leq \rho < R.$$

Si los a_j son los coeficientes del desarrollo de Laurent de f en torno al punto $\alpha = 0$, demostrar que

$$\left| f(z) - \sum_{-m}^{n} a_j z^j \right| \leq \left(\frac{r}{\rho}\right)^n \frac{\rho}{\rho - r} M(\rho) + \left(\frac{\eta}{r}\right)^m \frac{\eta}{r - \eta} M(\eta)$$

siendo $M(p)$ y $M(\eta)$ los valores medios de $|f(z)|$ sobre las circunferencias $|z| = p$ y $|z| = \eta$, respectivamente. (Ver el Problema 9 de la Sección 9.)

9.4. Sea $f(z)$ analítica para $|z| < R$. Siendo $0 < r < R$ y $j > 1$, demostrar que el j-ésimo coeficiente del desarrollo de Taylor, a_j, verifica

$$a_j = \frac{1}{\pi r^j}\int_0^{2\pi} [\operatorname{Re} f(re^{i\theta})] e^{-ij\theta}\, d\theta.$$

(Si C es la circunferencia $|z| = r$, entonces,

$$a_j = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z^{j+1}}\, dz, \qquad 0 = \frac{1}{2\pi i r^{2j}}\int_C f(z) z^{j-1}\, dz.$$

Se escribe C en la forma $z = re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, y se le suma la conjugada de la segunda ecuación a la primera.)

9.5. *Un teorema de Borel.* Supongamos que para $|z| < 1$ $f(z)$ sea analítica, y que $\operatorname{Re} f(z) \geqslant 0$. Si $f(0) = 1$, demostrar que el j-ésimo coeficiente de la serie de Taylor verifica $|a_j| \leq 2$.

El problema anterior, y la condición $f(0) = 1$ dan, respectivamente,

$$|a_j| \leq \frac{1}{\pi r^j}\int_0^{2\pi} |\operatorname{Re} f(re^{i\theta})|\, d\theta, \qquad 1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(re^{i\theta})\, d\theta$$

cuando $0 < r < 1$. Acotar a_j teniendo en cuenta que $|\operatorname{Re} f| = \operatorname{Re} f$, y hacer tender $r \to 1$.)

Capítulo 4

Teoría de resíduos

Al extender el teorema integral de Cauchy a funciones con singularidades aisladas el valor de la integral no resulta en general, igual a cero, sino que cada singularidad aporta un término que se llama residuo. El residuo en un punto α depende solamente del coeficiente de $1/(z-\alpha)$ en el desarrollo de Laurent de la función, y es independiente de los términos restantes. Esto es debido a que $1/(z-\alpha)$ tiene una primitiva multiforme, $\log(z-\alpha)$, mientras que las demás potencias de $z-\alpha$ tienen primitivas uniformes, cuya integral es 0. Dado que suele ser fácil calcular el residuo de una función en un punto, el cálculo de residuos constituye un método eficaz para calcular integrales definidas. También es de utilidad al efectuar el estudio de los ceros y polos de una función, y asimismo, permite obtener algunas importantes fórmulas integrales para funciones definidas en un semiplano. En su aspecto téorico, el cálculo de residuos está relacionado con el problema de extender el teorema de Cauchy a regiones generales, poniendo en contacto el Análisis de variable compleja con algunos teoremas no triviales de Topología plana.

* **1. Dominios simplemente conexos.** El enunciado del teorema de Cauchy expuesto en el capítulo anterior es suficiente para la mayor parte de las cuestiones de Matemática pura o aplicada. La restricción a dominios estrellados no constituye un impedimento muy serio, pues es frecuente que añadiendo algunos segmentos rectilíneos se puedan extender los resultados conocidos a curvas que en su forma original podrían no estar contenidas en un dominio estrellado. Por ejemplo, en la Figura 1-1 se ve que $C = C_1 + C_2$ en el sentido de que

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz$$

para toda función continua f. Cuando f sea analítica en el dominio representado en la Figura 1-1 las integrales sobre C_1 y C_2 serán 0 ya que C_1 y C_2 están en dominios estrellados donde la función f es analítica, como se muestra en la Figura 1-2. Esto permite escribir

$$\int_C f(z)\,dz = 0$$

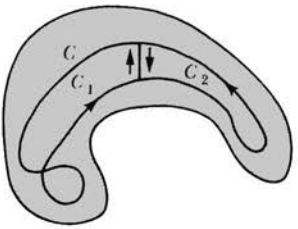


Figura 1-1

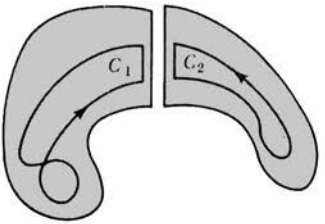


Figura 1-2

a pesar de que el dominio mostrado en la Figura 1-1 no es un dominio estrellado. Se pueden ver otras aplicaciones de este recurso en la Sección 5 del Capítulo 3.

El método sugerido en la Figura 1-1 es suficiente para todas las aplicaciones que nos proponemos desarrollar aquí. Sin embargo, la noción de dominio simplemente conexo posee considerable interés teórico y permite anunciar en forma menos restringida los resultados anteriores. Esta noción puede introducirse de varias maneras; aquí la presentaremos apoyándonos en el teorema de Jordan para polígonos cerrados simples. Empezaremos por definir estos términos.

Una línea quebrada (también llamada curva poligonal o línea poligonal) es una curva

$$z = \zeta(t), \qquad a \leq t \leq b$$

donde ζ es una función continua y lineal a trozos. Es decir, es posible dividir $[a,b]$ mediante puntos t_k,

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$$

de tal forma que $\zeta(t)$ sea una función lineal [1] sobre cada uno de los intervalos

$$t_k < t < t_{k+1}.$$

Suponemos también que ζ no es constante en ninguno de dichos intervalos. Los puntos $z_k = \zeta(t_k)$ son los vértices de la curva poligonal; los segmentos rectilíneos dados por

$$z = \zeta(t), \qquad t_k < t < t_{k+1}$$

son sus lados.

[1] Una *función lineal* $\zeta(t)$ tiene la forma $\alpha + \beta t$ siendo α y β dos constantes,

Un *polígono cerrado simple* es una curva poligonal que es cerrada y no se corta a sí misma. Como ya se explicó en el Capítulo 3, esto significa que $\zeta(a) = \zeta(b)$ y que, salvo en este caso,

$$\zeta(t) \neq \zeta(t^*) \qquad \text{para } t \neq t^*.$$

Una importante propiedad de los polígonos cerrados es que *un polígono cerrado simple divide al plano en dos dominios, uno interior al polígono y otro exterior a él.* Esta propiedad constituye un caso particular del teorema de Jordan para curvas. El dominio exterior al polígono contiene al punto del ∞ del plano ampliado; el dominio interior es acotado. Todo punto del plano ampliado que no esté en el polígono se encuentra o bien en su interior o bien en su exterior.

El teorema de Jordan para curvas, no es en modo alguno evidente para polígonos cerrados simples cualesquiera, ya que pueden presentar configuraciones extraordinariamente complicadas. Las figuras sencillas tales como los triángulos, circunferencias, etc. no ofrecen a este respecto ninguna dificultad, pues tanto su interior como su exterior se describen con facilidad mediante una o varias desigualdades. (Por ejemplo, el interior de la circunferencia unidad $|z| = 1$, es $|z| < 1$.)El teorema de Jordan para polígonos cerrados simples no es demasiado difícil de demostrar, pero no lo haremos aquí.

Se dice que un dominio es *simplemente conexo* cuando el interior de todo polígono cerrado simple contenido en él está también contenido en el dominio. Desde un punto de vista intuitivo, un dominio es simplemente conexo cuando su interior carece de cortes y agujeros. El disco $|z| < 1$ es simplemente conexo. La corona circular $1 < |z| < 2$ no es simplemente conexa (sino doblemente conexa). Tanto el plano como el plano cortado a lo largo de una semirrecta desde un punto z_0 hasta $z = \infty$ son simplemente conexos. El disco perforado $0 < |z| < 1$ no es simplemente conexo, ya que el punto $z = 0$ no pertenece a él.

La importancia de los dominios simplemente conexos en el Análisis de variable compleja se debe, en parte, al siguiente teorema:

TEOREMA 1.1. *Supongamos que D sea un dominio simplemente conexo y que $f(z)$ sea una función analítica en D. Entonces existe una función $F(z)$ analítica en D y tal que $F'(z) = f(z)$ en todos los puntos de D.*

Más adelante, en esta misma sección, se hará un esbozo de la demostración. La función $F(z)$ es, evidentemente, uniforme, y de hecho, este es el aspecto principal del teorema. La función $F(z)$ se denomina integral indefinida de $f(z)$; el teorema enuncia que toda función analítica en un dominio simplemente conexo posee en dicho dominio una integral indefinida. Como es obvio, al sumarle a F una constante cualquiera el resultado será otra integral indefinida de f.

Se estableció en el Capítulo 3, Sección 1, que siempre que f posea una integral indefinida F la fórmula

$$\int_C f(z)\,dz = F(z)\Big|_C$$

es válida, sin restricciones sobre el dominio. Cuando C sea cerrado el valor del segundo miembro es 0, y por lo tanto, el Teorema 1.1. da:

TEOREMA 1.2. *Supongamos que D sea simplemente conexo y que $f(z)$ sea analítica en D. Sea C un contorno cerrado contenido en D. Entonces*

$$\int_C f(z)\,dz = 0.$$

Este es el teorema integral de Cauchy, en forma más general que la dada por el Teorema 3.4 del Capítulo 3; análogamente, el Teorema 1.1. es una generalización del Teorema 3.2 del Capítulo 3.

En los Teoremas 1.1. y 1.2 la condición de que D sea simplemente conexo es esencial. Consideremos la función $f(z)=1/z$. Si D es el plano perforado, $|z| > 0$, entonces $1/z$ es analítica en D, pero D no es simplemente conexo, pues $z = 0$ es un punto frontera de D. Sea C la circunferencia $z = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Entonces,

$$\int_C \frac{dz}{z} = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

Luego, la integral de f a lo largo del contorno cerrado C en D no es 0. Esto demuestra que no puede existir una función uniforme en D cuya derivada sea $1/z$.

Para demostrar estos resultados es necesario introducir la noción de polígono orientado positivamente. Al crecer t queda definido un sentido de recorrido de la curva poligonal $z = \zeta(t)$. Se dice que un polígono cerrado simple está *orientado* cuando se ha especificado en él un sentido de recorrido. El polígono está orientado positivamente cuando el vector que en uno de sus lados indica el sentido definido al crecer t es tal que al hacerlo girar $\pi/2$ en sentido antihorario el vector apunta hacia el interior del dominio. Aplicando el teorema de Jordan para polígonos, puede demostrarse que si lo anterior ocurre para algún lado de un polígono orientado, lo mismo ocurrirá para todos los demás lados. En la Figura 1.3 se muestra un polígono orientado positivamente.

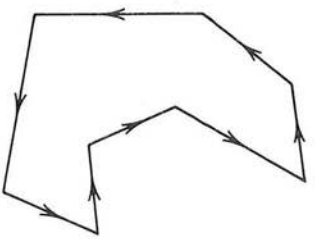


Figura 1-3

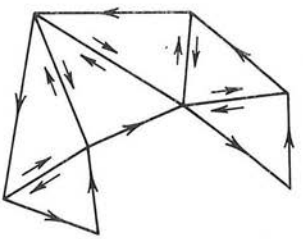


Figura 1-4

Puede demostrarse por inducción que un polígono C cerrado, simple, orientado positivamente, puede descomponerse mediante diagonales en un conjunto de $n-2$ triángulos orientados positivamente, con las siguientes propiedades: Todo punto del interior de C se encuentra en el interior de uno de los triángulos o sobre uno de sus lados; cualquier punto interior a uno de los triángulos es interior a C. Un lado de uno de los triángulos que no coincida con uno de los lados de C se llama lado interior. Si todos los triángulos se recorren en sentido positivo, entonces cada lado interior se recorre dos veces, una en un sentido y otra en el opuesto. Además, cada lado de C se recorre una y solamente una vez en el sentido positivo de C, como se muestra en la Figura 1-4. La configuración completa se denomina *triangulación* del polígono.

Por triangulación de un polígono cerrado simple se obtiene el siguiente lema:

LEMA 1.1. *Sea f una función analítica en un dominio simplemente conexo D. Sea C un polígono cerrado simple y orientado contenido en D. Entonces,*

$$\int_C f(z)\,dz = 0. \tag{1.1}$$

Demostración. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que C está orientado positivamente, pues la orientación opuesta no tendría otro efecto que cambiar el signo del primer miembro de (1.1). Dado que D es simplemente conexo, el interior del polígono C también estará contenido en D. Si C tiene n vértices es posible efectuar una triangulación por medio de $n-2$ triángulos orientados positivamente $T_1, T_2, \ldots, T_{n-2}$. La definición de "triangulación" permite asegurar que

$$\int_C f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{n-2} \int_{T_j} f(z)\,dz.$$

Como cada T_j está contenido en D, se deduce del Teorema 3.1 del Capítulo 3 que cada uno de los términos de la suma anterior es cero. Esto demuestra (1.1).

Demostración del Teorema 1.1. Consideremos un punto z_0 de D. Sea C_1 una curva poligonal contenida por completo en D que una el punto z_0 con otro punto arbitrario z de D. Supongamos que C_2 sea otra curva poligonal como la anterior. Entonces

$$\int_{C_1} f(\zeta)\,d\zeta = \int_{C_2} f(\zeta)\,d\zeta. \tag{1.2}$$

Para ver esto, designemos por $C_1 - C_2$ la curva poligonal cerrada obtenida al recorrer primero C_1 desde z_0 hasta z y después C_2 en sentido inverso, esto es, desde z hasta z_0. Entonces (1.2) es equivalente a

$$\int_{C_1 - C_2} f(\zeta)\,d\zeta = 0. \tag{1.3}$$

Puede demostrarse por inducción que la curva poligonal cerrada (pero no necesariamente simple!) C_1-C_2 está formada por un cierto número de segmentos recorridos en sentidos opuestos y por cierto número de polígonos cerrados simples orientados positivamente, como sugiere la Figura 1.5. Los segmentos rectilíneos se recorren una vez en cada sentido, y por consiguiente, la suma de las integrales sobre los segmentos es igual a cero. Se ha visto ya en la igualdad (1.1) que la integral a lo largo de un polígono cerrado simple y orientado es cero. Se deduce de aquí (1.3), y de ésta, (1.2).

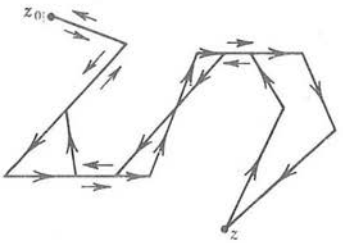


Figura 1-5

Si definimos

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\, d\zeta$$

tomándose la integral a lo largo de cualquier curva poligonal contenida en D que una z_0 con z entonces, en virtud de (1.2), $F(z)$ es independiente de la elección de la curva poligonal que una z_0 con z. Por consiguiente, para valores pequeños de $|h|$

$$F(z + h) - F(z) = \int_{z}^{z+h} f(\zeta)\, d\zeta$$

efectuándose la integración a lo largo del segmento que une z con $z + h$. Análogamente a como se hizo en el Teorema 3.2 del Capítulo 3, se demuestra que $F'(z)=f(z)$, quedando así probado el Teorema 1.1.

Ejemplo 1.1. La fórmula integral de Cauchy. Sea $f(z)$ una función analítica en un dominio simplemente conexo que contiene a un contorno cerrado C, y supongamos que el punto a no se encuentra en C. Demostrar que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - a}\, dz = N f(a) \tag{1.4}$$

siendo $N = N(C,a)$ el número de vueltas de C con respecto al punto a.

Si a está en D, la Sección 8 del Capítulo 3 muestra que la función

$$\phi(z) = \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

posee una singularidad evitable en $z = a$, y que esta singularidad se elimina definiendo $\phi(a) = f'(a)$. Una vez hecho esto, el Teorema 1.2 da

$$\int_C \frac{f(z) - f(a)}{z - a}\, dz = 0$$

o,

$$\int_C \frac{f(z)}{z - a}\, dz = f(a) \int_C \frac{dz}{z - a}. \tag{1.5}$$

Dado que el número de vueltas es, por definición,

$$N(C,a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{dz}{z - a},$$

dividiendo (1.5) por $2\pi i$ se obtiene (1.4).

Si a no está en D, entonces la función $1/(z - a)$ es analítica en D, el teorema 1.2 muestra que las integrales (1.5) son todas 0, y se obtiene también (1.4).

En una gran mayoría de casos, C es una curva cerrada simple que da exactamente una vuelta alrededor del punto a. En este caso, $N = 1$, y (1.4) toma la forma

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - a}\, dz.$$

Ejemplo 1.2. El logaritmo analítico. Sea $f(z)$ una función analítica y sin ceros en un dominio simplemente conexo D. Demostrar que f tiene un logaritmo analítico; es decir, existe una función $g(z)$, analítica en D tal que $e^g = f$.

Definimos $g(z)$ por la fórmula

$$g(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta + \operatorname{Log} f(z_0)$$

siendo z_0 un punto fijo de D, z un punto arbitrario de D y el camino de integración, cualquier camino contenido en D, por ejemplo, un camino poligonal que una z_0 con z. En virtud del Teorema 1.2, la integral es independiente del camino de integración. Como

$$\frac{d}{dz} e^{-g} f = e^{-g} f' + f e^{-g}(-g') = 0,$$

$e^{-g}f$ es constante. Haciendo $z = z_0$ se ve que la constante es 1, y por consiguiente, $f = e^g$.

Problemas

1. Siendo D y f como en el Ejemplo 1.2, demostrar que existen en D dos ramas analíticas de $\sqrt{f}$, que son $\exp(1/2)g(z)$ y $-\exp(1/2)g(z)$. Se definen de forma análoga las raíces de índices más elevados.

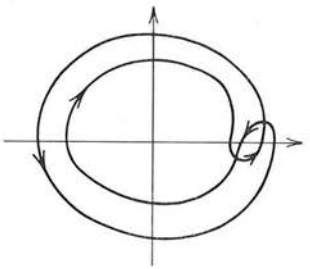


Figura 1-6

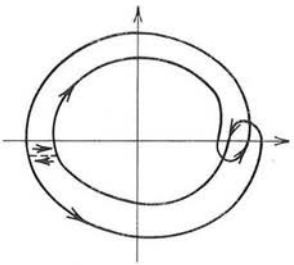


Figura 1-7

2. Sea C un contorno que se corta a sí mismo, como el que se muestra en la Figura 1.6. Introduciendo un corte como se indica en la Figura 1.7, demostrar que

$$\int_C \sqrt{z}\,dz = \int_{C_1} \sqrt{z}\,dz + \int_{C_2} \sqrt{z}\,dz.$$

Como C_1 y C_2 son dominios cerrados contenidos en dominios simplemente conexos en los cuales $\sqrt{z}$ es analítica, se puede concluir que

$$\int_C \sqrt{z}\,dz = 0.$$

Obsérvese que el Teorema 1.2 no es aplicable directamente a C y a $\sqrt{z}$.

3. Si C es un triángulo orientado positivamente, demostrar, con relación a la Figura 1-8 que[2]

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{dz}{z-a} = \begin{cases} 0, \text{ para } a \text{ fuera de } C \\ 1, \text{ para } a \text{ dentro de } C \end{cases}$$

[2] Los problemas 3-6 están íntimamente relacionados con los ejemplos y problemas de la Sección 4 del Capítulo 3.

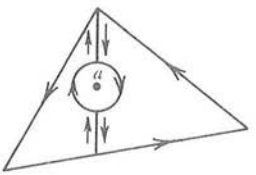


Figura 1-8

4. Obtener el resultado del Problema 3 cuando C sea un polígono cerrado simple y positivamente orientado. (Si a es interior a uno de los triángulos T_i de una triangulación de C, el Problema 3 da

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{T_i}\frac{dz}{z-a}=1, \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{T_i}\frac{dz}{z-a}=0 \qquad \text{para } j\neq i.$$

La suma de todos estos términos es 1. Por continuidad, se obtiene el mismo valor, cuando a se encuentre en el interior de C y sobre un lado de alguno de los triángulos T_i.)
5. Demostrar: el dominio D es simplemente conexo si y solamente si el número de vueltas verifica $N(C,a)=0$ para todo punto a no perteneciente a D y todo contorno cerrado C contenido en D. (Si D no es simplemente conexo, existen un polígono cerrado, simple, C, orientado positivamente, y un punto a que está en el interior de C pero no en D. Por el Problema 4, $N(C,a)=1$.)
6. Deducir del Problema 5 que todo dominio estrellado es simplemente conexo.
7. Sea D un dominio que posea la siguiente propiedad: si f es analítica y carece de ceros en D, entonces tiene en D un logaritmo analítico. Demostrar que D ha de ser simplemente conexo. (Si a no se encuentra en D, para alguna función g se verifica

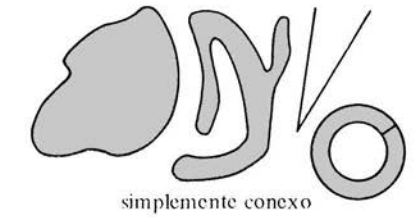
$$z-a=e^{g(z)}$$

pues $z-a$ posee un logaritmo analítico. Pero entonces,

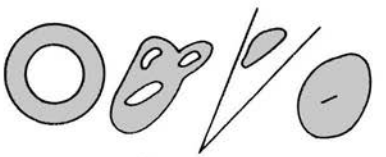
$$\int_C\frac{dz}{z-a}=\int_C e^{-g(z)}\,dz=0$$

para todo contorno cerrado C contenido en D. La conclusión se sigue del Problema 5.)
8. Sea $u(x,y)$ una función armónica y dos veces continuamente diferenciable en el dominio simplemente conexo D. Demostrar que u admite una conjugada armónica, v, tal que $u+w=f$ sea analítica en D. (Como en la Sección 5 del Capítulo 2, la función $g=u_x-iu_y$ es analítica en D. Integrando g sobre cualquier camino conveniente contenido en D se construye f tal que $f'=g$.)
9. Demostrar que el recíproco del Problema 8 es cierto; es decir, que si toda función u como la anterior admite conjugada armónica v, entonces D ha de ser simplemente conexo. (Se considera la función armónica $\operatorname{Log}|z-a|=\operatorname{Re}\log(z-a)$; ver el Problema 7.)

2. **El teorema de los residuos.** Para comodidad del lector, presentaremos aquí en forma resumida las ideas centrales de la discusión precedente. Un dominio es simplemente conexo cuando no tiene huecos, como se ilustra en la Figura 2-1. Como ejemplo típico podríamos considerar la región limitada por un contorno poligonal cerrado que no se corte a sí mismo. Un contorno de este tipo se llama polígono cerrado simple, y la región



simplemente conexo



múltiplemente conexo

Figura 2-1

que limita se llama interior del polígono o región poligonal. Si la frontera de una región poligonal está contenida en un dominio simplemente conexo D, entonces su interior también está contenido en D; y recíprocamente, si esto ocurre para toda región poligonal cuya frontera esté contenida en D, entonces D es simplemente conexo. Se encuentra por triangulación (ver la Figura 2-2) que

$$\int_C f(z)\,dz = 0 \tag{2.1}$$

siendo C cualquier polígono cerrado simple contenido en una región D simplemente conexa en la cual la función f sea analítica. A su vez, esto demuestra que la integral

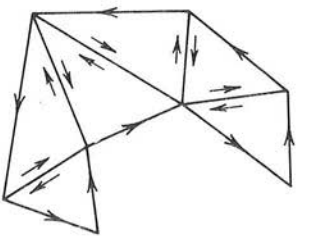


Figura 2-2

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\, dz,$$

tomada a lo largo de un contorno poligonal contenido en D es independiente del camino de integración. Dado que $F'(z) = f(z)$ para todo contorno *arbitrario* C contenido en D, se tiene

$$\int_C f(z)\, dz = \int_C F'(z)\, dz = F(z)\Big|_C .$$

Por consiguiente, la igualdad (2.1) es válida no solamente para los contornos poligonales cerrados contenidos en D, sino también para contornos cerrados arbitrarios. Este importante hecho constituye el *teorema integral de Cauchy.*

Como se discute a continuación, los dominios simplemente conexos que aparecen con mayor frecuencia en las aplicaciones están asociados a contornos cerrados simples. Consideremos un contorno

$$z = \zeta(t), \qquad a \leq t \leq b$$

en el plano z. Se dice que el contorno es un *contorno cerrado simple* y también, que es un *contorno de Jordan* cuando $\zeta(a) = \zeta(b)$ y, salvo en este caso,

$$\zeta(t) \neq \zeta(t^*) \qquad \text{para } t \neq t^*$$

De acuerdo con el teorema de Jordan para curvas, que no demostraremos aquí, un contorno cerrado simple divide al plano en dos dominios: un dominio interior al contorno, que es acotado, y un dominio exterior. El dominio interior es simplemente conexo. Cualquier punto que no se encuentre en el contorno ha de hallarse, necesariamente, en uno de estos dos dominios. La frontera de cada dominio es el contorno de Jordan.

Elijamos t_0 de tal manera que $\zeta(t_0)$ no sea un extremo de uno de los arcos que componen el contorno de Jordan y además, $\zeta'(t_0) \neq 0$. Si el vector que se obtiene al hacer girar el vector $\zeta'(t_0)$, (vector tangente a la curva en el punto $\zeta(t_0)$), $\pi/2$ en sentido antihorario apunta hacia el dominio interior limitado por el contorno de Jordan, se dice que el contorno está *orientado positivamente,* mediante el teorema de Jordan para curvas puede demostrarse que si el vector tangente tiene la propiedad que acabamos de citar en alguno de los arcos que forman el contorno, entonces tiene esta propiedad en todos los demás arcos.

De acuerdo con los convenios que se hicieron en el Capítulo 3 supondremos siempre que una curva de Jordan está positivamente orientada, salvo que se especifique explícitamente lo contrario. Así pues, "contorno de Jordan" sin ningún otro calificativo significa "contorno de Jordan orientado positivamente".

Es posible establecer para contornos de Jordan una forma del teorema de Cauchy que es válida aún en el caso en que $f(z)$ tenga singularidades aisladas. Este teorema,

llamado *teorema de los residuos* posee una importancia fundamental en el Análisis de variable compleja.

Supongamos que $f(z)$sea analítica en el entorno perforado del punto α. Sea k una circunferencia "pequeña" de centro α, orientada positivamente. Entonces se define el *residuo* de f en α como

$$\frac{1}{2\pi i}\int_k f(z)\,dz.$$

De acuerdo con el Teorema 9.2 del Capítulo 2, éste es precisamente el coeficiente a_{-1} del desarrollo de Laurent de f en torno del punto α, y por lo tanto, a_{-1} puede ser considerado como el residuo de f en el punto α. El residuo se denota en ocasiones mediante $\operatorname{Res} f(\alpha)$, que se lee "residuo de f en α".

El lema siguiente puede servirnos para explicar por qué el coeficiente a_{-1} juega un papel distinguido frente a los otros coeficientes del desarrollo de Laurent, así como la razón de utilizar el término "residuo".

LEMA 2.1. *Supongamos que $f(z)$ tenga una singularidad aislada en $z = \alpha$ con la parte singular*

$$f_1(z) = \frac{a_{-1}}{z-\alpha} + \frac{a_{-2}}{(z-\alpha)^2} + \cdots + \frac{a_{-n}}{(z-\alpha)^n} + \cdots$$

y sea C un contorno de Jordan que no pase por el punto α. Entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f_1(z)\,dz = \begin{cases} 0 & \text{para } \alpha \text{ fuera de } C \\ a_{-1} & \text{para } \alpha \text{ dentro de } C. \end{cases}$$

Esquema de la demostración. Supongamos en primer lugar que α sea exterior a C. Como el dominio exterior de C es conexo y contiene al punto $z=\infty$, podemos unir α con ∞ mediante una línea poligonal simple L que no corte a C (ver la Figura 2-3). El dominio que se obtiene suprimiendo del plano complejo la línea L es simplemente conexo y contiene a la curva C. Dado que $f_1(z)$ es analítica para $z \neq \alpha$, es analítica en este dominio simplemente conexo, y en virtud del teorema de Cauchy su integral es 0.

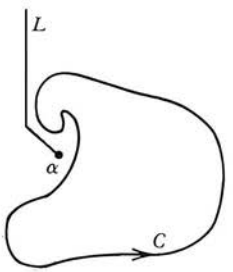


Figura 2-3

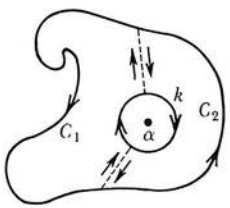


Figura 2-4

Supongamos ahora que α sea interior a C. Sea k una circunferencia suficientemente pequeña de centro α contenida en el interior de C. Consideremos sobre k dos puntos distintos, y desde cada uno de ellos tracemos un segmento rectilíneo contenido en el exterior de k, que tenga la dirección de un rayo que partiendo de α su extremo sea el primer punto de intersección del rayo con C, como se muestra en la Figura 2-4. Se obtienen de esta manera dos contornos de Jordan orientados positivamente, C_1 y C_2, tales que

$$\int_C f_1(z)\,dz = \int_{C_1} f_1(z)\,dz + \int_{C_2} f_1(z)\,dz + \int_k f_1(z)\,dz$$

tomándose la última de estas integrales alrededor de k en sentido antihorario. Por el teorema de Cauchy, las integrales sobre C_1 y C_2 son ambas 0, puesto que $f_1(z)$ es analítica para $z \neq \alpha$, y por consiguiente el segundo miembro se reduce a la última integral. Por la definición de $2\pi i a_{-1}$ el valor de esta integral es a_{-1}.

TEOREMA 2.1. *(Teorema de los residuos de Cauchy.) Sea $f(z)$ una función analítica en un dominio simplemente conexo D excepto en un número finito de puntos α_j en los cuales f puede tener singularidades aisladas. Sea C un contorno de Jordan contenido en D que no pase por ninguno de los puntos α_j. Entonces*

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum (\text{residuo de } f \text{ en } \alpha_j)$$

extendiéndose la suma a los puntos α_j que sean interiores a C.

Demostración. Denotemos por $f_j(z)$ la parte principal o singular de f en el punto α_j entonces $f_j(z)$ es analítica en todo el plano ampliado excepto en el punto α_j, y si hay m puntos α_j,

$$g(z) = f(z) - \sum_1^m f_j(z) \tag{2.2}$$

es analítica en D. Por el teorema de Cauchy

$$\int_C g(z)\,dz = 0$$

de donde

$$\int_C f(z)\,dz = \sum_1^m \int_C f_j(z)\,dz.$$

Aplicando el Lema 2.1 a cada uno de los sumandos del segundo miembro se obtiene el Teorema 2.1.

Algunas fórmulas para calcular residuos aumentan en gran medida la utilidad del Teorema 2.1. Si $f(z)$ tiene un polo simple en el punto $z = \alpha$, entonces

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - \alpha} + g(z)$$

siendo $g(z)$ una función analítica en α. Luego el residuo es

$$a_{-1} = \lim_{z \to \alpha} (z - \alpha) f(z) \qquad \text{(polo simple)}. \quad (2.3)$$

Cuando $f(z) = g(z)/h(z)$ donde g y h son analíticas en α, pero $h(z)$ tiene un cero simple en α, el residuo de f en α es

$$a_{-1} = \frac{g(\alpha)}{h'(\alpha)} \qquad \text{(polo simple)}. \quad (2.4)$$

En efecto, en virtud de la regla de l'Hospital,

$$\lim (z - \alpha) \frac{g(z)}{h(z)} = \lim g(z) \lim \frac{z - \alpha}{h(z)} = g(\alpha) \frac{1}{h'(\alpha)}.$$

Las fórmulas anteriores son válidas cuando f tenga un polo simple o una singularidad evitable en el punto α (en cuyo caso el residuo es cero). Si f tiene un polo de orden m en el punto α,

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - \alpha)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z - \alpha)^{m-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z - \alpha} + g(z)$$

siendo $g(z)$ analítica en α. Por consiguiente, $(z - \alpha)^m f(z)$ es igual a

$$a_{-m} + a_{-m+1}(z - \alpha) + \cdots + a_{-1}(z - \alpha)^{m-1} + (z - \alpha)^m g(z)$$

Por lo tanto, tomando como valor de $(z - \alpha)^m f(z)$ en el punto α el coeficiente a_{-m}, esta función es analítica en α. Derivando $m - 1$ veces y haciendo $z = \alpha$ se tiene

$$a_{-1} = \frac{1}{(m - 1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - \alpha)^m f(z)]_{z=\alpha}. \quad (2.5)$$

Así pues, la fórmula (2.5) da el residuo de $f(z)$ en un polo de orden m. (Puesto que uno o más de los coeficientes $a_{-m}, a_{-m+1}, \ldots$ podría ser cero, la fórmula (2.5) es válida aún cuando f tenga en α un polo de orden menor que m. Para calcular el segundo miembro de (2.5) conviene, por sencillez, tomar m igual al orden real del polo.)

Se dice que una función es meromorfa en D cuando sus únicas singularidades en D sean polos, y sea analítica en todos los demás puntos de D. Las fórmulas anteriores indican que al aplicar el Teorema 2.1 a funciones meromorfas los residuos de estas funciones pueden calcularse por derivación. A consecuencia de este hecho, el cálculo de residuos proporciona un método extraordinariamente eficaz para calcular integrales definidas. El estudio sistemático de estas técnicas se pospondrá hasta las próximas secciones. Sin embargo, daremos ahora una ilustración del método.

La integral

$$\int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)\, d\theta$$

puede transformarse en una integral de contorno haciendo el cambio de variable $z = e^{i\theta}$. Cuando θ crece desde 0 hasta 2π, z recorre la circunferencia unidad en sentido antihorario. Además,

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}, \qquad dz = ie^{i\theta}\, d\theta.$$

Teniendo en cuenta que $e^{i\theta} = z$ vemos que

$$\cos\theta = \frac{z^2 + 1}{2z}, \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{z^2 - 1}{2iz}, \qquad d\theta = \frac{dz}{iz} \tag{2.6}$$

La integral dada se transforma así en

$$\frac{1}{i}\int_C f\left(\frac{z^2 + 1}{2z}, \frac{z^2 - 1}{2iz}\right)\frac{dz}{z}.$$

Para una clase de funciones f bastante amplia, esta integral puede calcularse mediante la teoría de residuos.

Por ejemplo, supongamos que se pide calcular

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \cos\theta}, \qquad a > 1.$$

Haciendo $e^{i\theta} = z$, y teniendo en cuenta (2.6), se tiene

$$I = \frac{1}{i}\int_C \frac{2}{z^2 + 2az + 1}\, dz.$$

El denominador del integrando se anula en los puntos $-a \pm (a^2 - 1)^{1/2}$. La raíz $-a-(a^2-1)^{1/2}$ es menor que -1, y por lo tanto, es exterior a la circunferencia unidad. Como el producto de las dos raíces es igual a $1, -a + (a^2 - 1)^{1/2}$ es interior a la circunferencia. En virtud de (2.4) el residuo en este punto es el valor de $2/(2z + 2a)$ en dicho punto, que resulta ser $1/(a^2 - 1)^{1/2}$. Por consiguiente,

$$I = \frac{2\pi i}{i} \frac{1}{(a^2 - 1)^{1/2}} = \frac{2\pi}{(a^2 - 1)^{1/2}}.$$

El resultado anterior puede generalizarse para un conjunto mayor de valores de a. En efecto, consideremos

$$F(w) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{w + \cos\theta}$$

siendo w cualquier punto del plano "cortado" a lo largo del eje real desde -1 hasta 1. (Este corte se hace con el fin de obtener una región en la cual el denominador no se anule.). Se comprueba fácilmente que $F'(w)$ existe en todos los puntos del plano cortado, y por consiguiente, $F(w)$ es analítica en esta región. El resultado anterior pone de manifiesto que la función analítica

$$F(w) - \frac{2\pi}{(w^2 - 1)^{1/2}}$$

se anula en todos los puntos del eje real del plano w que se encuentren a la derecha de $w=1$. Dado que una función analítica no puede anularse en un intervalo sin ser nula en todo su dominio de analiticidad, se deduce que la función anterior se anula para todo w del plano cortado. Así pues, en todo punto de esta región,

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{w + \cos\theta} = \frac{2\pi}{(w^2 - 1)^{1/2}}. \tag{2.7}$$

Como ha quedado claro al deducir esta fórmula, la rama de la raíz cuadrada anterior debe elegirse de modo que sea positiva para $w > 1$.

Ejemplo 2.1. Hallar el residuo de $f(z) = e^{-iz}/(1 + z^2)$ en $z = i$, y utilizar el resultado para calcular el valor de una clase de integrales curvilíneas.

Se tiene

$$(z - i)f(z) = (z - i)\frac{e^{-iz}}{(z + i)(z - i)} = \frac{e^{-iz}}{z + i}.$$

El límite de esta expresión cuando $z \to i$ es $e/2i$, y en virtud de (2.3), este es el valor del residuo. Otra forma de obtener el mismo resultado es aplicar (2.4), que indica que el residuo será el valor de $e^{-iz}/2z$ en $z = i$. Como era de esperar, el resultante es el mismo $e/2i$.

Si C es un contorno de Jordan que contiene al punto i pero no al $-i$, por el teorema de los residuos se tiene

$$\int_C \frac{e^{-iz}}{z^2 + 1}\, dz = \pi e.$$

Ejemplo 2.2. Hallar el residuo de e^z/z^4 en $z = 0$. Dividiendo por z^4 la serie de Taylor de e^z se obtiene

$$\frac{e^z}{z^4} = \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z} + \frac{1}{4!} + \cdots$$

El coeficiente de $1/z$ es $1/6$. Este es el valor del residuo.

Ejemplo 2.3. ¿Cuál es el residuo de $f(z) = e^{2z}(z-1)^{-3}$ en $z = 1$? Ahora,

$$(z - 1)^3 f(z) = e^{2z}.$$

Derivando dos veces y haciendo $z = 1$ resulta $4e^2$. En virtud de (2.5) con $m = 3$, el residuo es $2e^2$.

Ejemplo 2.4. Deducir la fórmula integral de Cauchy del teorema de los residuos.

Supongamos que $f(z)$ sea analítica en un dominio simplemente conexo D que contiene al contorno de Jordan C, en cuyo interior se encuentra el punto a. La fórmula integral de Cauchy afirma que, en este caso,

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - a}\, dz.$$

Para deducir esta fórmula del teorema de los residuos (Teorema 2.1) basta observar que $f(z)/(z-a)$ es analítica excepto en $z = a$, donde su residuo es $f(a)$ en virtud de (2.4).

Problemas

1. Demostrar que el residuo de la función e^{1/z^2} en el origen es 0 a pesar de que esta función tiene una singularidad esencial en el origen. (Ambos resultados se obtienen haciendo $w = 1/z^2$ en la serie de Taylor de e^w.)
2. Hallar los residuos en todas las singularidades comprendidas en el plano $|z| < \infty$ de las funciones:

$$\frac{1}{z(z-1)}, \quad \frac{z}{z^4+1}, \quad \frac{\operatorname{sen} z}{z^2(\pi - z)}, \quad \frac{ze^{iz}}{(z-\pi)^2}, \quad \frac{z^3+5}{(z^4-1)(z+1)}.$$

3. Siendo C la circunferencia $|z| = 1$, demostrar que

$$\int_C \frac{e^{\pi z}}{4z^2+1}\,dz = \pi i, \qquad \int_C \frac{e^z}{z^3}\,dz = \pi i, \qquad \int_C \frac{e^z}{(z^2+z-3/4)^2}\,dz = 0.$$

¿Sufrirán alguna variación los resultados anteriores cuando C sea la circunferencia $|z| = 2$?

4. (a) Siendo C la circunferencia $z = e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, demostrar por medio de las fórmulas (2.6) que

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\operatorname{sen}\theta} = \int_C \frac{2dz}{z^2+4iz-1}.$$

Calcular el valor de la segunda integral por medio del teorema de los residuos, con lo que se obtendrá que el valor de la primera integral es $2\pi/\sqrt{3}$. (b) Explicar por qué el valor de la integral no cambia al sustituir θ por $\cos\theta$, y calcular el valor de esta última mediante (2.7).

5. Si a es un número complejo, $|a| < 1$, demostrar utilizando primero (2.6) y después (2.7) que

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-2a\cos\theta+a^2} = \frac{2\pi}{1-a^2}.$$

Obtener por inspección de los resultados anteriores los correspondientes al caso $|a| > 1$ comprobándolos mediante residuos. (Con una notación evidente, $I(1/a) = a^2 I(a)$.)

6. Demostrar aplicando el teorema de los residuos que

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{dx}{1+x^2} = \pi.$$

(Sea C_R el contorno semicircular $z = Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$, Obsérvese que

$$\int_C \frac{dz}{1+z^2} = \int_{-R}^{R} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{C_R} \frac{dz}{1+z^2}.$$

La integral que figura en el primer miembro se calcula por el método de los residuos; la segunda del segundo miembro se acota superiormente teniendo en cuenta que $|1+z^2| \geq R^2 - 1$.)

7. Representar gráficamente $I(a)$ en función de a para $-\infty < a < \infty$, siendo

$$I(a) = -i\pi \int_{C_a} \frac{e^z}{z(z^2+\pi^2)}\,dz$$

y donde C_a es la frontera del rectángulo $-1 < x < 1$, $a < y < a + 4$.

3. Integrales sobre el eje real. El teorema de los residuos proporciona un método de gran eficacia para calcular integrales reales de la forma

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx. \tag{3.1}$$

Las integrales del tipo anterior se denominan impropias, y admiten diferentes interpretaciones. En el Análisis de variable compleja resulta conveniente tomar como valor de la integral

$$I = \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} f(x)\, dx \tag{3.2}$$

supuesto que el límite exista. Cuando este límite no existe se dice que la integral es divergente, y no se le asigna ningún valor numérico. La definición de integral impropia dada por la fórmula (3.2) corresponde al llamado *valor principal de Cauchy,* lo que permite distinguirla de otras definiciones, que son más restrictivas.

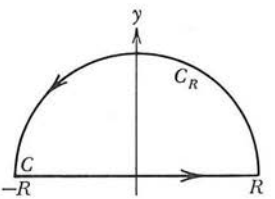


Figura 3-1

A fin de aplicar el cálculo de residuos a las integrales de este tipo empecemos suponiendo que *f(z)* carece de singularidades sobre el eje real y que en el semiplano superior solamente posee singularidades aisladas. Sea C el contorno semicircular que se muestra en la Figura 3-1. Se tiene entonces

$$\int_C f(z)\, dz = \int_{-R}^{R} f(x)\, dx + \int_{C_R} f(z)\, dz \tag{3.3}$$

donde C_R denota la parte curva del contorno. La integral del primer miembro puede calcularse por el método de residuos; la última integral del segundo miembro puede acotarse superiormente. Para amplias clases de funciones, al hacer tender $R \to \infty$ se obtiene tanto la existencia como el valor del límite (3.2).

Ejemplo 3.1. Demostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 + 3}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}\, dx = \frac{5\pi}{6}. \tag{3.4}$$

Consideraremos, en lugar de (3.4) la integral

$$\int_C \frac{z^2 + 3}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)}\, dz = \int_C \frac{z^2 + 3}{z^4 + 5z^2 + 4}\, dz \tag{3.5}$$

donde C es el contorno que se muestra en la Figura 3-1. La primera de las expresiones (3.5) muestra que el integrando es regular en el semiplano superior salvo en los puntos i y $2i$, que son polos simples. Utilizando la segunda expresión y la fórmula (2.4) se ve que los residuos se obtienen calculando el valor de

$$\frac{z^2 + 3}{4z^3 + 10z}$$

en los puntos i y $2i$, respectivamente. Así pues, los residuos son

$$\frac{-1 + 3}{-4i + 10i} = \frac{1}{3i}, \qquad \frac{-4 + 3}{-32i + 20i} = \frac{1}{12i}.$$

Cuando $R > 2$, el contorno C contendrá ambos polos, y por consiguiente la integral (3.5) verifica

$$\int_C \frac{z^2 + 3}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)}\, dz = 2\pi i\left(\frac{1}{3i} + \frac{1}{12i}\right) = \frac{5\pi}{6}.$$

Ahora es preciso acotar superiormente la integral a lo largo de C_R. Si $R > 2$, es claro que para $|z| = R$ se verifican las desigualdades

$$|z^2 + 3| \leq R^2 + 3, \qquad |z^2 + 1| \geq R^2 - 1, \qquad |z^2 + 4| \geq R^2 - 4$$

y por consiguiente, la integral a lo largo de C_R está mayorada por

$$\pi R \frac{R^2 + 3}{(R^2 - 1)(R^2 - 4)} = \pi R \frac{R^2}{R^4} \frac{(1 + 3/R^2)}{(1 - 1/R^2)(1 - 4/R^2)}.$$

Esta expresión tiende hacia 0 cuando $R \to \infty$; haciendo tender $R \to \infty$ en la identidad (3.3) se obtiene (3.4).

Ejemplo 3.2. Demostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + a^2}\, dx = \frac{\pi}{a} e^{-a}, \qquad a > 0. \quad (3.6)$$

Como $\cos x$ es la parte real de e^{ix}, consideraremos en lugar de (3.6) la integral

$$\int_C \frac{e^{iz}}{z^2 + a^2}\, dz$$

siendo C el contorno de la Figura 3-1. La única singularidad que posee el integrando en el semiplano superior es un polo simple en el punto $z = ia$, y en virtud de (2.4) el residuo en el punto ia es $e^{-a}/2ia$. Cuando $R > a$, este punto está en el interior del contorno C, y la identidad (3.3) se transforma en

$$(2\pi i)\frac{e^{-a}}{2ia} = \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{x^2 + a^2}\, dx + \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z^2 + a^2}\, dz. \quad (3.7)$$

Para $z = x + iy$ con $y \geq 0$ se tiene

$$|e^{iz}| = |e^{ix-y}| = |e^{ix}|e^{-y} = e^{-y} \leq 1. \quad (3.8)$$

Esta es la razón de haber tomado e^{iz} y no $\cos z$. Esta última función no admite una acotación útil sobre C_R; en cambio (3.8) da

$$\left| \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z^2 + a^2}\, dz \right| \leq \pi R \frac{1}{R^2 - a^2} = \frac{\pi R}{R^2} \frac{1}{(1 - a^2/R^2)}$$

cuando $R > a$. La expresión anterior tiende hacia 0 cuando $R \to \infty$, igualando las partes reales de (3.7) se obtiene (3.6).

En lugar de igualar las partes reales, podríamos haber observado que

$$\int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{x^2 + a^2}\, dx = \int_{-R}^{R} \frac{\cos x + i \operatorname{sen} x}{x^2 + a^2}\, dx.$$

Ahora bien, sen x es una función impar, es decir, verifica $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$, mientras que $x^2 + a^2$ es par. Por lo tanto, el término que contiene a $i \operatorname{sen} x$ da integral cero. En consecuencia, se verifica (3.6) para todo número complejo a tal que $\operatorname{Re} a > 0$.

Daremos a continuación dos desigualdades que resultan de gran utilidad para acotar la integral a lo largo de C_R.

LEMA 3.1. *Sea $f(z)$ una función racional tal que el grado de su denominador sea d unidades mayor que el grado de su numerador. Entonces existen dos constantes M y R_0 tales que*

$$|f(z)| \leq \frac{M}{R^d} \qquad \text{para } |z| = R \geq R_0.$$

Demostración. Escribamos $f(z)$ en la forma

$$f(z) = \frac{z^n}{z^m} \cdot \frac{a_n + a_{n-1}z^{-1} + \cdots + a_1 z^{1-n} + a_0 z^{-n}}{b_m + b_{m-1}z^{-1} + \cdots + b_1 z^{1-m} + b_0 z^{-m}}$$

donde $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$. Se comprueba fácilmente que la fracción del segundo miembro tiene límite a_n/b_m cuando $|z| \to \infty$, y por consiguiente, dicha fracción está acotada para valores "grandes" de $|z|$. De aquí se deduce el Lema 3.1, demostrando al mismo tiempo que la constante M puede ser cualquier número mayor que $|a_n/b_m|$.

En el Ejemplo 3.2, para obtener la acotación de la integral a lo largo de C_R se utilizó solamente que $|e^{iz}| \leq 1$. En algunos casos de interés es preciso realizar una estimación más precisa. Se dispone para ello del siguiente lema:

LEMA 3.2. *(Lema de Jordan). Si C_R es el contorno $z = Re^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq \pi$, entonces*

$$\int_{C_R} |e^{iz}||dz| < \pi.$$

Demostración. Cuando z se encuentra en C_R se verifica $|e^{iz}| = e^{-y}$, $y = R \operatorname{sen} \theta$. Así pues, denotando por J la integral anterior, podemos escribir $|dz| = R\, d\theta$.

$$J = \int_0^{\pi} e^{-R \operatorname{sen} \theta} R\, d\theta = 2\int_0^{\pi/2} e^{-R \operatorname{sen} \theta}\, d\theta \tag{3.9}$$

siendo la última igualdad consecuencia de $\operatorname{sen}(\pi - \theta) = \operatorname{sen}\theta$. En virtud de la construcción sugerida por la Figura 3-2, es evidente que

$$\operatorname{sen} \theta \geq \frac{2}{\pi}\theta, \qquad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}. \tag{3.10}$$

Es posible dar una demostración puramente analítica basándose en el hecho de que $\theta - 2\theta/\pi$ se anula en $\theta = 0$ y en $\theta = \pi/2$, siendo negativa su derivada segunda en el intervalo $0 < \theta < \pi/2$. En cualquier caso, (3.10) es verdadera, y aplicándola en (3.9) se obtiene

$$J \leq 2\int_0^{\pi/2} e^{-2R\theta/\pi} R\, d\theta = -\pi e^{-2R\theta/\pi}\Big|_0^{\pi/2} < \pi.$$

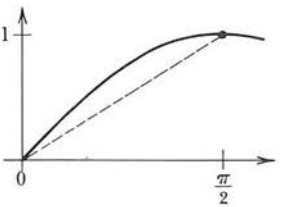


Figura 3.2

Ejemplo 3.3. Sean a y b dos números complejos distintos que tengan parte real positiva. Demostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 e^{ix}}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}\, dx = 2\pi i\left(\frac{a^2 e^{-a}}{a^2 - 2b^2} + \frac{b^2 e^{-b}}{b^2 - 2a^2}\right). \qquad (3.11)$$

En este caso, los residuos en el semiplano superior vienen dados por los valores de la fracción

$$\frac{x^3 e^{ix}}{3x^3 + 2(a^2 + b^2)x} = \frac{x^2 e^{ix}}{3x^2 + 2a^2 + 2b^2}$$

en los puntos $x = ia$ $x = ib$. Por el teorema de los residuos,

$$\int_C \frac{z^3}{(z^2 + a^2)(z^2 + b^2)} e^{iz}\, dz = 2\pi i\left(-\frac{a^2 e^{-a}}{-a^2 + 2b^2} - \frac{b^2 e^{-b}}{-b^2 + 2a^2}\right)$$

que coincide con la solución dada. Además, aplicando el Lema 3.1 con $d = 1$,

$$\left|\frac{z^3}{(z^2 + a^2)(z^2 + b^2)}\right| \leq \frac{M}{R}, \qquad |z| = R \geq R_0.$$

Teniendo en cuenta este resultado y el Lema 3.2 se ve que la integral a lo largo de C_R es menor o igual que

$$\int_{C_R} \frac{M}{R} |e^{iz}||dz| < \frac{M}{R}\pi.$$

Esta última expresión tiende hacia 0, obteniéndose la igualdad (3.11).

Ejemplo 3.4. Demostrar que

$$\left| \int_{-R}^{R} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx - \pi \right| < \frac{\pi}{R}, \tag{3.12}$$

siendo $R > 0$.

Como no disponemos de una acotación útil de sen z sobre C_R sustituiremos sen x por e^{ix}, con lo que se tiene

$$\int_C \frac{e^{iz}}{z} dz.$$

Debido a la singularidad en $z = 0$, esta integral no pertenece a ninguno de los tipos ya discutidos; se darán métodos para analizarla algo más adelante. De todos modos, es posible reducirla a uno de los tipos anteriores restándole 1 al numerador. De esta forma el integrando posee tan sólo una singularidad evitable en $z = 0$, y se tiene

$$0 = \int_C \frac{e^{iz} - 1}{z} dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix} - 1}{x} dx + \int_{C_R} \frac{e^{iz} - 1}{z} dz.$$

La primera igualdad se sigue del teorema de los residuos y la segunda es consecuencia de (3.3). En consecuencia, se tiene

$$\int_{-R}^{R} \frac{e^{ix} - 1}{x} dx = \int_{C_R} \frac{1 - e^{iz}}{z} dz = \int_{C_R} \frac{dz}{z} - \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz. \tag{3.13}$$

La primera de las integrales del último miembro es igual a $i\pi$. Por el Lema 3.2, la segunda verifica

$$\left| \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz \right| \leq \frac{1}{R} \int_{C_R} |e^{iz}||dz| < \frac{\pi}{R}$$

Igualando en (3.13) las partes imaginarias se obtiene (3.12).

Este resultado indica que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \pi$$

y también, que si se calcula aproximadamente la integral efectuando la integración solamente desde $-R$ hasta R, el error no excede a π/R. Este tipo de acotaciones son de utilidad en Análisis Numérico.

Problemas

1. Integrar desde $-\infty$ hasta ∞ cada una de las funciones siguientes:

$$\frac{1}{1+x^4}, \qquad \frac{1}{1+x^6}, \qquad \frac{x^2}{1+x^6}, \qquad \frac{1}{(1+x^2)^2}, \qquad \frac{x^2}{(1+x^2)^2}.$$

(Resultados: $\pi/\sqrt{2}$, $2\pi/3$, $\pi/3$, $\pi/2$, $\pi/2$.)

2. (a) Utilizando el método, pero no el resultado del Ejemplo 3.2, mostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{e}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{e}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{\pi}{e}.$$

(b). Obtener la tercera integral derivando [1] (3.6) respecto de a.

3. Sean a y b dos número complejos distintos que tienen parte real positiva. Demostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\,dx = \frac{\pi}{a^2-b^2}\left(\frac{e^{-b}}{b} - \frac{e^{-a}}{a}\right).$$

4. Aplicando para ello la regla de l'Hospital, calcular el límite del segundo miembro del Problema 3 cuando $b \to a$. Averiguar entonces si este valor coincide con el valor de la integral cuando $b = a$.
5. Denotando por $f(x)$ e I respectivamente el integrando y el valor de la integral del Problema 3, demostrar que

$$\left|\int_{-R}^{R} f(x)\,dx - I\right| \leq \frac{\pi}{(R^2-|a|^2)(R^2-|b|^2)}, \qquad R > \max(|a|,|b|).$$

(Se aplica el Lema de Jordan. Utilizando el resultado de este problema es posible obtener una respuesta afirmativa para el Problema 4 sin tener que efectuar demasiadas operaciones.)

6. (a), (b), (c). Plantear y resolver problemas análogos a los Problemas 3, 4 y 5 sustituyendo el numerador $\cos x$ del Problema 3 por $x \operatorname{sen} x$.
7. Siendo $0 < a < 1$, demostrar que

[1] En este caso y en otros parecidos, la posibilidad de derivar dentro del signo integral está justificada por los Teoremas de convergencia uniforme del Capítulo 6.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{e^x + 1}\,dx = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi a}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cosh ax}{\cosh x}\,dx = \pi \sec \frac{\pi a}{2}.$$

(Se integra $e^{az}/(e^z + 1)$ a lo largo de un rectángulo de vértices $-R$, R, $R + 2\pi i$, $-R + 2\pi i$. La segunda integral puede calcularse de forma parecida, y también, deducirse de la primera.)

8. Siendo $0 < c < 1$ y $|\operatorname{Im} \alpha| < \pi$, demostrar que

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{\alpha z}}{\operatorname{sen} \pi z}\,dz = \frac{2i}{1 + e^{-\alpha}}.$$

(Se efectúa la integración a lo largo de un rectángulo de vértices

$$c - iR, \qquad 1 + c - iR, \qquad 1 + c + iR, \qquad c + iR$$

y se hace tender $R \to \infty$. Esta sugerencia permite hacerse idea del significado de esta integral.)

4. **Integrales impropias. Valores principales.** La definición de integral impropia que se dio en la Sección 3 puede escribirse en la forma

$$\text{⨍}_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R \to \infty} \left(\int_{-R}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{R} f(x)\,dx \right). \tag{4.1}$$

Cuando este límite existe se dice que la integral es *convergente en el sentido de Cauchy;* el valor de este límite es el valor principal de Cauchy. La barra que aparece en el signo integral de (4.1) se utiliza para distinguir esta definición de otra, también útil, que conviene comparar con (4.1). Esta última es

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R_1 \to \infty} \int_{-R_1}^{0} f(x)\,dx + \lim_{R_2 \to \infty} \int_{0}^{R_2} f(x)\,dx. \tag{4.2}$$

La convergencia de la integral implica, como es evidente, la convergencia (hacia el mismo valor) en sentido de Cauchy; sin embargo, la recíproca no es cierta. Por ejemplo,

$$\int_{-R}^{R} 2x\,dx = x^2 \Big|_{-R}^{R} = 0$$

y por lo tanto el límite (4.1) es 0. En cambio, ninguno de los límites de (4.2) existe.

Observemos que en este ejemplo la función $f(x) = 2x$ es impar, es decir, $f(-x) = -f(x)$. Siempre que la función $f(x)$ sea impar el valor principal de Cauchy es 0. Por otra parte, si $f(x)$ es par, la convergencia en sentido de Cauchy implica la convergencia. En efecto, para funciones pares se tiene la identidad

$$\tfrac{1}{2}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx = \int_{-R}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{R} f(x)\,dx$$

de comprobación inmediata, la cual demuestra que existe el límite de los dos términos del segundo miembro cuando $R \to \infty$ si existe el límite del primero. Por consiguiente, se verifica (4.2). Esta observación permite establecer la convergencia de las integrales de los Ejemplos 3.1, 3.2 y 3.4 y de los Problemas 1 – 6 de la sección anterior.

No solamente se llaman impropias las integrales de límites de integración infinitos. Otros tipos de integrales impropias se obtienen cuando el intervalo de integración contiene uno o más puntos donde el integrando se hace infinito.

Consideremos una función f que sea continua o continua a trozos sobre el intervalo $[a,b]$, excepto en el punto c, en el cual dicha función puede hacerse infinita, como se muestra en la Figura 4-1. Consideremos entonces

$$\int_{a}^{c-\epsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\eta}^{b} f(x)\,dx. \qquad \epsilon > 0,\ \eta > 0$$

Cuando el primer término tiene límite para $\epsilon \to 0$ y el segundo para $\eta \to 0$, se puede utilizar el segundo miembro[1] para definir el primero en la siguiente expresión

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\epsilon \to 0+} \int_{a}^{c-\epsilon} f(x)\,dx + \lim_{\eta \to 0+} \int_{c+\eta}^{b} f(x)\,dx \tag{4.3}$$

Se dice también en este caso, que el primer miembro es una *integral impropia.* Puede ocurrir que alguno de los dos límites anteriores no exista, y que sin embargo, sí exista

$$\lim_{\epsilon \to 0+} \left(\int_{a}^{c-\epsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\epsilon}^{b} f(x)\,dx \right)$$

Cuando este límite existe se llama *valor principal* de Cauchy de la integral, y se denota por

[1] La notación $\epsilon \to 0+$ significa que $\epsilon \to 0$ tomando tan sólo valores positivos es decir, que en el paso al límite $\epsilon > 0$. De forma análoga, $\epsilon \to 0-$ significa que $\epsilon \to 0$ tomando valores negativos. Si $c = a$ se elimina la primera expresión del segundo miembro de (4.3). Si $c = b$, se elimina la segunda.

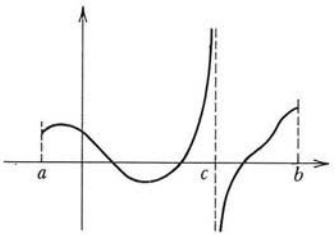


Figura 4.1

$$P\int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{o} \qquad \fint_a^b f(x)\,dx.$$

Se utiliza también la misma notación para el límite (4.1), tomando $a = -\infty$ y $b = \infty$.

A modo de ilustración demostramos que

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} \quad \text{no existe, y en cambio} \quad \fint_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = 0.$$

En efecto,

$$\int_{\eta}^{1} \frac{dx}{x} = \log\frac{1}{\eta} \to \infty \qquad \text{cuando } \eta \to 0+.$$

Por otra parte,

$$\int_{-1}^{-\epsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\epsilon}^{1} \frac{dx}{x} = \log\epsilon + \log\frac{1}{\epsilon} = \log 1 = 0$$

lo cual era de esperar sin más que observar la gráfica de la función $1/x$. Se comprueba de forma análoga que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{1+x^2} \quad \text{no existe, y sin embargo} \quad \fint_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{1+x^2} = 0.$$

El alcance de estas definiciones se amplía fácilmente por adición. Supongamos que $f(x)$sea una función continua, excepto en el punto c en el cual $f(x)$ puede hacerse infinita, y supongamos que el intervalo de integración sea$(-\infty,\infty)$. Tomemos dos puntos, a y b, con la condición de que$-\infty < a < c < b < \infty$. Entonces el valor principal de Cauchy es

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty}\left(\int_{-R}^{a} + \int_{b}^{R}\right) f(x)\,dx + \lim_{\epsilon\to 0+}\left(\int_{a}^{c-\epsilon} + \int_{c+\epsilon}^{b}\right) f(x)\,dx,$$

supuestos existentes los límites del segundo miembro. La expresión

$$\left(\int_{-R}^{a} + \int_{b}^{R}\right) f(x)\,dx + \left(\int_{a}^{c-\epsilon} + \int_{c+\epsilon}^{b}\right) f(x)\,dx$$

es igual a

$$\int_{-R}^{c-\epsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\epsilon}^{R} f(x)\,dx \tag{4.4}$$

la cual es independiente de a y de b; esto demuestra que el valor principal de Cauchy también es independiente de a y de b. Para la mayor parte de las aplicaciones no es preciso introducir los valores intermedios a y b, bastando considerar el límite de (4.4) cuando $R \to \infty$ y $\epsilon \to 0+$ independientemente. De forma análoga puede efectuarse la generalización al caso de que existen varios puntos c_i: se suprimen entonces pequeños intervalos $(c_i - \epsilon_i, c_i + \epsilon_i)$ simétricos respecto de los puntos c_i, y se hacen tender los ϵ_i independiente hacia 0 + Cuando existan todos los límites que definen la integral impropia, se dice que la integral es *convergente.*

El lema siguiente proporciona un método para calcular valores principales de Cauchy, y establece una propiedad de las integrales a lo largo de un camino como el mostrado en la Figura 4-2.

LEMA 4.1 *Supongamos que $f(z)$ tenga un polo simple en el punto $z = \alpha$ con residuo a_{-1} y sea $k = k(\epsilon,\phi)$ un arco de la circunferencia $|z - \alpha| = \epsilon$ que subtiende un ángulo central de valor ϕ Entonces*

$$\lim_{\epsilon\to 0+} \int_{k} f(z)\,dz = i\phi a_{-1}.$$

Si se integrase a lo largo de toda la circunferencia, sería $\phi = 2\pi$, y sin necesidad de suponer que $\epsilon \to 0$ por el teorema de los residuos la integral sería $2\pi i a_{-1}$. El lema indica que si se integra sobre una fracción de la circunferencia el valor de la integral es la correspondiente fracción de $2\pi i a_{-1}$, supuesto que el polo sea simple y que $\epsilon \to 0$

Demostración. Como el polo es simple, $f(z) = g(z) + a_{-1}(z - \alpha)^{-1}$, siendo $g(z)$ una función analítica en un entorno de α; con más precisión, $g(z)$ será analítica en un disco $|z-\alpha| \leqslant \delta$ con $\delta > 0$. Si $0 < \epsilon < \delta$, se tiene

$$\int_k f(z)\,dz = \int_k g(z)\,dz + a_{-1}\int_k \frac{dz}{z-\alpha}.$$

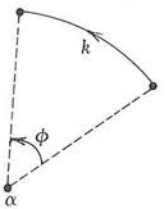


Figura 4-2

La primera integral del segundo miembro está mayorada por $\epsilon\phi M$ Siendo M una cota superior de $|g(z)|$ en el disco $|z-\alpha|\leq \delta$. Haciendo $z=\alpha+\epsilon e^{i\theta}$obre k, la segunda integral se convierte en

$$\int_{\theta_0}^{\theta_0+\phi} \frac{\epsilon e^{i\theta} i\,d\theta}{\epsilon e^{i\theta}} = i\phi.$$

como se quería demostrar.

Ejemplo 4.1. Siendo $a>0$, demostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{a^2-x^2}\,dx = \pi\frac{\operatorname{sen} a}{a}.$$

Consideremos el semicírculo C al que se han practicado dos muescas semicirculares con centros en $-a$ y en a, como se indica en la Figura 4-3, y llamemos

$$I = \int_C \frac{e^{iz}}{a^2-z^2}\,dz.$$

Supongamos que el radio del semicírculo de centro $-a$ sea η, que el de centro a tenga radio ϵ, y sea R el radio del semicírculo grande.El integrando carece así de singularidades en el interior del semicírculo C, y por lo tanto, $I=0$.En consecuencia, podemos escribir

$$\left(\int_{-R}^{-a-\eta} + \int_{-a+\eta}^{a-\epsilon} + \int_{a+\epsilon}^{R}\right)\frac{e^{ix}}{a^2-x^2}\,dx + J_1 + J_2 + J_3 = 0 \qquad (4.5)$$

siendo J_1, J_2, J_3 las integrales correspondientes a los semicírculos de radios η, ϵ y R, respectivamente. De la misma forma que en el Ejemplo 3.2, o la más sencilla del Lema 3.1, se ve que

$$\lim_{R\to\infty} J_3 = 0.$$

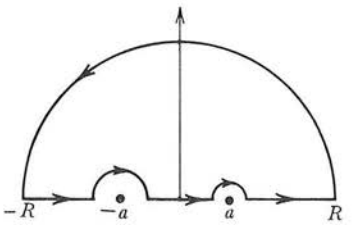


Figura 4-3

A fin de calcular las integrales J_1 y J_2, observemos que los residuos en $-a$ y a son, respectivamente,

$$\frac{e^{-ia}}{2a} \qquad y \qquad \frac{e^{ia}}{-2a}$$

Aplicando ahora el Lema 4.1 con $\phi = -\pi$ se tiene

$$\lim_{\eta\to 0+} J_1 = \frac{-\pi i e^{-ia}}{2a}, \qquad \lim_{\epsilon\to 0+} J_2 = \frac{\pi i e^{ia}}{2a}.$$

(Se ha utilizado el valor $\phi = -\pi$ en lugar del $\phi = \pi$ debido a que las circunferencias pequeñas están recorridas en el sentido negativo.) Haciendo tender $R \to \infty$, $\eta \to 0+$ y $\epsilon \to 0+$ en (4.5), resulta

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{a^2 - x^2}\, dx + \frac{\pi i}{2a}(e^{ia} - e^{-ia}) = 0.$$

Finalmente, tomando la parte real de cada miembro se obtiene el resultado pedido.

Ejemplo 4.2. Demostrar que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Log}|1 - e^{i\theta}|\, d\theta = 0. \tag{4.6}$$

Consideramos para ello la integral

$$\int_C \text{Log}(1 - z)\frac{dz}{z}$$

siendo C la circunferencia $|z| = 1$en la que se ha efectuado la muesca que se indica en la Figura 4-4. Si se corta el plano desde 1 hasta ∞el integrando es una función uniforme en la región así obtenida que, además, es real para $0 < z < 1$.Como la singularidad en $z = 0$ es evitable, por el teorema de Cauchy la integral anterior es 0. Se tiene, por tanto,

$$i\int_{\epsilon}^{2\pi-\epsilon} \text{Log}(1 - e^{i\theta})\, d\theta + \int_{C_\epsilon} \text{Log}(1 - z)\frac{dz}{z} = 0 \qquad (4.7)$$

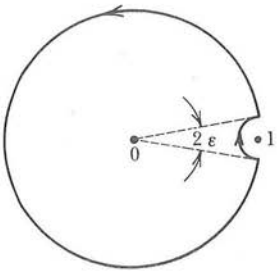


Figura 4-4

donde C_ϵ es el pequeño arco de círculo que se muestra en la figura. Explícitamente, C_ϵ tiene centro en 1 y pasa por los dos puntos tales que

$$|z| = 1, \quad \text{Arg}\, z = -\epsilon; \qquad |z| = 1, \quad \text{Arg}\, z = \epsilon.$$

El radio ρ de C_ϵ verifica $\rho < \epsilon$; por consiguiente, $\rho \to 0$ cuando $\epsilon \to 0$.

Expresando C_ϵ en la forma $1 - z = \rho e^{i\phi}$ con $|\phi| \leq \pi$, comprueba fácilmente que

$$|\text{Log}(1 - z)| = |\text{Log}\,\rho + i\phi| \leq [(\text{Log}\,\rho)^2 + \pi^2]^{1/2} \leq \sqrt{2}|\text{Log}\,\rho|$$

supuesto que, en la última desigualdad, $|\text{Log}\,\rho| \geq \pi$.Por consiguiente, el valor absoluto de la integral sobre C_ϵ es menor o igual que

$$2\pi\rho\frac{\sqrt{2}|\text{Log}\,\rho|}{1 - \rho} \qquad (\rho \leq e^{-\pi}). \quad (4.8)$$

El Problema 1, enunciado más adelante, pone de manifiesto que $\rho \log \rho \to 0$ cuando $\rho \to 0$, y por tanto, haciendo tender $\epsilon \to 0$ en (4.7) se obtiene que el valor principal de Cauchy es (4.6). Como el integrando es una función par, la integral es convergente:

En la sección siguiente se estudian integrales en las que el camino de integración no evita cortar la línea de ramificación (como se ha hecho en las anteriores) sino que corre a lo largo de ella.

Problemas

1. Se deduce de la serie de Taylor de e^t que $e^t > t^n/n!$ para $t > 0$. Haciendo el cambio $R = e^t$, obtener el primero de los límites siguientes, utilizando a continuación su resultado para calcular el segundo.

$$\lim_{R\to\infty} \frac{(\log R)^m}{R} = 0, \qquad \lim_{\rho\to 0+} \rho(\log \rho)^m = 0, \qquad (m = 0, 1, 2, 3, \ldots).$$

2. Aplicando el procedimiento del Ejemplo 4.1, obtener las fórmulas

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = \pi, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2}\, dx = \pi, \qquad \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \pi x}{x(1 - x^2)}\, dx = \pi.$$

(Obsérvese que el tercer integrando es una función par.)

3. Integrar e^{-z^2} a lo largo de la frontera del sector $|z| < R$, $0 < \theta < \pi/4$ y deducir del resultado que

$$\int_0^{\infty} \operatorname{sen} t^2\, dt = \int_0^{\infty} \cos t^2\, dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\infty} e^{-t^2}\, dt.$$

Se ve en Análisis real que el valor de la última integral es $\sqrt{\pi}/2$. (Sobre la parte curva del contorno, $|e^{-z^2}| = e^{-r^2 \cos 2\theta}$. Demostrar, bien analíticamente o por inspección de su gráfica, que

$$\cos 2\theta \geq 1 - \frac{4}{\pi}\theta, \qquad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}.$$

Mediante esta desigualdad es sencillo obtener una cota superior de la integral.)

* **Convergencia absoluta.**

En los problemas siguientes todas las funciones consideradas se suponen continuas a trozos en la semirrecta $0 \leq x < \infty$. La expresión $f \in K$ indica que f pertenece a la clase K de todas las funciones para las cuales existe el límite

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^R f(x)\,dx.$$

4. *Estabilidad frente a combinaciones lineales (Clausura lineal).* Demostrar que $f \in K$ y $g \in K$ implica $\alpha f + \beta g \in K$ para todo par α, β de constantes complejas.
5. *Criterio de comparación.* Si $0 \leq f \leq g$, entonces $g \in K$ implica $f \in K$. (Como es obvio,

$$\int_0^R f(x)\,dx \leq \int_0^R g(x)\,dx \leq \int_0^\infty g(x)\,dx.$$

La expresión del primer miembro está acotada y es no decreciente; por consiguiente tiene límite.)

6. *Toda integral absolutamente convergente es convergente;* dicho de otro modo, si $|f| \in K$ entonces $f \in K$. (Sea $f = u + iv$. La limitación $0 \leqslant |f| + u \leqslant 2\,|f|$ muestra que $|f| + u \in K$ y por lo tanto, lo mismo vale para $u = (|f| + u) - |f|$. Análogamente $v \in K$ y por consiguiente, $u + iv \in K$.)
7. Teniendo en cuenta la desigualdad

$$\int_1^R \frac{|\cos x|}{1 + x^2}\,dx \leq \int_1^R \frac{1}{x^2}\,dx \leq 1.$$

deducir que $(\cos x)/(1 + x^2) \in K$.

8. Integrar por partes $(\operatorname{sen} x)/x$ sobre $1 \leq x \leq R$, a fin de obtener que $(\operatorname{sen} x)/x \in K$.
9. Sea $g(t)$ una función continua a trozos en $0 < t \leq 1$, sea $\epsilon > 0$, y sea $R = 1/\epsilon$. Haciendo $x = 1/t$ demostrar que

$$\int_\epsilon^1 g(t)\,dt = \int_1^R f(x)\,dx, \qquad \text{donde } f(x) = \frac{1}{x^2} g\left(\frac{1}{x}\right).$$

Por consiguiente, el estudio de la convergencia para $\epsilon \to 0+$ cae dentro de los métodos de los Problemas 4-6.

5. Integrandos con puntos de ramificación. Como se recordará del Capítulo 2, la función

$$\operatorname{Log} z = \operatorname{Log}|z| + i \operatorname{Arg} z \tag{5.1}$$

es uniforme y continua en la región obtenida al suprimir en el plano z el origen y todo el semieje real negativo. La función $\theta = \operatorname{Arg} z$ se anula sobre el semieje real positivo, y por continuidad, queda unívocamente determinada en todos los demás puntos de dicha región. Resulta así

$$\lim_{y\to 0+} \operatorname{Arg} z = \pi, \qquad \lim_{y\to 0-} \operatorname{Arg} z = -\pi \qquad x < 0. \quad (5.2)$$

Estos resultados pueden interpretarse imaginando que el corte efectuado en el plano z tiene dos bordes, siendo $\operatorname{Arg} z = \pi$ para los puntos del borde superior y $\operatorname{Arg} z = -\pi$ para los del borde inferior. Esta idea puede formularse con mayor precisión dividiendo el plano cortado en dos regiones, D_1, D_2 , como se muestra en la Figura 5-1. Cada una de estas regiones contiene a su frontera con la excepción del punto $z = 0$, que no se considera perteneciente a ninguna de ellas. Al referirnos al borde "superior" o "inferior" del corte no hacemos sino expresar de manera informal qué valor debe atribuirse a la función $\operatorname{Arg} z$ en D_1 o D_2, respectivamente.

Exceptuado el punto $z = 0$, D_1 podría extenderse ligeramente hacia abajo, de forma que, por ejemplo, el segmento $-R \leq x \leq -\epsilon$ del eje real fuera interior a D_1. Análogamente, D_2 podría extenderse hacia arriba. En los ejemplos y problemas que siguen se consigue mediante este procedimiento que el camino de integración que sea necesario considerar, se halle en el interior de la región de analiticidad del integrando, como exige el teorema de Cauchy. En la Sección 9 se dará un método más eficaz para abordar estos problemas, por lo cual no insistiremos aquí en este procedimiento.

La importancia práctica de la observación anterior estriba en que la suma de las integrales a lo largo del eje real, frecuentemente se anula, pero no siempre ocurre así. Por ejemplo, se tiene

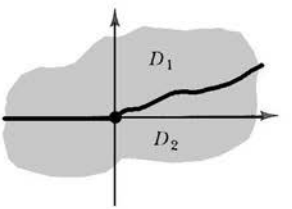


Figura 5-1

$$\int_{-3}^{-1} \operatorname{Arg} z\, dx + \int_{-1}^{-3} \operatorname{Arg} z\, dx = 4\pi$$

cuando el camino de integración de la primera integral se considera contenido en D_1 y el camino de integración de la segunda lo está en D_2. Daremos ahora algunos ejemplos en los que se muestra cómo aplicar las ideas anteriores al cálculo de integrales.

Ejemplo 5.1. Eligiendo la rama de t^a de forma que esta función sea real sobre el semieje $t > 0$, demostrar que

$$\int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{1+t}\,dt = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi a}, \qquad 0 < a < 1.$$

Consideremos

$$I = \int_C \frac{z^{a-1}}{1-z}\,dz$$

siendo C el contorno que se muestra en la Figura 5-2, cuyo radio interior es $\epsilon < 1$ y cuyo radio exterior es $R > 1$. Se corta el plano z a lo largo del semieje real negativo a fin de que la función z^{a-1} sea uniforme en la región resultante. Si $\theta = \operatorname{Arg} z$, podemos escribir $z = re^{i\theta}$ con $r > 0$ y por definición,

$$z^{a-1} = r^{a-1}e^{i\theta(a-1)}, \qquad (r^{a-1} > 0).$$

Efectuando un nuevo corte, como el indicado en la Figura 5-3, podemos expresar la integral a lo largo de C como la suma de las integrales a lo largo de C_1 y C_2. La integral a lo largo de C_1 es 0, pues $z^{a-1}/(1-z)$ es analítica en un dominio simplemente conexo que contiene a C_1. Sin embargo, el valor de la integral a lo largo de C_2 es $-2\pi i$, pues su integrando tiene en $z = 1$ un polo simple de residuo -1. Por lo tanto,

$$I = -2\pi i.$$

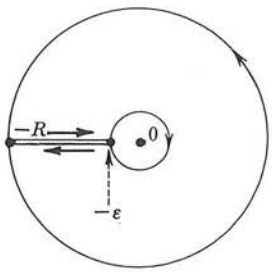


Figura 5-2

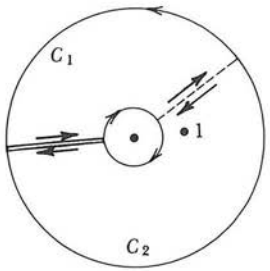


Figura 5-3

Como se ha explicado ya, $\theta = \pi$ sobre el borde superior del corte de la Figura 5-2, y $\theta = -\pi$ sobre el borde inferior, Así pues,

$$I = \int_R^\epsilon \frac{(re^{i\pi})^{a-1}}{1+r} e^{i\pi}\,dr + \int_\epsilon^R \frac{(re^{-i\pi})^{a-1}}{1+r} e^{-i\pi}\,dr + J_1 + J_2$$

siendo J_1 y J_2 las integrales correspondientes a las circunferencias de radios R y ϵ, respectivamente. En el primer integrando tenemos

$$(re^{i\pi})^{a-1}e^{i\pi} = r^{a-1}e^{i\pi(a-1)}e^{i\pi} = r^{a-1}e^{i\pi a}$$

obteniéndose para el segundo una expresión análoga. Por tanto,

$$I = \int_\epsilon^R \frac{r^{a-1}}{1+r}\,dr\,(-e^{i\pi a} + e^{-i\pi a}) + J_1 + J_2. \tag{5.3}$$

Sobre las circunferencias de radios R y ϵ se verifican, respectivamente, las acotaciones

$$\left|\frac{z^{a-1}}{1-z}\right| \leq \frac{R^{a-1}}{R-1}, \qquad \left|\frac{z^{a-1}}{1-z}\right| \leq \frac{\epsilon^{a-1}}{1-\epsilon}$$

y por lo tanto,

$$|J_1| \leq 2\pi R\frac{R^{a-1}}{R-1}, \qquad |J_2| \leq 2\pi\epsilon\frac{\epsilon^{a-1}}{1-\epsilon}.$$

Puesto que $a < 1$, la primera de estas expresiones tiende hacia 0 cuando $R \to \infty$, y dado que $a > 0$, la segunda tiende hacia 0 cuando $\epsilon \to 0$. Por lo tanto, haciendo tender $\epsilon \to 0$ y $R \to \infty$ en (5.3), y teniendo en cuenta que $I = -2\pi i$, se obtiene

$$\int_0^\infty \frac{r^{a-1}}{1+r}\,dr\,(e^{-i\pi a} - e^{i\pi a}) = -2\pi i$$

Puesto que $e^{-i\pi a} - e^{i\pi a} = -2i\,\text{sen}\,\pi a$, hemos obtenido el resultado pedido.

Ejemplo 5.2. Tomando $\log x$ con su sentido habitual en Análisis de variable real, demostrar que

$$\int_0^\infty \frac{\log^2 x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi^3}{8}, \qquad \int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2}\,dx = 0. \tag{5.4}$$

Sea

$$I = \int_C \frac{\log^2 z}{1+z^2}\,dz$$

donde C es el semicírculo que se muestra en la Figura 5-4, cuyo radio interior es $\epsilon < 1$ y cuyo radio exterior es $R > 1$. Tomemos sobre $\log z = \operatorname{Log} z$, es decir, el valor principal del logaritmo. Entonces el integrando de I es analítico en el interior de C, exceptuado el punto $z = i$ en el que tiene un polo simple. Por tanto,

$$I = 2\pi i \frac{\operatorname{Log}^2 i}{2i} = \pi \left(\frac{i\pi}{2}\right)^2 = \frac{-\pi^3}{4}. \tag{5.5}$$

Sobre el semieje real negativo $z = re^{i\pi}$ y así pues,

$$I = \int_\epsilon^R \frac{\log^2 x}{1 + x^2} dx + \int_R^\epsilon \frac{(\operatorname{Log} re^{i\pi})^2}{1 + r^2} e^{i\pi}\, dr + J_1 + J_2$$

donde J_1 y J_2 son respectivamente las integrales correspondientes a los dos arcos de C en los que $|z| = R$ y $|z| = \epsilon$. Como $re^{i\pi} = \operatorname{Log} r + i\pi$, tenemos

$$(\operatorname{Log} re^{i\pi})^2 = \operatorname{Log}^2 r + 2i\pi \operatorname{Log} r - \pi^2$$

y haciendo $r = x$ en la segunda de las integrales anteriores, resulta

$$I = \int_\epsilon^R \frac{2 \log^2 x + 2\pi i \log x - \pi^2}{1 + x^2} dx + J_1 + J_2. \tag{5.6}$$

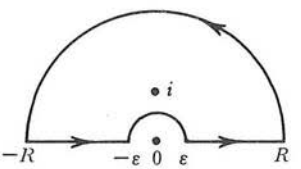


Figura 5-4

Sobre J_1 se tiene $z = Re^{i\theta}$ con $0 \leq \theta < \pi$ y por lo tanto, el integrando verifica la acotación

$$\left|\frac{(\log z)^2}{1 + z^2}\right| = \frac{|\log R + i\theta|^2}{|1 + z^2|} \leq \frac{\log^2 R + \pi^2}{R^2 - 1}.$$

Se obtiene de aquí

$$|J_1| \leq \pi R \frac{\log^2 R + \pi^2}{R^2 - 1}.$$

Puesto que $(\log R)^2/R \to 0$ cuando $R \to \infty$, se deduce que $J_1 \to 0$ cuando $R \to \infty$. Un cálculo parecido con ϵ en lugar de R muestra que $J_2 \to 0$ cuando $\epsilon \to 0$. Así pues, haciendo tender $R \to \infty$ y $\epsilon \to 0$ en (5.6) resulta

$$\frac{-\pi^3}{4} = \int_0^\infty \frac{2\log^2 x + 2\pi i \log x}{1 + x^2}\, dx - \pi^2 \int_0^\infty \frac{dx}{1 + x^2}$$

teniendo en cuenta que en virtud de (5.5), $I = -\pi^3/4$. El valor de la segunda integral es $\pi/2$, igualando las partes real e imaginaria de ambos miembros se obtiene (5.4).

A modo de comprobación, hagamos notar que efectuando el cambio $x = e^t$ se obtiene el segundo de los resultados (5.4).

Problemas

Tanto en estos problemas como en otros posteriores se considerará la rama de la función correspondiente que sea la usual en el Análisis de variable real.

1. Demostrar que el resultado del Ejemplo 5.1 sigue siendo válido si $a = p + iq$ es un número complejo tal que $0 < p < 1$. Calcular, por igualación de la correspondientes partes real e imaginaria,

$$\int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{1 + t}\cos(q \log t)\, dt, \qquad \int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{1 + t}\operatorname{sen}(q \log t)\, dt.$$

(Se aplica que $\operatorname{sen} \pi(p + iq) = \operatorname{sen} \pi p \cosh \pi q + i \cos \pi p \operatorname{senh} \pi q$.)

2. Siendo $-1 < a < 1$, demostrar que

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{1 + x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}\sec\frac{\pi a}{2}, \qquad \int_0^\infty \frac{x^a}{(1 + x)^2}\, dx = \pi a \csc \pi a.$$

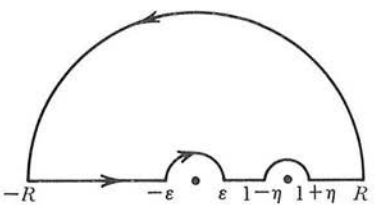


Figura 5-5

3. Repetir el Ejemplo 5.1 utilizando esta vez el contorno que se muestra en la Figura 5-5.
4. Deducir las dos fórmulas siguientes

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^{1/4}}{x^2+x+1}\,dx = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{1/2}, \qquad \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^{1/4}}{x^2-x+1}\,dx = \left(\frac{2}{3}\right)^{1/2}.$$

mediante una sola integral curvilínea.

5. Considerando la función $f(z) = z^{1/2}(\log z)/(1+z)^2$, demostrar que

$$\int_0^\infty \frac{x^{1/2}\log x}{(1+x)^2}\,dx = \pi, \qquad \int_0^\infty \frac{x^{1/2}}{(1+x)^2}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

6. Imitando el Ejemplo 5.2, calcular la integral desde 0 hasta ∞ de las siguientes funciones

$$\frac{(\log x)^2}{x^3+1}, \qquad \frac{\log x}{x^4+1}, \qquad \frac{\log x}{(x^2+1)^2}, \qquad \frac{\log x}{x^2-1}.$$

(Soluciones: $3\pi^2\sqrt{2}/64$, $-\pi^2\sqrt{2}/16$, $-\pi/4$, $\pi^2/4$. Para calcular la cuarta integral es preciso efectuar sobre el contorno una muesca para excluir el punto $x = 1$.)

7. Hacer $t = x^3$ o $t = x^4$ en las dos primeras integrales del Problema 6, y calcular su valor derivando el resultado del Ejemplo 5.1 respecto del parámetro a.)
8. Integrando por partes sobre (ϵ, R), demostrar que

$$\int_0^\infty \frac{\log(1+x^2)}{x^{1+a}}\,dx = \frac{\pi}{a}\csc\frac{\pi a}{2}.$$

6. Principio del argumento; teorema de Rouche. Como ya se dijo en el Capítulo 3, una función es meromorfa cuando sus únicas singularidades son polos. Un aspecto interesante del teorema de los residuos estriba en la posibilidad de utilizarlo para obtener información acerca del número de ceros que una función analítica puede tener en el interior de un cierto dominio, y en el caso de una función meromorfa, del número de ceros menos el número de polos.[1]

TEOREMA 6.1. *Sea $f(z)$ una función meromorfa en un dominio simplemente conexo D que contiene a un contorno de Jordan C. Supongamos que ninguno de los polos ni ceros*

[1] Ambos casos pueden reducirse a uno, considerando cada polo como un cero de multiplicidad negativa.

de f se encuentre sobre C. Sea N el número de ceros y P el número de polos, que f tiene en el interior de C, contándose cada cero y cada polo múltiple de acuerdo con su multiplicidad. Entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = N - P. \tag{6.1}$$

Demostración. Las únicas singularidades que f'/f puede tener en el interior de C son los ceros o los polos de f. Si $z=\alpha$ es un cero de orden m de f, entonces

$$f(z) = (z-\alpha)^m h(z)$$

siendo h una función analítica en el entorno de α, y tal que $h(\alpha)\neq 0$. Por consiguiente, en el entorno de α,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z-\alpha} + \frac{h'(z)}{h(z)}$$

Así pues, el residuo en el punto α de la función f'/f es igual a m. Análogamente, en un polo, $z=\beta$, de orden n de la función f el residuo es $-n$. Aplicándole al primer miembro de (6.1) el Teorema 2.1 se obtiene la fórmula (6.1), como se quería demostrar.

Poniendo $w=f(z)$, por derivación formal se sugiere que $dw=f'(z)\,dz$ y resulta

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{C^*}\frac{dw}{w} \tag{6.2}$$

siendo C^* la imagen de C en la aplicación f, es decir, la curva en la cual se transforma C mediante f. El segundo miembro de (6.2) representa el número de vueltas de C^* respecto al origen de w. Este resultado nos hace conjeturar que *$N-P$ es el número de vueltas que la curva C^*, imagen de C, da alrededor del origen en el plano w.* Esta conjetura resulta confirmada.

En efecto, sea $z=\zeta(t)$, $a\leq t\leq b$ la ecuación de C. Entonces, la ecuación de C^* en el plano w viene dada por

$$w = f[\zeta(t)], \qquad a \leq t \leq b.$$

Como $f(z)$ no es nula en ningún punto de C, la curva C^* no pasa por el origen, y por lo tanto, es posible definir a lo largo de ella un logaritmo continuo,

$$L(t) = \log f[\zeta(t)]$$

Aplicando en cualquier porción lisa de C dos veces la regla de la cadena se obtiene

$$L'(t) = \frac{f'[\zeta(t)]}{f[\zeta(t)]}\,\zeta'(t)$$

y en virtud del teorema fundamental del Cálculo

$$\int_a^b \frac{f'[\zeta(t)]}{f[\zeta(t)]}\,\zeta'(t)\,dt = \log f[\zeta(t)]\Big|_a^b.$$

Este resultado es equivalente a

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \log f(z)\Big|_C = \log|f(z)|\Big|_C + i\arg f(z)\Big|_C.$$

El primer término del segundo miembro es 0, pues $|f(z)|$ es una función uniforme y C es un contorno cerrado. Dividiendo entre $2\pi i$ y aplicando el Teorema 6.1 se obtiene

$$N - P = \frac{1}{2\pi}\arg f(z)\Big|_C. \tag{6.3}$$

Esta forma de poner de manifiesto el contenido del Teorema 6.1 se conoce con el nombre de *principio de variación del argumento.*

Veamos ahora una posible interpretación geométrica. Tracemos en el plano w una recta que una el origen con el punto $w = f(z)$como se muestra en la Figura 6.1. Entonces arg *f(z)* representa el ángulo que forma esta recta con una dirección fija, y por consiguiente, (6.3) expresa el número de veces que el punto $w = f(z)$rodea al origen $w = 0$ cuando el punto z recorre el contorno C.

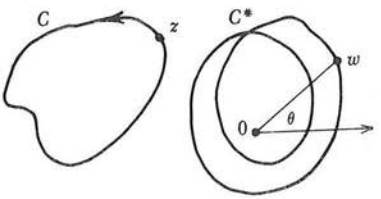


Figura 6-1

TEOREMA 6.2. *(Rouché). Sean f(z) y g(z) dos funciones analíticas en un dominio simplemente conexo que contiene al contorno de Jordan C. Supongamos que* $|f(z)| > |g(z)|$ en todo punto de C. Entonces *f(z) y f(z) + g(z) tienen ambas el mismo número de ceros en el interior de C.*

Primera demostración del Teorema. Como sobre C es $|f| > |g|$ se deduce que $f \neq 0$ sobre C. Asimismo se verifica $|f + g| \geqslant |f| - |g| > 0$ sobre C. Entonces la función meromorfa

$$F(z) = \frac{f(z) + g(z)}{f(z)}$$

no posee ni ceros ni polos en el interior del contorno C. Aplicando a F el principio de variación del argumento,

$$N - P = \frac{1}{2\pi} \arg F(z)\Big|_C . \tag{6.4}$$

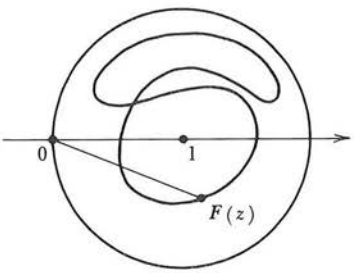


Figura 6-2

Como sobre C se verifica $|g/f| < 1$ se tiene que $|F(z) - 1| < 1$ toda vez que z se encuentre en C. Por consiguiente, el punto $F(z)$ se halla en el interior de un círculo de centro 1 y radio 1, como se muestra en la Figura 6-2. Se sigue de aquí que una de las determinaciones de $\arg F(z)$ verifica la condición $|\arg F(z)| < \pi/2$ cuando z se halle en C, y por lo tanto,

$$\arg F(z)\Big|_C = 0.$$

(La razón de que sea válida esta última igualdad es que los únicos valores posibles del primer miembro son $2\pi k$ para algún entero k, y si $k \neq 0$ se llega a una contradicción con la condición $|\arg F(z)| < \pi/2$.) Entonces, $N = P$, en vista de la igualdad (6.4). Dado que los polos de F son precisamente los ceros de f, y que los ceros de F coinciden con los ceros de $f + g$, la igualdad $N = P$ muestra que el número de ceros de f y de $f + g$ es exactamente el mismo.

Segunda demostración del Teorema. Consideremos para $0 \leq \lambda \leq 1$ la función

$$N(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z) + \lambda g'(z)}{f(z) + \lambda g(z)}\, dz.$$

Como $|f + \lambda g| \geq |f| - \lambda|g| \geq |f| - |g|$, el denominador del integrando no es nunca nulo sobre C, y por lo tanto tiene un mínimo positivo e independiente de λ, que llamaremos δ. Utilizando este hecho se demuestra sin dificultad que $N(\lambda)$ es una función continua de λ. En virtud del Teorema 6.1 aplicado a la función $f + \lambda g$ $N(\lambda)$ ha de tomar forzosamente valores enteros, y por ser continua, necesariamente será constante. Así pues, $N(0) = N(1)$. Ahora bien, $N(0)$ es el número de ceros de f, en virtud del Teorema 6.1, y $N(1)$ es el número de ceros de $f + g$. Esto demuestra el teorema.

El Teorema 6.1 admite una generalización que proporciona algunos importantes métodos de sumación de series. Supongamos que en las condiciones del Teorema 6.1, todos los ceros y todos los polos de f sean simples; llamémoslos a_i y b_i respectivamente. Es este caso, para toda función g analítica en D se tiene

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} g(z)\, dz = \sum g(a_i) - \sum g(b_i) \tag{6.5}$$

En efecto, calculemos el residuo del integrando en el punto a_i,

$$\lim_{z \to a_i} (z - a_i) g(z) \frac{f'(z)}{f(z)} = g(a_i) \lim_{z \to a_i} (z - a_i) \frac{f'(z)}{f(z)} = g(a_i).$$

La segunda de las igualdades (6.5) se obtiene mediante el mismo procedimiento que ha permitido demostrar el Teorema 6.1. Análogamente, el residuo en el punto b_i es $-g(b_i)$, y aplicando ahora el teorema de los residuos se obtiene (6.5). En el caso de que f tenga ceros o polos múltiples, la fórmula (6.5) es válida sin más que afectar a cada sumando del segundo miembro del correspondiente factor de multiplicidad. En el caso particular de que $g(z) = 1$ se obtiene otra vez el Teorema 6.1.

Una elección útil en (6.5) es $f(z) = \operatorname{sen} \pi z$. Esta función carece de polos, sus ceros son todos simples, y corresponden a todos los puntos de abscisa entera del eje real. Como

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\pi \cos \pi z}{\operatorname{sen} \pi z} = \pi \cot \pi z$$

se sigue que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C g(z) \pi \cot \pi z\, dz = \sum g(n) \qquad (g \text{ analítica}) \tag{6.6}$$

estando la suma extendida a todos los enteros n que se encuentren en el interior de C. La integral (6.6) se aplicará en el Capítulo 6 a fin de obtener algunos importantes desarrollos en serie.

Para terminar, citemos todavía otra forma del principio de variación del argumento, que, fundamentalmente, se debe a Cauchy y que con frecuencia es conveniente. Supongamos que $f = u + iv$ cumpla todas las hipótesis del Teorema 6.1, con lo cual $\theta = \arg f(z)$ verificará

$$\cot\theta = \frac{u(x,y)}{v(x,y)}$$

para todo punto $z = x + iy$ de C. Comencemos a recorrer el contorno C en un punto z_0 de C en el que $\cot\theta \neq 0$. Conforme z va recorriendo C la función $\cot\theta$ va cambiando de signo, pasando unas veces por $|\cot\theta| = \infty$, y otras por $\cot\theta = 0$. Tomaremos en consideración solamente los cambios de signo que correspondan a este último caso. Denotamos mediante $S+$ el número de cambios de signo de $+$ a $-$ en los que $\cot\theta$ pasa por el valor 0, y mediante $S-$ el número de cambios de signo, de $-$ a $+$, en los que $\cot\theta$ pasa por el valor 0. En las hipótesis del Teorema 6.1, la versión del principio de variación debida a Cauchy expresa que

$$N - P = (1/2)(S^+ - S^-) \tag{6.7}$$

supuesto, claro es, que tanto S^+ como S^- sean finitos.

Para comprobarlo, representemos gráficamente $\cot\theta$ en función de θ. Comencemos en cualquier punto θ_0 en el que $\cot\theta_0 \neq 0$. Se comprueba sin dificultad que al aumentar θ en π el número S^+ aumenta en 1, mientras que al disminuir θ en π, es el número S^- el que aumenta en 1. En la substracción $S^+ - S^-$ se anulan los efectos de pasar varias veces valores de θ en los que $\cot\theta = 0$. Por lo tanto, la ganancia neta de θ, expresada en múltiplos de 2π es la dada por el segundo miembro de (6.7), ecuación que equivale a la (6.3).

El razonamiento anterior pone de manifiesto que $S^+ - S^-$ da una estimación del número de veces que θ es múltiplo de π aún cuando solamente se recorra parte de C. Esta evaluación es interesante en el cálculo por métodos aproximados.

Ejemplo 6.1. Calcular el número de ceros del polinomio

$$P(z) = z^4 + z^3 + 5z^2 + 2z + 4$$

que se encuentran en el primer cuadrante, $x \geq 0, y \geq 0$. Para ello podemos aplicar el principio de variación del argumento a lo largo de un contorno C como el mostrado en la Figura 6-3, en la cual R tomará un valor suficientemente grande. Es claro que se verifica $P(x) > 0$ sobre el lado $y = 0, 0 \leq x \leq R$, y por consiguiente,

$$\arg P(x)\Big|_0^R = 0;$$

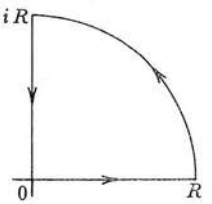


Figura 6-3

pues podemos elegir $\arg P(x)$ de forma que $\arg P(x) = 0$ sobre $0 \leq x \leq R$.

Sobre el arco $z = Re^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq \pi/2$, se tiene $P(z) = R^4 e^{i4\theta}(1 + \omega)$ donde $|\omega| < 2/R$ para valores suficientemente grandes de R. Por consiguiente $\arg[P(Re^{i\theta})] = 4\theta + \arg(1 + \omega)$. Luego para valores grandes de R se tiene:

$$\arg P(Re^{i\theta})\Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} = 2\pi + \delta \tag{6.8}$$

expresión en la que $\delta \to 0$ cuando $R \to \infty$.

Finalmente, sobre el lado $x = 0$, $0 < y < R$ se tiene

$$\begin{aligned} P(iy) &= (y^4 - 5y^2 + 4) - i(y^3 - 2y) \\ &= (y^2 - 4)(y^2 - 1) - iy(y^2 - 2). \end{aligned}$$

Cuando y decrece desde R hasta 0, $\operatorname{Re} P(iy)$ cambia de signo en $y = 2$ y en $y = 1$ mientras que $\operatorname{Im} P(iy)$ cambia de signo en $y = \sqrt{2}$. Por consiguiente, $\operatorname{Re} P(iy) > 0$ y $\operatorname{Im} P(iy) < 0$ cuando $y > 2$, por lo cual $\arg P(iy)$ se encuentra en el cuarto cuadrante para $2 < y < R$. Cuando $\sqrt{2} < y < 2$, $\arg P(iy)$ está en el tercer cuadrante; para $1 < y < \sqrt{2}$, $\arg P(iy)$ está en el segundo cuadrante; y para $0 < y < 1$, $\arg P(iy)$ se encuentra en primero. Por consiguiente, cuando y decrece desde R hasta 0, $\arg P(iy)$ decrece desde un valor próximo a 2π hasta el valor 0 en $y = 0$. En definitiva,

$$\arg P(iy)\Big|_{y=R}^{y=0} = -2\pi + \delta_1$$

tendiendo $\delta_1 \to 0$ cuando $R \to \infty$. Así pues,

$$\arg P(z)\Big|_C = 0 + 2\pi + \delta - 2\pi + \delta_1.$$

Como C es un contorno cerrado, la variación de $\arg P(z)$ debe ser un múltiplo entero de 2π, y por consiguiente, ha de ser cero. Por lo tanto, $P(z)$ no tiene ningún cero en el primer cuadrante. (Como $P(x)$ es real, se puede afirmar que tampoco tiene ningún cero en el cuarto cuadrante.)

Problemas

1. Como $64 > 17$, la ecuación $2z^5 + 8z - 1 = 0$ carece de ceros para $|z| \geq 2$. Confirmar este hecho utilizando el teorema de Rouché para demostrar que este polinomio tiene cinco raíces en el disco $|z| < 2$. (Se toman $f = 2z^5$, $g = 8z - 1$.)
2. Mostrar que la ecuación anterior tiene solamente una raíz en el disco $|z| < 1$, y que esta raíz es real y positiva. (Se toman $f = 8z - 1$, $g = 2z^5$. La existencia de al menos una raíz positiva está garantizada, pues $2x^5 + 8x - 1$ toma signos opuestos en $x = 0$ y $x = 1$.)
3. Demostrar que la ecuación anterior no tiene ninguna raíz sobre la circunferencia $|z| = 1$ y que por consiguiente, tiene exactamente cuatro soluciones en la corona circular $1 < |z| < 2$.
4. Demostrar que para el polinomio $P(iy)$ del Ejemplo 6.1 se verifica $S^+ = 0$ y $S^- = 2$ cuando y decrece desde R hasta 0.
5. Procediendo como en el Ejemplo 6.1, o aplicando directamente la fórmula (6.7), mostrar que cada uno de los polinomios siguientes tiene justamente una raíz en el primer cuadrante:

$$z^3 - z^2 + 2 = 0, \qquad z^4 + z^2 = 2z - 6, \qquad z^4 + z^3 = 2z^2 - 2z - 4.$$

6. Demostrar que la ecuación $e^z = 2z + 1$ tiene exactamente una raíz en el disco abierto $|z| < 1$. (Se consideran para ello las funciones

$$f(z) = -2z, \qquad g(z) = e^z - 1 = \int_0^z e^\zeta \, d\zeta.$$

   En virtud de la expresión integral, $|g(z)| \leq e - 1$ en $|z| \leq 1$.)
7. Deducir el Teorema fundamental del Algebra a partir del Teorema de Rouché. (Se consideran $f = a_n z^n$ y $g = a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$ en un círculo de radio R suficientemente grande.)
8. *Principio del módulo máximo.* Supongamos que $g(z)$ sea una función analítica sobre y en el interior de un contorno de Jordan C. Si se verifica sobre C que existe una constante m tal que $|g(z)| \leq m$, deducir del teorema de Rouché que esta misma desigualdad es válida en el interior de C. (Supongamos que $|g(z_0)| > m$; el Teorema de Rouché indica que las funciones

$$-g(z_0) \qquad \text{y} \qquad -g(z_0) + g(z)$$

tienen ambas el mismo número de ceros en el interior de C.)

9. Demostrar que la función, $f(z) = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$ toma todo valor complejo $\alpha = a + ib$, exceptuados los del segmento rectilíneo $b = 0$, $-1 \leq a \leq 1$, exactamente una vez en el disco abierto $|z| < 1$. (Demostrar para ello que tomando C igual a la circunferencia unidad $z = e^{i\theta}$, $f(e^{i\theta})$ es real, y $|f(e^{i\theta})| \leq 1$ con lo cual $\arg [f(z)-\alpha]|_C = 0$. Como $f(z)-\alpha$ tiene exactamente un polo en el disco $|z| < 1$, debe tener exactamente un cero.)
10. Llamemos a_k a los ceros complejos de un polinomio $P(z)$, $P(0) \neq 0$. Integrando la fracción $z^m P'(z)/P(z)$ con un valor conveniente de m, mostrar que

$$\sum \frac{1}{a_k} = -\frac{P'(0)}{P(0)}, \qquad \sum \frac{1}{a_k^2} = \left(\frac{P'(0)}{P(0)}\right)^2 - \frac{P''(0)}{P(0)}.$$

11. Sea $f(z)$ una función analítica sobre y en el interior de un contorno C, cerrado y simple, y no igual a cero sobre C. Demostrar aplicando la fórmula (6.7) que si se verifica que $\operatorname{Re} f = 0$ en exactamente $2n$ puntos de C, entonces $f(z)$ tiene a lo sumo n ceros en el interior de C.
12. Consideremos un polinomio $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ en el que $0 < a_0 < a_1 < \cdots < a_n$. Aplicando el Teorema de Enestrom (p. 42) a la función $z^n P(1/z)$, mostrar que la totalidad de los n ceros del polinomio $P(z)$ se encuentran en el disco $|z| < 1$. Deducir en consecuencia del Problema 11 que la ecuación

$$a_0 + a_1 \cos\theta + a_2 \cos 2\theta + \cdots + a_n \cos n\theta = 0$$

tiene al menos $2n$ soluciones distintas en el intervalo $0 \leq \theta < 2\pi$.

* 7. **Fórmulas de Poisson, Hilbert y Bromwich.** Supongamos que la función $f(z)$ sea analítica en todo el semiplano derecho y a lo largo de todo el eje imaginario, y sea C el contorno semicircular que se muestra en la Figura 7-1. Explícitamente, C está formado por el segmento rectilíneo $z = i\omega, -R \leq \omega \leq R$, y por la semicircunferencia C_R dada por

$$z = Re^{i\theta}, \qquad -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2.$$

Si z es un punto del interior de este contorno, la fórmula integral de Cauchy y el teorema integral de Cauchy permiten escribir, respectivamente,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta, \qquad 0 = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta + \bar{z}}\,d\zeta.$$

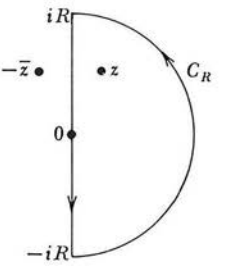


Figura 7-1

La segunda de estas integrales es cero porque el punto $-\bar{z}$ se obtiene tomando el simétrico de z respecto del eje imaginario, y por consiguiente, si z está en el interior de C dicho punto se encuentra en el exterior de C. Multiplicando la segunda integral por una constante α y restándola de la primera se obtiene

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{(1-\alpha)\zeta + (\bar{z} + \alpha z)}{(\zeta - z)(\zeta + \bar{z})} f(\zeta)\, d\zeta. \tag{7.1}$$

Para acotar la integral a lo largo de C_R, llamemos $M(R)$ al máximo de $|f(z)|$ sobre C_R,

$$M(R) = \max|f(Re^{i\theta})|, \qquad -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2.$$

Para un valor dado de z, el numerador de (7.1) es constante cuando $\alpha = 1$, y cuando $\alpha \neq 1$ dicho numerador es del mismo orden de magnitud que R. El denominador es del orden de R^2 y por lo tanto, la fracción considerada tiene el orden $1/R^2$ o $1/R$, en cada uno de estos dos casos, respectivamente. Como la longitud del arco C_R es πR, es suficiente suponer que

$$\lim_{R\to\infty} \frac{M(R)}{R} = 0 \quad (\alpha = 1), \qquad \lim_{R\to\infty} M(R) = 0 \quad (\alpha \neq 1).$$

para poder asegurar que la integral a lo largo de C_R tiende hacia 0 cuando $R \to \infty$. Cuando se verifican dichas hipótesis, la integral para $R \to \infty$ se reduce a una integral sobre el eje imaginario, y haciendo $\zeta = i\omega$ se tiene

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{i\omega(1-\alpha) + \bar{z} + \alpha z}{(z - i\omega)(\bar{z} + i\omega)} f(i\omega)\, d\omega. \tag{7.2}$$

El denominador del integrando es $|z - i\omega|^2$ y lo escribiremos en esta forma en lo sucesivo.

Cuando $\alpha = 1$, el resultado (7.2) adopta la forma

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{|z - i\omega|^2} f(i\omega)\, d\omega, \tag{7.3}$$

llamada *fórmula de Poisson para un semiplano.* Se obtienen otras expresiones de la fórmula de Poisson separando las partes real e imaginaria de la fórmula (7.3). Pongamos, como es habitual,

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

y escribamos también $u(0,y) = u(y), v(0,y) = v(y)$. Entonces

$$f(i\omega) = u(\omega) + iv(\omega),$$

y la fórmula de Poisson da dos ecuaciones reales de la misma estructura,

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{|z - i\omega|^2} u(\omega)\, d\omega, \qquad v(x,y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{|z - i\omega|^2} v(\omega)\, d\omega.$$

Cada una de las dos relaciones anteriores se conoce también con el nombre de fórmula de Poissón para un semiplano. Las hemos deducido aquí suponiendo que $f(z)$ sea analítica cuando $x \geq 0$ y que $M(R)/R \to 0$. Tomando por ejemplo $f(z) = 1$ se verifican dichas hipótesis, obteniéndose

$$1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{|z - i\omega|^2}\, d\omega, \qquad x > 0. \tag{7.4}$$

Supongamos ahora que en lugar de ser $\alpha = 1$ sea $\alpha = -1$. En este caso, la fórmula (7.2) adopta la forma

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i(\omega - y)}{|z - i\omega|^2} f(i\omega)\, d\omega$$

y descomponiéndola en sus partes real e imaginaria se tiene

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y - \omega}{|z - i\omega|^2} v(\omega)\, d\omega, \qquad v(x,y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega - y}{|z - i\omega|^2} u(\omega)\, d\omega.$$

que son las llamadas *fórmulas conjugadas de Poisson.* Las hemos deducido aquí en la hipótesis de que $f(z)$ es analítica para $x \geq 0$ y que $M(R) \to 0$.

Se demostró en la Sección 7 del Capítulo 3 que si se conoce la parte real de una función analítica en la frontera de un dominio acotado dicha función está determinada salvo una constante aditiva, pero no se dio allí ningún método que permitiera resolver este problema. En el caso de que el dominio considerado sea un semiplano, esta dificultad acaba de ser eliminada, pues las fórmulas de Poisson proporcionan un método para calcular explícitamente el valor de $f(z)$ en el dominio $x > 0$ sin más que conocer la parte real o la parte imaginaria de $f(z)$ sobre el eje $x = 0$. No es preciso determinar ninguna constante aditiva en nuestro caso, en vista de la condición $M(R) \to 0$.

Si se supone conocida la función $u(\omega)$ sobre el eje imaginario se podría, en principio, determinar $f(z)$ mediante las fórmulas de Poisson y obtener después $v(\omega)$ como restricción de la componente $\operatorname{Im} f(z)$ a la frontera del semiplano. Surge así de forma natural la cuestión de si es posible determinar $v(\omega)$ directamente a partir de $u(\omega)$ mediante una fórmula en la que no intervenga sino la función u, definida sobre el eje imaginario. La respuesta es afirmativa y conduce a una importante operación conocida con el nombre de transformación de Hilbert.

En efecto, haciendo el cambio $z = iy$ en las fórmulas conjugadas de Poisson el denominador se convierte en $(y - \omega)^2$, y las fórmulas que se obtienen sugieren que

$$u(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(\omega)}{y - \omega}\, d\omega, \qquad v(y) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\omega)}{y - \omega}\, d\omega.$$

Cuando la función u está ligada a la v mediante las relaciones anteriores se dice que es la *transformada de Hilbert* de v. El método que se ha seguido para deducir estas fórmulas no prueba que sean válidas, pero esta comprobación puede hacerse efectuando una pequeña muesca semicircular que excluya al punto $\omega = iy$, como se hizo en la Sección 4. De acuerdo con el Lema 4.1 bastará tomar la mitad del residuo en el punto iy y observar que la integral a lo largo de C_R tiende hacia 0 debido a que $M(R) \to 0$. Los cálculos necesarios para todo ello no son difíciles y se dejan como ejercicio para el lector.

La importancia de la transformación de Hilbert proviene no tanto de su relación con la fórmula de Cauchy, que hemos esbozado aquí, sino de que ha permitido resolver notables problemas de la teoría de series de Fourier y el análisis armónico. Esta transformación sirve también de fundamento de ciertas relaciones de gran interés en la teoría de circuitos eléctricos, llamadas ecuaciones de Bode. Por lo general, la función respuesta de una red eléctrica puede expresarse mediante una función racional que posee un cero en ∞ y cuyos polos están todos contenidos en semiplano izquierdo. Una función de esta clase satisface todas las hipótesis de la discusión anterior, y la relación establecida por la transformación de Hilbert entre $u(\omega)$ y $v(\omega)$ representa una fuerte restricción acerca del tipo de respuesta que es factible obtener.

No sólo los valores $\alpha = 1$ y $\alpha = -1$ poseen interés técnico. Al hacer $\alpha = 0$ se obtiene una fórmula de inversión para la transformación de Laplace que estudiaremos a continuación.

Haciendo en (7.2) $\alpha = 0$ se tiene

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(i\omega)}{z - i\omega}\, d\omega.$$

Al objeto de utilizar la notación habitual al operar con transformadas escribiremos F en lugar de f y s en lugar de z. Así pues

$$F(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(i\omega)}{s - i\omega}\, d\omega. \tag{7.5}$$

Esta fórmula se dedujo en la hipótesis de que $F(s)$ sea analítica cuando $\mathrm{Re}\, s \geq 0$ y de que F verificara la condición $M(R) \to 0$

Si $f(t)$ es una función dada, continua a trozos, su *transformada de Laplace* se define por

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt \equiv \mathbf{L}f.$$

Si se cumple

$$|f(t)| \leq Ae^{at}, \qquad A, a \text{ constante} \tag{7.6}$$

no es difícil demostrar que la función $F(s)$ es analítica en el semiplano $\mathrm{Re}\, s > a$; la demostración se apoya en resultados sobre convergencia uniforme que se dan en el Capítulo 6.

Es de gran importancia para las aplicaciones la determinación de la función $f(t)$ conocida su transformada $F(s)$; esto es, dada F se pide hallar f de tal manera que $\mathbf{L}f = F$. Como mostraremos ahora, este problema puede resolverse frecuentemente mediante la fórmula

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} F(i\omega)\, d\omega. \tag{7.7}$$

Si $f(t)$ es la función dada por (7.7), su transformada de Laplace es

$$\mathbf{L}f = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left(e^{-st} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} F(i\omega)\, d\omega \right) dt$$

supuestas existentes todas las integrales. Una condición suficiente para que dichas integrales existan es que $\mathrm{Re}\, s > 0$ y que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(i\omega)|\, d\omega$$

converja. En este caso la integral es absolutamente convergente, y como ya se sabe de Análisis real, puede permutarse el orden de integración. Así pues,

$$\mathbf{L}f = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^{\infty} e^{(i\omega-s)t}\,dt\right)F(i\omega)\,d\omega. \tag{7.8}$$

Cuando $\operatorname{Re} s > 0$ la integral entre paréntesis es

$$\int_0^{\infty} e^{(i\omega-s)t}\,dt = \lim_{R\to\infty}\frac{e^{(i\omega-s)t}}{i\omega - s}\Bigg|_0^R = \frac{1}{s - i\omega}$$

y por consiguiente (7.8) coincide con el segundo miembro de (7.5). Si *F(s)* verifica condiciones suficientes como para que se cumpla (7.5) podemos concluir que $\mathbf{L}f = F$.
En el análisis realizado se exige la condición (7.6) con $a < 0$ para poder afirmar que *F(s)* es analítica cuando $\operatorname{Re} s \geq 0$. A fin de estudiar también el caso $a \geq 0$, sea $c > a$ y consideremos la función $e^{-ct}f(t)$. Esta función satisface las condiciones (7.6) con exponente negativo, y su transformada de Laplace es

$$\int_0^{\infty} e^{-st}e^{-ct}f(t)\,dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+c)t}f(t)\,dt.$$

Es decir, $\mathbf{L}[e^{-ct}f(t)] = F(s + c)$. Si el análisis anterior es aplicable a $e^{-ct}f(t)$ y a $F(s + c)$, la fórmula (7.7) adopta la forma

$$e^{-ct}f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}F(c + i\omega)\,d\omega.$$

Pasando al segundo miembro el factor e^{-ct} se tiene

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{(c+i\omega)t}F(c + i\omega)\,d\omega$$

que suele escribirse en la forma

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st}F(s)\,ds. \tag{7.9}$$

La fórmula (7.9) es la llamada *integral de Bromwich* para la inversión de la transformación de Laplace. Esta fórmula es aplicable en todo punto de continuidad *f(t)* supuesto que *f(t)* sea continua a trozos y que se verifique (7.6) con $a < c$. Sin embargo, dicha fórmula no se ha establecido aquí con tanta generalidad.

Ejemplo 7.1. Supongamos que $u(\omega)$ sea continua a trozos en el intervalo $-R \leq \omega \leq R$ e igual a 0 para $|\omega| > R$. Demostrar que la fórmula de Poisson y las fórmulas conjugadas de Poisson definen funciones armónicas cuando $x \neq 0$. Obsérvese que no se supone que $u(\omega)$ sea analítica.

Como $u(\omega) = 0$ para $|\omega| > R$, las fórmulas en cuestión son

$$\frac{1}{\pi}\int_{-R}^{R} \frac{x}{|z - i\omega|^2} u(\omega)\, d\omega, \qquad \frac{1}{\pi}\int_{-R}^{R} \frac{\omega - y}{|z - i\omega|^2} u(\omega)\, d\omega.$$

Denotando la primera de estas expresiones mediante $u(x,y)$ y la segunda por $v(x,y)$ se tiene

$$u(x,y) + iv(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-R}^{R} \frac{x + i(\omega - y)}{|z - i\omega|^2} u(\omega)\, d\omega. \tag{7.10}$$

El numerador del integrando es $\bar{z} + i\omega$, y el denominador, $(z - i\omega)(\bar{z} + i\omega)$. Así pues,

$$u(x,y) + iv(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-R}^{R} \frac{u(\omega)}{z - i\omega}\, d\omega.$$

Efectuando un razonamiento virtualmente idéntico al realizado en la Sección 5 del Capítulo 3, la función (7.10) es una función analítica de z cuando $x \neq 0$. Por lo tanto, sus partes real e imaginaria son funciones armónicas.

Ejemplo 7.2. Hallar una función armónica en el semiplano $x > 0$ y tal que sobre el eje imaginario tome los valores π y 0 para $|y| < R$ y $|y| > R$, respectivamente.

Tomando $u(\omega) = \pi$ en (7.10) y eligiendo una rama conveniente del logaritmo se tiene

$$\int_{-R}^{R} \frac{d\omega}{z - i\omega} = \frac{\log(z - i\omega)}{-i}\bigg|_{-R}^{R} = i \log \frac{z - iR}{z + iR}$$

cuya parte real es

$$u(x,y) = \operatorname{Arg}(z + iR) - \operatorname{Arg}(z - iR)$$

Esta función es armónica cuando $x > 0$ en virtud del resultado del Ejemplo 7.1. Desde el punto de vista geométrico $u(x,y)$ representa el ángulo bajo el cual se ve desde el punto z el segmento $-R \leq y \leq R$ como se muestra en la Figura 7-2; por consiguiente, las relaciones $u(0,y) = \pi$ y $u(0,y) = 0$ para $|y| < R$ y $|y| > R$, respectivamente, son de comprobación evidente.

No es casualidad que sobre el eje imaginario las funciones $u(x,y)$ y $u(y)$ coincidan. Se muestra en los Problemas 6-9 que así ocurre en todo punto de continuidad de $u(y)$, supuesto que $u(y)$ sea continua a trozos y que

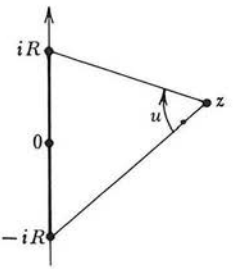


Figura 7-2

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|u(\omega)|}{1+\omega^2}\, d\omega \text{ converja.} \tag{7.11}$$

En las mismas condiciones, la función $u(x,y)$ es armónica en la región $x > 0$. La demostración depende de resultados sobre convergencia uniforme que se dan en el Capítulo 6.

El problema consistente en determinar una función armónica que tome en la frontera de un dominio valores prefijados se conoce con el nombre de *problema de Dirichlet*, y posee gran importancia tanto en la Matemática pura como en la aplicada. A la vista de lo que se ha expuesto hasta aquí, puede decirse que la *fórmula de Poisson resuelve el problema de Dirichlet para un semiplano.* En el capítulo siguiente se hace un estudio más amplio del problema de Dirichlet.

Problemas.

1. Aplicar a la función e^{-z} la fórmula de Poisson, y mostrar que

$$e^{-x}\cos y = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos\omega}{x^2+(y-\omega)^2}\, d\omega, \qquad e^{-x}\operatorname{sen} y = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\operatorname{sen}\omega}{x^2+(y-\omega)^2}\, d\omega.$$

2. Siendo $a > 0$, aplicar la transformación de Hilbert a $1/(z+a)$ y obtener que

$$\frac{\pi a}{a^2+y^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega\, d\omega}{(\omega^2+a^2)(\omega-y)}, \qquad \frac{\pi y}{a^2+y^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a\, d\omega}{(\omega^2+a^2)(y-\omega)}.$$

3. (a) Obtener mediante la integral de Poisson una función $u(x,y)$ que sea armónica para $x > 0$ y que tome sobre los semiejes positivo y negativo del eje imaginario los valores 0 y 2π, respectivamente. (b) Comprobar que la función obtenida tiene efectivamente dichas propiedades.

4. Aplicando la integral de Bromwich con $c > 0$, hallar funciones cuyas transformadas de Laplace sean

$$\frac{a}{s^2 + a^2}, \quad \frac{a}{s(s^2 + a^2)}, \quad \frac{1}{(s + a)^2}, \quad \frac{1}{s^8}, \quad \frac{s}{s^2 + a^2}.$$

(Se considera la integral sobre un segmento $z = c + i\omega$, $-R_0 \leq \omega \leq R_0$, y se cierra este contorno mediante un arco semicircular $|z| = R$ situado a la izquierda de la recta $x = c$.)

5. (a), (b). *Repaso.* Obtener los resultados de los Problemas 1 y 2 calculando directamente las integrales.

*** Comportamiento de la integral de Poisson cerca de la frontera.**

En los problemas siguientes se supone que la función $u(\omega)$ es continua a trozos, que $u(x,y)$ viene dada por la fórmula de Poisson y que (7.11) converge. En virtud de los problemas que van al final de la Sección 4, la integral de Poisson es convergente para $x > 0$. Supondremos aquí que este hecho ya ha sido establecido.

6. Obtener, aplicando (7.4), que

$$u(x,y) - u(y) = \frac{x}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\omega) - u(y)}{x^2 + (y - \omega)^2} d\omega.$$

7. Si y es un punto de continuidad de $u(\omega)$, dado cualquier $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|u(\omega) - u(y)| \leq \epsilon$ para $|\omega - y| \leq \delta$. Elegido y de esta forma, llamemos

$$J_1 = \frac{x}{\pi} \int_{y-\delta}^{y+\delta} \frac{u(\omega) - u(y)}{x^2 + (y - \omega)^2} d\omega.$$

Deducir de (7.4) que

$$|J_1| \leq \frac{x}{\pi} \int_{y-\delta}^{y+\delta} \frac{\epsilon}{x^2 + (y - \omega)^2} d\omega \leq \frac{x}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon}{x^2 + (y - \omega)^2} = \epsilon.$$

8. Siendo $|y - \omega| \geq \delta$, demostrar que existe una constante positiva η, que depende tan sólo de δ y de y, tal que $(\omega - y)^2/(1 + \omega^2) \geq \eta$, $-\infty < \omega < \infty$.
9. En virtud del problema anterior, en las integrales sobre $(-\infty, y - \delta)$ y $(y + \delta, \infty)$ del Problema 6 se verifica $x^2 + (y - \omega)^2 \geq \eta(1 + \omega^2)$. Respresentando mediante J_2 la suma de aquéllas dos integrales, deducir que

$$|J_2| \leq \frac{x}{\pi} \int_{|y-\omega|>\delta} \frac{|u(\omega)| + |u(y)|}{\eta(1 + \omega^2)} d\omega \leq \frac{x}{\pi\eta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|u(\omega)| + |u(y)|}{1 + \omega^2} d\omega,$$

y, por consiguiente, si x es pequeño, $|J_2| < \epsilon$. Por lo tanto, $|u(x,y) - u(y)| = |J_1 + J_2| < 2\epsilon$, lo que da

$$\lim_{x \to 0+} u(x,y) = u(y).$$

* 8. **Residuo en el punto del infinito.** Supongamos que la función $f(z)$ tenga un punto singular aislado en el punto $z = \infty$. Se define el *residuo en el infinito* de esta función mediante

$$\operatorname{Res} f(\infty) = -\frac{1}{2\pi i} \int_C f(z)\, dz \tag{8.1}$$

siendo C una circunferencia cualquiera, $|z| = R$, lo bastante grande como para que la única singularidad de f en la región $|z| \geq R$ sea la del punto $z = \infty$. La aparición del signo menos se debe a que el punto $z = \infty$, en el cual se está calculando el residuo, es exterior a la circunferencia, y la circunferencia está orientada negativamente respecto de su exterior.

El residuo en ∞ puede definirse también como $-a_1$, siendo a_1 el coeficiente de $1/z$ en el desarrollo de Laurent de $f(z)$ en el punto del ∞. Así pues, $-\operatorname{Res} f(\infty)$ es el coeficiente de ζ en el desarrollo de $f(1/\zeta)$ en torno al origen, y también es el coeficiente de $1/\zeta$ en el desarrollo de

$$F(\zeta) = \frac{1}{\zeta^2} f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$$

en torno de 0. Se sigue de aquí que $\operatorname{Res} f(\infty) = -\operatorname{Res} F(0)$. Haciendo el cambio de variable $z = 1/\zeta$ se ve que

$$\int_{|\zeta| = 1/R} f\left(\frac{1}{\zeta}\right) \frac{d\zeta}{\zeta^2} = \int_{|z| = R} f(z)\, dz$$

y por lo tanto, la integral que aparece en (8.1) coincide con la integral que define $\operatorname{Res} F(0)$. Las dos definiciones de $\operatorname{Res} f(\infty)$ resultan así ser compatibles, y el valor de la integral de (8.1) es independiente de R.

Las fórmulas ya conocidas para $\operatorname{Res} F(0)$ se traducen en otras análogas para $\operatorname{Res} f(\infty)$. A modo de ilustración, si F tiene un polo simple en $\zeta = 0$, $-\operatorname{Res} F(0) = -\lim_{\zeta \to 0} \zeta F(\zeta)$, y por lo tanto,

$$\operatorname{Res} f(\infty) = -\lim_{z \to \infty} z f(z), \qquad \text{si } f(\infty) = 0. \tag{8.2}$$

El mismo resultado se obtiene examinando el desarrollo en serie de Laurent, pues la condición $f(\infty) = 0$ significa que $a_n = 0$ para todo $n \geq 0$. Entonces,

$$zf(z) = a_{-1} + \frac{a_{-2}}{z} + \frac{a_{-3}}{z^2} + \cdots$$

y por tanto, $zf(z) \to a_{-1}$ cuando $z \to \infty$.

Posee un gran interés el hecho de que *la suma de todos los residuos de una función racional en el plano complejo ampliado es 0.* Esta propiedad no es sino un caso particular del siguiente:

TEOREMA 8.1. Supongamos que la función f(z) tenga en el plano ampliado $|z| \leq \infty$ *tan sólo un número finito de singularidades (que forzosamente serán aisladas). Entonces la suma de todos los residuos de la función es igual a 0.*

Demostración. Sea C una circunferencia $|z| = R$, lo bastante grande como para contener a todas las singularidades finitas[1] de f, y consideremos la integral

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z)\, dz.$$

Por el teorema de los residuos, I es igual a la suma de todos los residuos correspondientes a puntos contenidos en $|z| < \infty$, y por la definición de residuo en el infinito, también es igual a $-\text{Res} f(\infty)$. Como se quería demostrar.

En las integrales que se estudiaron en las Secciones 3 y 7, el límite de la integral a lo largo del contorno semicircular C_R era igual a 0. En otras ocasiones, el límite de la integral a lo largo de C_R existe, pero es distinto de 0. En bastantes de tales casos este límite puede determinarse aplicando el siguiente lema.

LEMA 8.1. *Supongamos que f(z) sea regular en el punto* $z = \infty$ *y que verifique* $f(\infty) = 0$. *Sea* C_R *el contorno semicircular* $z = Re^{i\theta}, \theta_0 \leq \theta \leq \pi + \theta_0$. *Entonces*

$$\lim_{R \to \infty} \int_{C_R} f(z)\, dz = -\pi i \,\text{Res} f(\infty).$$

Si C_R fuese la totalidad de la circunferencia $|z| = R$, el límite anterior sería $-2\pi i \text{Res} f(\infty)$. El Lema indica que al integrar sobre la semicircunferencia se obtiene la mitad de este resultado, supuesto que $R \to \infty$ y $f(\infty) = 0$. La demostración del Lema 8.1 se efectúa aplicando el Lema 4.1 a $F(\zeta)$ con $\phi = \pi$.

Ejemplo 8.1. Demostrar que, como valor principal de Cauchy, es

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{5x^3}{1 + x + x^2 + x^3 + x^4}\, dx = -2\pi\left(\text{sen}\frac{\pi}{5} + \text{sen}\frac{2\pi}{5}\right).$$

[1] El término "singularidad finita" no quiere decir que $f(z)$ sea finita, sino que el punto singular considerado se encuentra en el plano finito $|z| < \infty$.

Consideremos

$$I = \int_C \frac{5z^3}{1 + z + z^2 + z^3 + z^4}\, dz.$$

siendo C el mismo contorno que se utilizó en la Sección 3. Multiplicando el numerador y el denominador del integrando por $z - 1$ éste se convierte en

$$f(z) = \frac{5z^3(z - 1)}{z^5 - 1}.$$

Todos los ceros del denominador en el semiplano superior son simples, y corresponden a los puntos

$$\omega_1 = e^{2\pi i/5}, \qquad \omega_2 = e^{4\pi i/5}.$$

Los residuos asociados a estos puntos son los valores que toma la fracción

$$\frac{5z^3(z - 1)}{5z^4} = 1 - \frac{1}{z}$$

en los puntos ω_1 y ω_2; el residuo en el infinito es

$$-\lim_{z\to\infty} \frac{5z^4(z - 1)}{z^5 - 1} = -\lim_{z\to\infty} \frac{5(1 - z^{-4})}{1 - z^{-5}} = -5.$$

Por el teorema de los residuos

$$I = \int_{-R}^{R} f(x)\, dx + \int_{C_R} f(z)\, dz = 2\pi i\left(1 - \frac{1}{\omega_1} + 1 - \frac{1}{\omega_2}\right).$$

Haciendo tender $R \to \infty$ y aplicando el Lema 8.1, habida cuenta de que $\operatorname{Res} f(\infty) = -5$, se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx + 5\pi i = 2\pi i(2 - e^{-2\pi i/5} - e^{-4\pi i/5}).$$

El resultado pedido se obtiene ahora sin más que igualar las partes reales de ambos miembros.

A modo de comprobación podemos observar que al igualar las partes imaginarias se obtiene

$$1 + 2\cos\frac{2\pi}{5} = 2\cos\frac{\pi}{5}$$

igualdad que es válida, pues la suma de todas las raíces la ecuación $z^5 - 1 = 0$ es 0.

Algunas clases importantes de funciones poseen puntos de ramificación en el plano propio $|z| < \infty$, pero tan sólo una singularidad aislada en $z = \infty$. El siguiente teorema es un instrumento de gran utilidad para el estudio de las funciones de esta clase:

TEOREMA 8.2. *Sea C un contorno de Jordan orientado en sentido horario, esto es, orientado positivamente con respecto a su dominio exterior. Supongamos que f(z) sea analítica sobre C y en el dominio exterior a C, excepto posiblemente en un número finito de singularidades aisladas* α_i. *Entonces*

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum \operatorname{Res} f(\alpha_i)$$

incluyéndose en la suma el término $\operatorname{Res} f(\infty)$.

Idea de la demostración. Sean z_0 un punto cualquiera del dominio interior a C, y sea K una circunferencia $|z| = R$ lo bastante grande como para contener en su interior a C y a todas las singularidades finitas α_i. Consideremos dos semirrectas de origen en z_0 que no pasen por ninguno de los puntos α_i, y llamemos P_1, P_2 a los puntos de intersección de dichas semirrectas con la circunferencia K. Tracemos desde cada P_i un segmento rectilíneo en dirección a z_0 que detendremos en el primer punto donde el segmento corte al contorno C, como se ilustra en la Figura 8-1. Se obtienen de esta forma dos contornos, C_1 y C_2, que no pasan por ninguno de los puntos α_i, y tales que

$$\int_C f(z)\,dz + \int_K f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz. \tag{8.3}$$

Aplicando el teorema de los residuos a cada una de las dos integrales del segundo miembro de (8.3) vemos que la suma de estas dos integrales es

$$2\pi i \sum \operatorname{Res} f(\alpha_i)$$

estando extendida la suma a la totalidad de las singularidades finitas α_i. Como por definición la integral a lo largo de K es $-2\pi i \operatorname{Res} f(\infty)$ la conclusión pedida es equivalente a (8.3).

Para aplicar el Teorema 8.2 es necesario elegir en el entorno de ∞ una rama uniforme de la función considerada. Se estudia a continuación el procedimiento a seguir, que para mayor claridad efectuaremos sobre la función

$$\sqrt{1-z^2}.$$

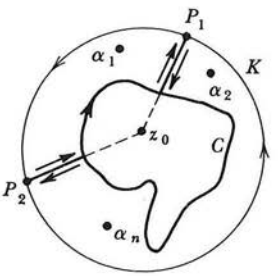


Figura 8-1

(Se pueden estudiar otros casos de forma parecida.) La región en la que nos proponemos determinar una rama uniforme de esta función es la que se obtendría al suprimir del plano $|z| < \infty$ el segmento $-1 \leq x \leq 1$ del eje real; llamaremos a esta región *plano cortado.* Elegimos la rama que es positiva sobre el eje imaginario positivo, así que

$$\sqrt{1+y^2} > 0 \qquad \text{para } y > 0. \quad (8.4)$$

Por lo tanto, la rama seleccionada es positiva sobre el borde superior del corte.

Si $z \neq 1$

$$\sqrt{1-z^2} = -iz\sqrt{1-1/z^2} \quad (8.5)$$

El signo menos viene impuesto por la necesidad de seguir utilizando la rama elegida en (8.4). Por el teorema del binomio,

$$\sqrt{1-\zeta} = 1 - c_1\zeta - c_2\zeta^2 - \cdots - c_n\zeta^n - \cdots, \qquad |\zeta| < 1 \quad (8.6)$$

siendo $-c_n$ el n-ésimo coeficiente binomial para exponente $\frac{1}{2}$. Ahora nos serviremos del desarrollo de esta rama haciendo en (8.5) el cambio de variable $\zeta = 1/z^2$. Como (8.6) es analítica para $|\zeta| < 1$, la función (8.5) es analítica para $|z| > 1$, y por tanto, la singularidad en el ∞ es aislada.

Puede hallarse fácilmente una rama de nuestra función que esté definida en el semiplano superior y sea positiva sobre el eje y, y otra en el semiplano inferior que sea negativa sobre el eje y. (Esta última condición viene impuesta por (8.5).) Como las tres regiones

$$|z| > 1, \qquad \text{Im } z > 0, \qquad \text{Im } z < 0,$$

se solapan, la construcción anterior nos proporciona una rama uniforme en todo el plano cortado.

La construcción de una rama en el entorno del ∞ se puede efectuar también por métodos geométricos. Consideremos, en lugar de (.5), la función

$$\sqrt{z^2 - 1} = \sqrt{(z + 1)(z - 1)}.$$

que es el resultado de multiplicar por i la función (8.5). El cambio de signo se hace con el objeto de conseguir que la función se comporte de forma parecida a $\sqrt{z^2} = z$ en las proximidades del ∞, igualdad que nos servirá para elegir la rama en el ∞. Si se define

$$\alpha = \arg(z - 1), \qquad \beta = \arg(z + 1)$$

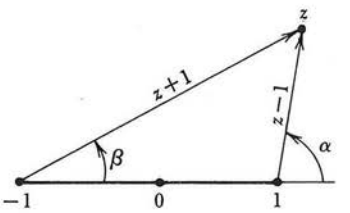


Figura 8-2

estos ángulos toman, entre otros valores, los representados geométricamente en la Figura 8-2. Si se suprime el segmento desde -1 hasta 1, los valores de α y de β habrán de variar en el mismo múltiplo de 2π cuando z recorra una curva cerrada cualquiera. Por consiguiente,

$$\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)$$

varía en un múltiplo de 2π, y $\sqrt{z^2 - 1}$ vuelve a tomar su valor inicial.

Suele ser ventajoso utilizar los métodos geométrico y analítico conjuntamente. El método geométrico ayuda a comprender el comportamiento cualitativo de la rama elegida, mientras que el analítico permite calcular $\operatorname{Res} f(\infty)$.

Ejemplo 8.2. Tomando la rama positiva de la raíz cuadrada, demostrar que

$$\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1 - x^2}}{1 + x^2}\, dx = \pi(\sqrt{2} - 1).$$

Consideremos para ello

$$I = \int_C \frac{\sqrt{1 - z^2}}{1 + z^2}\, dz$$

siendo C el contorno que se muestra en la Figura 8-3 y siendo $\sqrt{1 - z^2}$ la función que se ha estudiado en el ejemplo anterior. Dado que el integrando toma signos opuestos en los bordes superior e inferior del corte y que estos bordes se recorren en sentidos opuestos,

$$I = 2 \int_{-1+\epsilon}^{1-\eta} \frac{\sqrt{1 - x^2}}{1 + x^2}\, dx + J_1 + J_2 \tag{8.7}$$

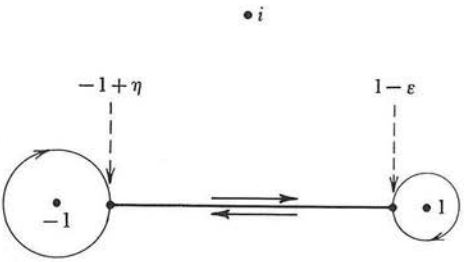


Figura 8-3

donde J_1 y J_2 son las integrales a lo largo de los dos circuitos de radios ϵ y η, respectivamente. Calculando el valor de $\sqrt{1 - z^2}/2z$ en i y en $-i$, vemos que los residuos en i y en $-i$ son, respectivamente,

$$\frac{\sqrt{2}}{2i} \qquad \text{y} \qquad \frac{-\sqrt{2}}{-2i}$$

Teniendo en cuenta (8.5), el residuo en el ∞ resulta ser

$$-\lim_{z \to \infty} z \frac{-iz}{1 + z^2} \sqrt{1 - 1/z^2} = i.$$

Así pues, por el Teorema 8.2,

$$I = 2\pi i \left(\frac{\sqrt{2}}{2i} + \frac{\sqrt{2}}{2i} + i \right) = 2\pi(\sqrt{2} - 1). \tag{8.8}$$

Se comprueba fácilmente que $J_i \to 0$ cuando $\epsilon \to 0$ y $\eta \to 0$, de (8.7) y (8.8) se deduce inmediatamente el resultado pedido.

Ejemplo 8.3. Tomando la rama positiva de la raíz cuadrada, demostrar que

$$\int_0^1 x^{n-2}\sqrt{x(1-x)}\,dx = \pi c_n, \qquad n = 2, 3, 4, \ldots,$$

Figura 8-4

donde c_n son los mismos coeficientes binomiales que en (8.6). Por el teorema del binomio,

$$c_n = \frac{1}{2n}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n-2)}$$

aunque esta fórmula no será necesaria para la demostración.

Consideremos la integral

$$I = \int_C z^{n-2}\sqrt{z(1-z)}\,dz$$

en la que C es el contorno que se muestra en la Figura 8-4 y $\sqrt{z(1-z)}$ denota la rama uniforme de la raíz que está definida en el plano cortado desde 0 hasta 1 a lo largo del eje real y que es positiva sobre el borde superior del corte. Rodeando el punto $z = 0$ a lo largo de un circuito se ve que $\sqrt{z}$ es negativa sobre el borde inferior del corte, y que sus valores a lo largo del semieje real negativo son múltiplos positivos de i. Esta última propiedad nos muestra que para valores grandes de $|z|$ la fórmula que conviene tomar es

$$\sqrt{z(1-z)} = -iz\sqrt{1-1/z},$$

viniendo dado el radical por la fórmula (8.6) para $\zeta = 1/z$. Así pues, el integrando puede escribirse

$$z^{n-2}\sqrt{z(1-z)} = -iz^{n-1}\left(1 - \frac{c_1}{z} - \cdots - \frac{c_n}{z^n} - \cdots\right)$$

y examinando este desarrollo se ve que coeficiente de $1/z$ es ic_n. El residuo en el punto ∞ es $-ic_n$, y puesto que no hay singularidades finitas, $I = 2\pi c_n$. El resto de la demostración es parecida a la del Ejemplo 8.2.

Problemas

1. Definamos $f(z) = 1/z$ para $0 < |z| < \infty$ y $f(\infty) = 0$. Demostrar que $f(z)$ es analítica en $z = \infty$ y que sin embargo, $\operatorname{Res} f(\infty) = -1$.
2. Hallar el residuo en el infinito de las siguientes funciones ∞:

$$\frac{z^3}{z^4 - 1}, \quad \left(z + \frac{2}{z}\right)^4, \quad \frac{e^z}{z}, \quad \left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right)\operatorname{sen} z.$$

3. Sea $P(z)$ un polinomio de grado $n \geq 1$ y llamemos $f(z) = P'(z)/P(z)$. Demostrar, aplicando (8.2), que $-\operatorname{Res} f(\infty) = n$ y deducir así el teorema fundamental del Algebra a partir del Teorema 8.1.
4. Demostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x}{1 + x + x^2}\, dx = -\frac{2\pi}{\sqrt{3}}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3}{(x^2 + 1)(x^2 + 2x + 2)}\, dx = -\frac{4\pi}{5}.$$

5. Deducir los resultados de los Ejemplos 8.2 y 8.3 considerando para ello las integrales

$$\int_C \sqrt{z^2 - 1}\, dz \qquad \text{y} \qquad \int_C z^{n-2}\sqrt{z(z - 1)}\, dz.$$

(La construcción geométrica de la Figura 8-2 muestra que

$$\sqrt{x^2 - 1} = i\sqrt{1 - x^2} \qquad \text{o} \qquad \sqrt{x^2 - 1} = -i\sqrt{1 - x^2}$$

sobre los bordes superior e inferior del corte, respectivamente. Para $\sqrt{1 - x^2}$ debe tomarse la rama positiva de la raíz.)

6. Calcular el valor de

$$\int_0^1 \frac{x^2\, dx}{(1 + x^2)\sqrt{1 - x^2}}, \quad \int_0^1 \frac{x^4\, dx}{\sqrt{x(1 - x)}}, \quad \int_0^1 \frac{x^4\, dx}{(1 + x^2)\sqrt{1 - x^2}}.$$

7. La función $f(z) = \sqrt[3]{z^2(1-z)}$ tiene una rama uniforme en el plano cortado desde $x = 0$ hasta $x = 1$, pues cuando z recorre un circuito alrededor del corte, $\operatorname{Arg}[z^2(1-z)]$ aumenta en 6π. Denotemos mediante $f(z)$ la rama que es positiva sobre el borde superior del corte. Describiendo un circuito alrededor del punto $z = 1$ en sentido negativo se observa que $\arg(1-z)$ disminuye en 2π. Se concluye que si $f(z)$ es el valor de la rama en el borde superior del corte, el valor en el borde inferior habrá de ser $f(x) = \exp(-2\pi i/3)$. Deducir de forma parecida que $f(x)$ es de la forma $g(x) = \exp(2\pi i/3)$ cuando $x < 0$, y siendo $g(x) > 0$. Así pues, para valores grandes de $|z|$

$$f(z) = -z(1 - 1/z)^{1/3} e^{2\pi i/3}.$$

Aplicando ahora todos los resultados anteriores, demostrar que

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}} = 2\pi \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \int_0^1 \sqrt[3]{x^2(1-x)}\, dx = 2\pi \frac{\sqrt{3}}{27}.$$

8. *Repaso.* Repetir el Ejemplo 8.3 haciendo el cambio de variable $x = \operatorname{sen}^2\theta$ y aplicando el método de la Sección 2.
9. Supongamos que en el análisis de la Sección 7 la función $f(z)$ tiene una singularidad aislada en ∞, y que las condiciones relativas a $M(R)$ se sustituyen por otras más débiles,

$$\lim_{\zeta\to\infty} \frac{f(\zeta)}{\zeta^2} = 0 \quad (\alpha = 1), \qquad \lim_{\zeta\to\infty} \frac{f(\zeta)}{\zeta} = 0 \quad (\alpha \neq 1).$$

¿Qué modificaciones deberán sufrir entonces las fórmulas de la Sección 7? (Si se denota por $F(\zeta)$ el integrando de la fórmula (7.1), se comprueba fácilmente que $\operatorname{Res} F(\infty)$ es

$$-(z + \bar{z}) \lim_{\zeta\to\infty} \frac{f(\zeta)}{\zeta} \qquad \text{o} \qquad (1-\alpha) \lim_{\zeta\to\infty} f(\zeta)$$

para $\alpha = 1$ o $\alpha \neq 1$, respectivamente. Aplíquese el Lema 8.1.)

* **9. Otras formas del teorema de los residuos.** Daremos ahora una versión del teorema de los residuos en la que el índice o número de vueltas juega un importante papel y que constituye una interesante herramienta para el estudio de las funciones multiformes. Como recordará el lector, se define el número de vueltas como

$$N(C,\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{dz}{z-\alpha} = \frac{1}{2\pi i} \log(z-\alpha)\Big|_C = \frac{\theta}{2\pi}\Big|_C$$

siendo C un contorno cerrado cualquiera que no pase por el punto α. Desde el punto de vista geométrico $N(C,\alpha)$ representa el número de veces que C rodea al punto α, y con frecuencia, su valor puede ser determinado inspeccionando el problema.

LEMA 9.1. *Supongamos que $f(z)$ tenga una singularidad aislada en el punto $z=\alpha$ y que su parte singular sea*

$$f_1(z) = \frac{a_{-1}}{z-\alpha} + \frac{a_{-2}}{(z-\alpha)^2} + \cdots + \frac{a_{-n}}{(z-\alpha)^n} + \cdots$$

y sea C un contorno cerrado arbitrario que no pase por el punto α. Entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f_1(z)\,dz = a_{-1}N(C,\alpha).$$

Demostración. Escribamos $f_1(z)$ en la forma

$$f_1(z) = \frac{a_{-1}}{z-\alpha} + s_n(z) + r_n(z) \tag{9.1}$$

siendo

$$s_n(z) = \frac{a_{-2}}{(z-\alpha)^2} + \cdots + \frac{a_{-n}}{(z-\alpha)^n}$$

y quedando $r_n(z)$ definida por la igualdad (9.1). Evidentemente, $s_n(z)$ es la derivada de la función uniforme

$$F(z) = -\frac{a_{-2}}{z-\alpha} - \cdots - \frac{a_{-n}}{(n-1)(z-\alpha)^{n-1}}$$

y en virtud de (2.1) su integral es 0. Así pues, al integrar (9.1) se tiene

$$\int_C f_1(z)\,dz = a_{-1}\int_C \frac{dz}{z-\alpha} + \int_C r_n(z)\,dz. \tag{9.2}$$

Sea ϵ un número positivo arbitrario. Por los teoremas de convergencia uniforme establecidos en la Sección 6 del Capítulo 3, podemos asegurar que a partir de un n suficientemente grande se verifica $|r_n(z)| < \epsilon$ sobre el contorno C. En este caso, (9.2) da

$$\left|\int_C f_1(z)\,dz - a_{-1}\int_C \frac{dz}{z-\alpha}\right| \leq \epsilon L \tag{9.3}$$

donde L representa la longitud de C. El primer miembro de la acotación es independiente de ϵ, y como ϵ puede ser tan pequeño como se desee, ha de ser 0; lo que demuestra el Lema.

TEOREMA 9.1. *Sea $f(z)$ una función analítica en un dominio D, simplemente conexo, excepto en un número finito de puntos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ en los que $f(z)$ tiene singularidades aisladas. Sea C un contorno cerrado contenido en D que no pase por ninguno de los puntos α_j. Entonces*

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum N(C,\alpha_j)\,\mathrm{Res} f(\alpha_j).$$

Este teorema se deduce del Lema 9.1 del mismo modo que el Teorema 2.1 sigue del Lema 2.1.

Ilustremos el uso del Teorema 9.1. Sea

$$w = \int_0^z \frac{d\zeta}{1+\zeta^2} \tag{9.4}$$

donde la integral se toma a lo largo de un contorno C_1 que no pasa por los puntos i ni $-i$. Sea C_2 otro contorno de este tipo (Figura 9-1). Si se recorre C_1 desde 0 hasta z en un sentido y a continuación, C_2 en el sentido opuesto se obtiene el contorno cerrado $C = C_1 - C_2$. En virtud del Teorema 9.1,

$$\int_C \frac{d\zeta}{1+\zeta^2} = \pi N(C,i) - \pi N(C,-i),$$

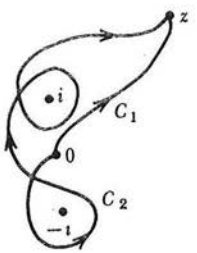


Figura 9-1

pues los residuos en los puntos i y $-i$ son $1/(2i)$ y $1/(-2i)$, respectivamente. En consecuencia

$$\int_{C_1} \frac{d\zeta}{1+\zeta^2} = \int_{C_2} \frac{d\zeta}{1+\zeta^2} + N\pi$$

siendo N un número entero. Esta igualdad muestra que los posibles valores que en (9.4) tome w difieren entre sí en un múltiplo de π. En realidad, $w = \arctan z$ y el resultado anterior concuerda con el conocido hecho de que su función inversa, $z = \tan w$ tiene período π.

Se pueden hacer observaciones parecidas para otras integrales. Si se define w por

$$w = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\, d\zeta \tag{9.5}$$

entonces w depende no sólo de z sino también del camino de integración. El Teorema 9.1 muestra que todos los posibles valores de w se obtienen sumándole a uno de ellos una expresión de la forma

$$2\pi i(N_1R_1 + N_2R_2 + \cdots + N_kR_k) \tag{9.6}$$

donde los N_j son números enteros y los R_j son los residuos de la función en los puntos singulares. Los números $2\pi iR_j$ suelen llamarse *períodos*, pero en realidad no son períodos de la función definida por la integral (9.5), sino de su inversa.

En líneas generales, el mismo procedimiento es aplicable a integrandos con puntos de ramificación. Consideremos por ejemplo

$$w = \int_0^z \frac{d\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}$$

donde z puede tomar cualquier valor del plano cortado desde -1 hasta 1. La integral alrededor del corte es

$$2\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = 2\pi.$$

Si se calculara w dos veces, utilizando para ello dos caminos, C_1 y C_2, se puede demostrar que los correspondientes valores de w_1 y w_2, verifican $w_1 - w_2 = 2\pi N$ siendo N el número de veces que el camino $C = C_1 - C_2$ rodea el corte (Figura 9-2). Este resultado está conforme con el hecho de que los valores de la función $w = \operatorname{arcsen} z$ para un valor dado de z, difieren entre sí en múltiplos de 2π, y también está conforme con que el período de la función inversa, sen$w$, sea 2π.

En el caso de que existan varias líneas de ramificación y varias singularidades la diferencia de las integrales correspondientes a dos caminos viene dada por (9.6), siendo ahora R_j la integral alrededor de la j-ésima línea de ramificación o singularidad. Ver la Figura 9-3.

Tanto en la Figura 9-3 como en otros casos anteriores lo que se ha hecho en realidad es aplicar el teorema integral de Cauchy en un dominio multiplemente conexo. Expondremos ahora una discusión intuitiva de este teorema. La idea central y su justificación en las aplicaciones son sencillas; sin embargo, esta forma general del teorema no sera

necesaria en ningún otro lugar del libro. El método que se ilustra en la Figura 2-4 basta para abordar problemas en apariencia mucho más complicados, por el procedimiento de restar las partes singulares f_j, y aplicar la propiedad de linealidad de la integral. Este recurso nos permite ahorrarnos todas las consideraciones topológicas que serían necesarias para estudiar con rigor el caso general.

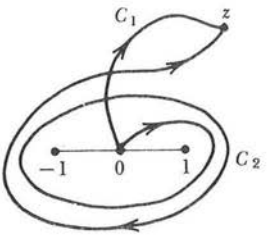


Figura 9-2

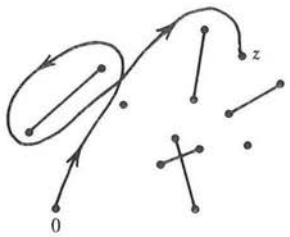


Figura 9-3

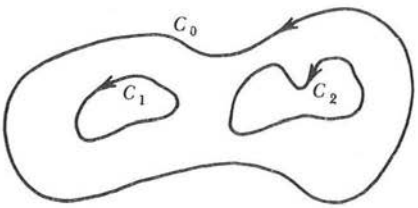


Figura 9-4

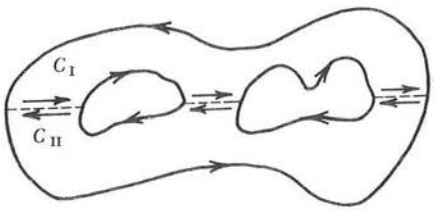


Figura 9-5

Sea C_0 un contorno de Jordan orientado positivamente. Supongamos que cada uno de los $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sea un contorno de Jordan contenido en el interior de C_0; supongamos además que los contornos $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sean disjuntos, esto es, que no exista ningún punto común a dos de ellos y que ningún C_j esté contenido en el interior de ningún C_k, para $j = 1, 2, \ldots, n$ $k = 1, 2, \ldots, n$. Consideremos el dominio limitado por $C_0, C_1, \ldots, C_n$. Sea $f(z)$ una función analítica en un dominio que contenga a la adherencia D de D. Entonces

$$\int_{C_0} f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{n} \int_{C_j} f(z)\,dz \tag{9.7}$$

estando cada C_j orientado positivamente con respecto a su dominio interior, como se indica en la Figura 9-4.

En el caso particular representado en la Figura 9-4 el teorema se demuestra efectuando los cortes que se indican en la Figura 9-5. Denotemos mediante C_I y C_{II} a los contornos orientados positivamente que se muestran en la Figura 9-5. Por el teorema de Cauchy para dominios simplemente conexos,

$$\int_{C_I} f(z)\,dz = 0, \qquad \int_{C_{II}} f(z)\,dz = 0.$$

Sumando se obtiende

$$\int_{C_0} f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz.$$

El teorema de los residuos se sigue de (9.7) sin más que tomar como $C_1, C_2, \ldots, C_n$ otros tantos circuitos con centro en los puntos singulares α_j. En este caso,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_j} f(z)\,dz = \operatorname{Res} f(\alpha_j)$$

y de (9.7) se sigue el Teorema 2.1.

Las curvas $C_1, C_2, \ldots, C_n$ anteriores están orientadas positivamente respecto a sus dominios interiores y negativamente con respecto al dominio D. Si todas las curvas C_j se orientan positivamente con respecto a D, como se muestra en las Figuras 9-5 y 9-6, la igualdad (9-7) adopta la forma

$$\sum_{j=0}^{n} \int_{C_j} f(z)\,dz = 0.$$

que es equivalente a

$$\int_C f(z)\,dz = 0$$

siendo $C = C_0 + C_1 + \cdots + C_n$ el *contorno orientado* de D. Enunciado de esta forma, el resultado que acabamos de obtener es una generalización directa del teorema integral de Cauchy a dominios multiplemente conexos.

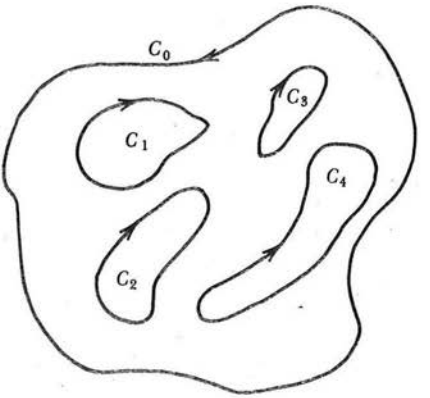


Figura 9-6

Hasta ahora hemos supuesto siempre que la función $f(z)$ es analítica sobre C, con lo cual se exige no sólo su analiticidad sobre D, sino también en la región cerrada $\overline{D}$. En realidad, si se supone que f sea continua sobre el contorno, la hipótesis de analiticidad en D es suficiente. Este es en esencia el contenido del teorema siguiente.

TEOREMA 9.2. *(Forma fuerte del teorema de Cauchy.) Sea D un dominio limitado por los contornos de Jordan* $C_0, C_1, \ldots, C_n$ *como los descritos anteriormente, y sea*

$$C = C_0 + C_1 + C_2 + \cdots + C_n$$

el contorno orientado de D. Entonces se verifica

$$\int_C f(z)\, dz = 0$$

para toda función f que sea analítica en D y continua en $\overline{D}$.

El Teorema 9.2 simplifica la integración a lo largo de líneas de ramificación, estudiada en la Sección 5, porque pone de manifiesto que no es necesario ampliar para ello la región de analiticidad. Este teorema es también útil en las aplicaciones del Análisis de variable compleja a la Teoría del potencial, esbozada en la Sección 7. Aplicando el Teorema 9.2 a la función

$$F(z) = f(z) - \sum f_j(z)$$

que se introdujo ya en la sección 2, se obtiene una forma fuerte del toerema de los residuos en la que no se presupone al analiticidad de f sobre la frontera. Se obtiene a partir de este teorema de los residuos una forma fuerte de la fórmula integral de Cauchy, y más directamente, aplicando el teorema 9.2 a la función

$$G(z) = \frac{f(z) - f(a)}{z - a}.$$

El Teorema 9.2 es mucho más profundo que todas las formas débiles estudiadas hasta el momento, y no lo demostraremos aquí. Existe, sin embargo, una forma restringida del Teorema 9.2 que suele ser suficiente para casi todas sus aplicaciones y cuya demostración es sencilla. En esta versión restringida se supone que el dominio D puede descomponerse en dominio estrellado S_i, como se muestra en la Figura 9-7. Así pues, $\overline{D}$ es la unión de las regiones cerradas $\overline{S_i}$,

$$\overline{D} = \overline{S}_1 + \overline{S}_2 + \cdots + \overline{S}_m$$

y el contorno orientado C de D puede expresarse como

$$C = T_1 + T_2 + \cdots + T_m$$

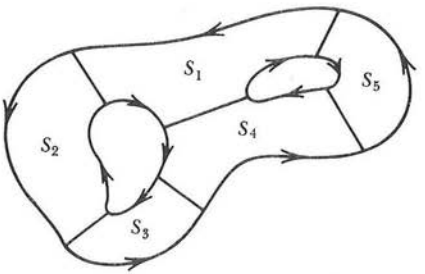


Figura 9-7

siendo T_j el contorno orientado de S_j. Como el lector recordará del Capítulo 3, esta última igualdad significa que

$$\int_C f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{m} \int_{T_j} f(z)\,dz \tag{9.8}$$

para toda función continua f. Cuando los contornos T_j, cumplen condiciones bastante generales se demuestra con facilidad que, en las hipótesis del Teorema 9.2, todas las integrales del segundo miembro de (9.8) son cero. La versión restringida del Teorema 9.2 se sigue entonces por adición. Se dan más detalles de los desarrollos necesarios en los Problemas 2 y 3 de esta Sección.

Ejemplo 9.1. Singularidades evitables. Supongamos que $f(z)$ sea analítica en un dominio D, con la posible excepción de un segmento rectilíneo L contenido en D. Demostrar que si f es continua en D entonces es analítica sobre L.

Este resultado difiere sensiblemente de los obtenidos en el Capítulo 3, pues las singularidades consideradas allí eran aisladas, mientras que en nuestro caso existe todo un segmento de singularidades. Por otra parte, la hipótesis de continuidad es mucho más restrictiva que la condición

$$\lim_{z\to\alpha} (z - \alpha)f(z) = 0$$

suficiente para obtener los teoremas del Capítulo 3.

Para demostrarlo, consideremos un punto z_0 interior al segmento rectilíneo L, y sea D_0 un disco de centro en z_0. Tomemos D_0 lo bastante pequeño como para que $\overline{D}_0$ esté contenido en D y que L lo divida en dos partes iguales, como se muestra en la Figura 9-8. Se obtienen así dos dominios disjuntos, D_1 y D_2, limitados por contornos semicirculares, C_1 y C_2, como se muestra en la Figura 9-9.

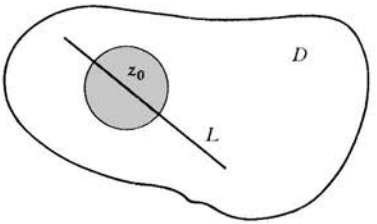


Figura 9-8

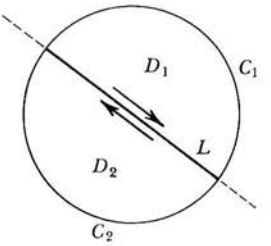


Figura 9-9

Sea z un punto de D_1. La fórmula integral de Cauchy y el teorema integral de Cauchy dan, respectivamente,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta, \qquad 0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta.$$

de donde, por adición,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \tag{9.9}$$

siendo C el contorno orientado del disco D_0. Las integrales a lo largo de L tienen suma nula, pues están tomadas en sentidos opuestos y f es continua. De forma análoga se deduce la ecuación (9.9) en el caso de que z se encuentre en D_2, y puesto que los dos miembros de esta ecuación son funciones continuas de z dicha ecuación es válida en todo D_0. Dado que el segundo miembro de (9.9) es una función analítica de z en D_0, también lo será el primero, y por lo tanto, $f(z)$ es analítica en z_0. La analiticidad de f en los extremos de L se establece bien mediante los teoremas del Capítulo 3, bien por reducción al caso anterior prolongando un poco el segmento L.

No es necesario que en la Figura 9-9 L sea un segmento rectilíneo; bastaría que L fuese un contorno simple cualquiera que dividiera al disco D_0 en dos dominios limitados por contornos de Jordan, como se muestra en la Figura 9-10. Un contorno de este tipo se denomina *corte transversal* del disco. El razonamiento anterior muestra que si $f(z)$ es continua en D_0 y es analítica en D_0, exceptuado posiblemente el corte transversal L, entonces $f(z)$ es analítica en D_0.

Problemas

1. Deducir el resultado del Ejemplo 9.1 del teorema de Morera. Este procedimiento no conduce de forma tan inmediata a la generalización asociada a la Figura 9-10 y por esta razón se ha preferido aquí la demostración basada en la fórmula de Cauchy.

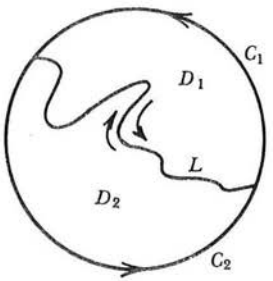


Figura 9-10

2. Sea S un dominio estrellado respecto del origen. Supongamos que el contorno orientado de S sea un contorno T que pueda expresarse en coordenadas polares en la forma $r = h(\theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, siendo $h'(\theta)$ continua a trozos y $h(\theta) > 0$. El interior de T es el conjunto en el cual $r < h(\theta)$, que coincide con el dominio primitivo, S. Si $f(z)$ es analítica en S y continua en $\overline{S}$, demostrar que

$$\int_T f(z)\,dz = 0.$$

Idea de la solución: Siendo $0 < s < 1$, denotemos T_s al contorno

$$r = sh(\theta), \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Entonces, por el teorema de Cauchy para el dominio estrellado S,

$$\int_T f(z)\,dz = \int_T f(z)\,dz - \frac{1}{s}\int_{T_s} f(z)\,dz$$

siendo nula la tercera integral. La igualdad anterior es equivalente a

$$\int_T f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} \{f[h(\theta)] - f[sh(\theta)]\}\{h'(\theta) + ih(\theta)\}e^{i\theta}\,d\theta$$

Dado cualquier $\epsilon > 0$ determinamos $\delta > 0$ tal que

$$|h(\theta) - sh(\theta)| < \delta \qquad \text{implica} \qquad |f[h(\theta)] - f[sh(\theta)]| < \epsilon.$$

en virtud de la continuidad uniforme de f en S. La primera desigualdad se satisface tomando s suficientemente próximo a 1. La segunda da entonces

$$\left|\int_T f(z)\,dz\right| \leq 2\pi\epsilon \int_0^{2\pi} \{|h'(\theta)| + |h(\theta)|\}\,d\theta.$$

3. Un dominio estrellado es *admisible* si efectuando una traslación de ejes conveniente (es decir, eligiendo convenientemente el origen) puede expresarse como el dominio S del Problema 2. Deducir la forma fuerte del teorema de Cauchy en el caso de que dominio D pueda descomponerse en subdominios estrellados admisibles S_j como se explicó en el texto.
4. *El teorema de Laurent para una corona circular.* Este problema pertenece a la Sección 9 del Capítulo 3. Supongamos que $f(z)$ sea analítica en la corona $R_1 < |z - \alpha| < R_2$. Demostrar que los Teoremas 9.1 y 9.2 son válidos para $R_1 < |z - \alpha| < R_2$. Es decir, demostrar que $f = f_1 + f_2$, siendo f_1 analítica para $|z - \alpha| < R_2$ y f_2 analítica para $|z - \alpha| > R_1$. Demostrar la fórmula (9.6), donde c, el radio de C en (9.5) satisface la condición $R_1 < c < R_2$.

10. Deformación de contornos. Sean C_0 y C_1 dos contornos con el mismo origen α y el mismo extremo β. Supongamos que C_0 y C_1 están contenidos ambos en un dominio D en el cual es analítica una función $f(z)$ dada. Se dice que C_0 puede ser *deformado* hasta C_1 si existe una familia de contornos C_s que posea las siguientes propiedades:

(1) C_s es igual a C_0 cuando $s = 0$, y a C_1 cuando $s = 1$
(2) Todos los contornos C_s tienen origen α y extremo β.
(3) Todos los contornos C_s están contenidos en D, para $0 \leq s \leq 1$.
(4) C_s depende continuamente de s.

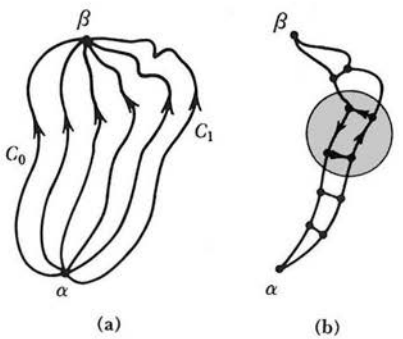


Figura 10-1

Estas propiedades se ilustran en la Figura 10-1 (a). Cuando todas ellas son válidas, se verifica:

$$\int_{C_0} f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz.$$

Dicho de otra forma, se puede deformar el camino C_0 hasta el C_1, sin que el valor de la integral sufra variación siempre que durante el proceso de deformación, el camino no pase

por ninguna singularidad de f. Este importante hecho se conoce como *principio de deformación de contornos.*

El principio de deformación de contornos permite una comprensión más profunda del contenido de algunos teoremas de este capítulo. Por ejemplo, en un dominio simplemente conexo cualquier contorno se puede deformar hasta reducirlo a un punto, con lo que el teorema de Cauchy resulta inmediato. La Figura 10-2 sugiere una versión del teorema de los residuos.

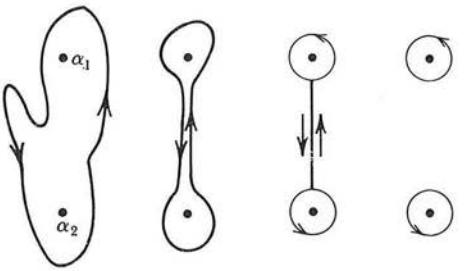


Figura 10-2

El principio de deformación de contornos se puede demostrar con ayuda de la construcción que se muestra en la Figura 10-1 (b), en la que se han representado dos de los contornos C_s para dos valores diferentes, $s = s_0$ y $s = s_1$. En ella se ha tomado una sucesión de puntos de dichos contornos, uniéndolos entre sí mediante trazos rectos a fin de obtener la configuración "en escalera" que se observa en la figura. Si la distancia de cada punto de la sucesión a su siguiente se hace suficientemente pequeña y si los valores de s_0 y s_1 también son suficientemente próximos, cada "cuadro" de la escalera se puede incluir en un disco en el que $f(z)$ sea analítica, y por el teorema de Cauchy para un disco, la integral alrededor de un "cuadro" es igual a 0. Sumando las integrales correspondientes a todos los cuadros se ve que las integrales a lo largo de los dos contornos C_s
Se puede pasar de C_0 hasta C_1 mediante un número finito de etapas de este tipo, y puesto que en cada paso la integral permanece invariante, la integral a lo largo de C_0 será igual a la integral a lo largo de C_1.

Para expresar analíticamente las ideas anteriores es preciso definir qué se entiende por familia continua de curvas C_s, y qué es una sucesión de puntos en una curva C_s. La familia de curvas C_s es una *familia continua* si C_s puede expresarse paramétricamente en la forma

$$z = \zeta(s,t), \qquad 0 \leq t \leq 1,$$

siendo $\zeta(s,t)$ una función continua de s y de t para $0 \leq s \leq 1$ y $0 \leq t \leq 1$. Se obtiene una *sucesión de puntos* sobre dos curvas C_s tomando una sucesión de valores de $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$, la misma en los dos casos. Con estas definiciones ya no resulta difícil explicitar por completo la discusión anterior, habida cuenta de la continuidad uniforme de la función $\zeta(s,t)$. Aquí ya no daremos más detalles.

Suplemento de problemas al Capítulo 4.

1.1. En virtud del Ejemplo 1.2 la función $1 - az$ posee un logaritmo analítico en el plano cortado desde $1/a$ hasta ∞. Integrar $z^{-1}\log(1 - az)$ alrededor de la circunferencia $|z| = 1$ y obtener que

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{x \operatorname{sen} x}{1 - 2a\cos x + a^2}\,dx = \frac{\operatorname{Log}(1 + a)}{a}, \qquad 0 < a < 1.$$

(En un primer intento se obtiene una integral que contiene $\operatorname{Log}(1 - ae^{i\theta})$; integrarla por partes.)

1.2. En relación con el Problema 5 de la Sección 1, demostrar que el teorema de Cauchy es válido para toda función $f(z)$ analítica en un dominio D si es válido para toda función de la forma $f(z)=1/(z-a)$ que sea analítica en D.

1.3. Siendo D un dominio acotado, denotemos por D_δ el dominio que se obtiene considerando D juntamente con todos los puntos que se encuentran a distancia menor o igual que δ de D. Dar un ejemplo en el que el dominio D sea simplemente conexo mientras que el dominio D_δ no lo sea para ningún valor positivo y pequeño de δ.

1.4. Demostrar que una función entera $f(z)$ tiene un número finito de ceros si y solamente si puede escribirse en la forma

$$f(z) = P(z)e^{g(z)}$$

siendo P un polinomio y g una función entera. (Ver el Ejemplo 1.2)

1.5. *Un caso particular de la fórmula de Jensen.* Sea $g(z)$ una función analítica que no se anule en el disco $|z| \leq r$. Aplicando el Ejemplo 1.2 y el teorema de Cauchy, demostrar que

$$\operatorname{Log}|g(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Log}|g(re^{i\theta})|\,d\theta.$$

2.1. Integrando $z^n(z - a)^{-1}(z - 1/a)^{-1}$ alrededor de la circunferencia $|z| = 1$, demostrar que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos n\theta}{1 - 2a\cos\theta + a^2}\,d\theta = \frac{a^n}{1 - a^2}, \quad |a| < 1, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

2.2. Aplicando (2.6), obtener el resultado del Problema 2.1 en el caso de que $n = 1$.

2.3. Obtener las siguientes fórmulas para $a > 1$. Discutir la posibilidad de extenderlas para valores complejos del parámetro a:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta\,d\theta}{a + \cos\theta} = 1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 - 1}}, \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}^2\theta\,d\theta}{a + \cos\theta} = a - \sqrt{a^2 - 1}.$$

2.4. Demostrar que en (2.6) se verifica $2\cos n\theta = z^n + z^{-n}$. Utilizar este resultado para obtener

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{5 - 3\cos\theta}\,d\theta = \frac{\pi}{18}, \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5 - 3\cos\theta}\,d\theta = \frac{\pi}{54}.$$

3.1. Determinar en qué conjunto del plano complejo puede variar el parámetro a a fin de que sea válido el resultado superior, el resultado inferior o no lo sea ninguno de ellos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x-a)^2+1} = \begin{cases} 0, \\ \pi, \end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{8x^2\,dx}{(x^2+a^2)^3} = \begin{cases} \pi a^{-3} \\ \pi(-a)^{-3} \end{cases}.$$

3.2. Demostrar (a) para $n = 4$; y (b) para todos los enteros ≥ 2, que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n-2)}\pi.$$

3.3. Demostrar (a) para $n = 2$; y (b) para todos los enteros ≥ 1, que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x+x^2+\cdots+x^{2n}} = \frac{2\pi}{2n+1}\left(1+\cos\frac{\pi}{2n+1}\right)\csc\frac{2\pi}{2n+1}.$$

(Si $\omega = \exp[2\pi i/(2n+1)]$ se aplica que $\omega\omega^{2n} = 1$, $\omega^{1/2}\omega^n = -1$. La parte (b) de este problema no es sencilla.)

3.4. Enunciar tres teoremas generales relativos al cálculo mediante residuos de las integrales de los tipos siguientes:

$$\int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)\,d\theta, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{iax} f(x)\,dx.$$

4.1. Supongamos que $f(z)$ sea analítica en el disco $|z| \leq r$, que $f(0) \neq 0$, y llamemos a_1, $a_2, \ldots, a_n$, a los ceros de $f(z)$ en el disco abierto $|z| < r$, repetidos de acuerdo con su multiplicidad. Demostrar que la función

$$g(z) = \frac{r^2 - \bar{a}_1 z}{r(z-a_1)} \cdot \frac{r^2 - \bar{a}_2 z}{r(z-a_2)} \cdots \frac{r^2 - \bar{a}_n z}{r(z-a_n)} f(z)$$

es analítica en $|z| \leq r$ excepto para singularidades evitables y que no se anula en $|z| < r$. Demostrar también que $|g(z)| = |f(z)|$ sobre la circunferencia $|z| = r$. (Ver el Ejemplo 2.1 del Capítulo 1.)

4.2. *Desigualdad de Jensen.* Aplicando a la función $g(z)$ anterior el principio del módulo máximo, deducir que $|g(0)| \leq M(r)$, siendo $M(r)$ el máximo de $|f(z)|$ sobre la circunferencia $|z| = r$. Se obtiene así

$$\frac{r^n}{|a_1 a_2 \cdots a_n|} \leq \frac{M(r)}{|f(0)|}.$$

4.3. *Fórmula de Jensen,* caso sencillo. Suponiendo que la función $f(z)$ en el Problema 4.1. no se anula sobre la circunferencia $|z| = r$, aplicar el Problema 1.5 a $g(z)$, y deducir

$$\operatorname{Log}\frac{r^n}{|a_1 a_2 \cdots a_n|} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Log}\frac{|f(re^{i\theta})|}{|f(0)|}\,d\theta.$$

4.4. *Fórmula de Jensen.* Caso general. Sea ϕ una constante real arbitraria. Deducir del Ejemplo 4.2 que

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{Log}|re^{i\theta} - re^{i\phi}|\, d\theta = 2\pi \operatorname{Log} r, \qquad r > 0,$$

y por consiguiente, la fórmula del Problema 1.5 sigue siendo válida para funciones $z-a$ que se anulen sobre $|z| = r$. Extender en consecuencia el Problema 1.5 permitiendo que sea $g(z) = 0$ sobre $|z| = r$. Se concluye que la fórmula del Problema 4.3 sigue siendo válida, con una integral impropia en el segundo miembro convergente, si alguno de los a_j verifica $|a_j| = r$.

4.5. Siendo b un número real, integrar $e^{2biz}/(e^{2\pi z} - 1)$ a lo largo de un rectángulo al que se ha efectuado entalladuras en los puntos 0, R, $R + i$, i y demostrar que

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} 2bx}{e^{2\pi x} - 1}\, dx = \frac{\coth b}{4} - \frac{1}{4b}.$$

5.1. Considerando la función $\log(1 - ix)$ e igualando las partes reales, demostrar que

$$\int_0^{\infty} \frac{\log(1 + x^2)}{1 + x^2}\, dx = \pi \log 2, \quad \int_0 \frac{\log(1 + x^2)}{x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

5.2. Hacer el Problema 3.2 efectuando el cambio de variable $x^2 = t$.

5.3. Utilizando como contorno un semicírculo apropiado, integrar por partes

$$f(z) = \frac{z \log(1 - iz)}{(1 + 2z^2)^2}$$

y demostrar que

$$\int_0^{\infty} \frac{x \arctan x}{(1 + 2x^2)^2}\, dx = \int_0^1 \frac{x \operatorname{arcsen} x}{(1 + x^2)^2}\, dx = \frac{\pi}{8}(\sqrt{2} - 1).$$

(Como $\arctan x = \operatorname{arcsen} u$, siendo $u = x/\sqrt{1 + x^2}$, tomando $x = u/\sqrt{1 - u^2}$ en la primera integral se obtiene la segunda.)

5.4. Enunciar tres teoremas generales relativos al cálculo de integrales de los tipos siguientes por medio de residuos:

$$\int_0^{\infty} x^a f(x)\, dx, \quad \int_0^{\infty} f(x) \log x\, dx, \quad \int_0^{\infty} f(x)(\log x)^2\, dx.$$

6.1. Sea $f(z)$ analítica en el disco abierto $|z| < R$. Supongamos que $f(0) = 0, f'(0) \neq 0$. Existen entonces números $\rho > 0$ y $\delta > 0$ tales que para todo número complejo α, $|\alpha| < \delta$, la ecuación

$$f(z) = \alpha$$

tiene exactamente una solución en el disco $|z| < \rho$. Dicho de otro modo, si $w = f(z)$ y $z = w = 0$, la función $f(0) = 0$ tiene función inversa en el entorno de $f'(0) \neq 0$. (Como $f(z)$ no es idénticamente nula, el cero en $z = 0$ es aislado. Así pues, existe $\rho > 0$ tal que $f(z) \neq 0$ para $0 < |z| \leq \rho < R$. Tomemos $\min|f(\rho e^{i\theta})| = \delta > 0$. El resultado se sigue del teorema de Rouché con $f = f(z), g = -\alpha$, y C igual a la circunferencia $|z| = \rho$.)

6.2. Dar una nueva demostración del resultado del Problema 6.1. apoyándose en que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z) - \alpha}\,dz$$

que es un número entero, es función analítica de α para $|\alpha| < \delta$, es igual a 1 para $\alpha = 0$, y por consiguiente, es igual a 1 para todo $|\alpha| < \delta$.

6.3. En las hipótesis del Problema 6.1, demostrar que $w = f(z)$ tiene una única inversa analítica $z = \phi(w)$ para $|w| < \delta$, donde $|\phi(w)| < \rho$. Sea C la circunferencia $z = \rho e^{i\theta}$ y tomemos

$$\phi(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{zf'(z)}{f(z) - w}\,dz.$$

Tomando $w = \alpha$, demostrar que $\phi(\alpha)$ ha de ser solución de $\alpha = f(z)$. (La existencia de alguna solución se ha establecido ya en el Problema 6.1.) Demostrar que para $|w| < \delta$, $\phi(w)$ es función analítica de w.)

7.1. Demostrar que la transformada de Hilbert de una constante es 0 y que, por consiguiente, las fórmulas de Hilbert pueden escribirse

$$u(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(\omega) - v(y)}{y - \omega}\,d\omega, \qquad v(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(y) - u(\omega)}{y - \omega}\,d\omega.$$

En las hipótesis del texto, el integrando tiene tan sólo una singularidad evitable en $\omega = y$, y con frecuencia la integral es convergente en sentido ordinario además de serlo en el sentido del valor principal de Cauchy.

7.2. Aplicar las fórmulas del problema anterior a e^{-z} y obtener así que

$$\cos y = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\omega \operatorname{sen}\omega - y \operatorname{sen} y}{\omega^2 - y^2}\,d\omega, \qquad \operatorname{sen} y = \frac{2y}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\cos y - \cos\omega}{\omega^2 - y^2}\,d\omega.$$

La función e^{-z} no satisface la condición $M(R) \to 0$, pero la integral a lo largo de C_R puede acotarse utilizando el Lema de Jordan.

7.3. Tomemos como $\sqrt{z}$ la rama definida en el plano cortado desde 0 hasta $-\infty$ que es positiva para $z > 0$, y sean c y t dos constantes positivas. Demostrar que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{zt}}{\sqrt{z}}\,dz = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{2}{\pi\sqrt{t}}\int_0^{\infty} e^{-r^2}\,dr.$$

Se sabe que esta última integral es igual a $\sqrt{\pi}/2$. (Considérese un contorno formado por parte de la recta $x = c$, por parte de la circunferencia $|z| = R$, por toda la $|z| = \epsilon$, y por los bordes superior e inferior del corte $-R \leq x \leq -\epsilon$.)

7.4. Supongamos que $G(s)$ sea analítica para $\operatorname{Re} s \geq 0$ y satisfaga $M(R) \to 0$, por lo que puede aplicarse a G la fórmula (7.5). Asumiendo que sea válido un cambio del orden de integración, demostrar que la primera de las fórmulas siguientes implica la segunda, para $\operatorname{Re} s > 0$:

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(i\omega) x^{-i\omega}\, d\omega, \qquad \int_0^1 x^{s-1} g(x)\, dx = G(s).$$

que constituyen un caso particular de las *fórmulas de inversión de Mellin,*

$$G(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} g(x)\, dx, \qquad g(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} G(s) x^{-s}\, ds,$$

las cuales son válidas en condiciones mucho menos restrictivas.

8.1. Tomando una rama apropiada del logaritmo en el plano cortado desde -1 hasta 1, bien usando el Teorema 8.2, bien integrando por partes, se obtiene

$$\int_C z^2 \log \frac{z+1}{z-1}\, dz = \frac{4\pi i}{3}, \quad \text{siendo } C \text{ la circunferencia } |z| = 2.$$

8.2. Haciendo el cambio de variable $x^4 = t$, demostrar que

$$\int_0^1 x^2 \sqrt[4]{1 - x^4}\, dx = \pi \frac{\sqrt{2}}{16}.$$

9.1. Suponiendo que todas las líneas de ramificación se encuentren en el semiplano inferior, y tomando como valor del denominador $\exp(i\pi/4) + \sqrt{3}\exp(i\pi/4)$ en el punto $s = 0$, demostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixs}}{\sqrt{s+i} + \sqrt{s+3i}}\, ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2(-x)^{3/2}} e^{-\pi i/4}(e^x - e^{3x})$$

para $x < 0$, y que el integrando es igual a 0 para $x > 0$. (Se usa la relación

$$\frac{1}{\sqrt{s+3i} + \sqrt{s+i}} = \frac{\sqrt{s+3i} - \sqrt{s+i}}{2i}$$

tras deformar convenientemente el contorno en el semiplano inferior.)

Capítulo 5

Representación conforme

Una función $w = f(z)$ analítica y no constante transforma un dominio D del plano z en otro dominio $f(D)$ del plano w. En los puntos en los que $f'(z) \neq 0$ una aplicación de este tipo posee la importante propiedad de ser conforme, lo que significa que si dos curvas lisas cualesquiera se cortan en un punto de D, sus imágenes en $f(D)$ se cortan formando el mismo ángulo que aquéllas. Mediante representaciones conformes se pueden transformar muchos problemas de Dinámica de fluidos, de Electroestática, etc, en problemas más sencillos del mismo tipo en $f(D)$. Resolviendo el problema en $f(D)$ se obtienen las soluciones del problema original en D. La representación conforme da también una visión más geométrica de numerosas cuestiones del Análisis. Por ejemplo, es posible invertir la función $w = f(z)$, obteniendo una inversa que es uniforme, $z = g(w)$ en el entorno de aquellos puntos en los que la función dada es conforme, mientras que la función y su inversa se comportan de manera semejante a $w = z^n$ en el entorno de aquéllos puntos donde la función considerada no es conforme. El capítulo termina con un enunciado del teorema de Riemann, que caracteriza los dominios que se pueden aplicar conformemente sobre el disco unidad.

1. Representación conforme. Transformaciones bilineales. Sea $f(z)$ una aplicación, esto es, una función uniforme, analítica en un dominio D. El conjunto de todos los puntos $f(z)$ cuando z recorre D se llama imagen de D por la aplicación f. La notación $w = f(z)$ representa el proceso que transforma cada punto de D en un punto del plano w perteneciente a la imagen de D por la aplicación f. Análogamente, se representa mediante $f(D)$ la imagen de D en el plano w.

Se han considerado ya en el Capítulo 1 diferentes ejemplos de aplicaciones, y se hizo notar allí que un mismo punto de $f(D)$ puede ser imagen de más de un punto de D. Así ocurre, por ejemplo, si D es el plano z finito y $w = z^2$. En el caso de que $f(z_1) = f(z_2)$ implique $z_1 = z_2$ la aplicación de D sobre $f(D)$ se llama *uno a uno, biyectiva* o *biunívoca;* lo cual quiere decir que para cada punto w_1 de $f(D)$ hay exactamente uno y un solo

punto z_1 en D tal que $w_1 = f(z_1)$. Se puede definir entonces sobre $f(D)$ la función $z = f^{-1}(w)$ inversa de la función f. Se demostrará más adelante que si f es una función analítica y uno a uno la función inversa f^{-1} también es analítica. Se dice que una aplicación $w = f(z)$ de un conjunto S de puntos del plano z en un conjunto S^* del plano w, es una aplicación de S sobre S^* (suprayectiva, exhaustiva), *si cada punto de* S^* es imagen de un punto de S, por lo menos, y además S^* contiene a $f[S]$.

Sea $z = \zeta(t)$ para $a \leq t \leq b$ un arco C. Así pues, $x + iy = \xi(t) + i\eta(t)$ siendo ξ y η dos funciones diferenciables reales de t. Por definición,

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{dx}{dt} + i\frac{dy}{dt}$$

y la pendiente de este vector es dy/dx, que asimismo es la pendiente del arco. En cualquier punto en el que $\zeta'(t) \neq 0$, el vector $\zeta'(t)$ es tangente a C, midiendo $\arg \zeta'(t)$ el ángulo que forma la tangente con el eje x.

Supongamos que la función $f(z)$ sea analítica en un dominio D que contenga el arco C anterior. La imagen de C en la aplicación f es un arco C^* que viene definido por $w = f[\zeta(t)]$ Por la regla de la cadena

$$\frac{dw}{dt} = f'[\zeta(t)]\frac{d\zeta}{dt}.$$

Sea t_0 un punto de $[a,b]$, tomemos $z_0 = \zeta(t_0)$ y supongamos que $f'(z_0) \neq 0, \zeta'(t_0) \neq 0$. La igualdad anterior permite afirmar que $w'(t_0) \neq 0$ y que

$$\arg w'(t_0) = \arg f'(z_0) + \arg \zeta'(t_0).$$

Geométricamente, este resultado significa que el ángulo entre la tangente orientada al arco C en el punto z_0, y la tangente orientada al arco imagen C^* en el punto imagen de z_0, es igual a $\arg f'(z_0)$. Dicho de otra forma, la tangente orientada de cualquier arco que pase por z_0 experimenta en la aplicación, un giro de ángulo igual a $\arg f'(z_0)$, independientemente del arco $\zeta(t)$ considerado. En particular, si dos arcos se cortan en z_0, la aplicación conserva el ángulo que dichos arcos forman al cortarse, tanto en magnitud como en sentido. (Ver la Figura 1-1). Cuando una aplicación tiene esta propiedad se dice que es *conforme*, o que es una *representación conforme*. Hemos establecido así el siguiente

TEOREMA 1.1. *La aplicación* $w = f(z)$ *es una representación conforme en todo punto en el que exista* $f'(z)$ *y se verifique* $f'(z) \neq 0$.

Se deduce de

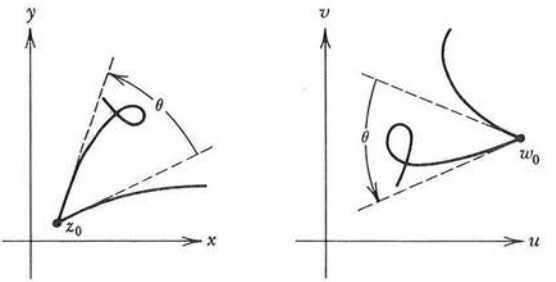


Figura 1-1

$$\lim_{z \to z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} = |f'(z_0)|$$

que la escala local de la representación es igual a $|f'(z_0)|$ y es independiente de la dirección considerada en z_0.

Supongamos que $f(z)$ venga dada, no como función analítica de z, sino como función de (x,y) definida en D, con primeras derivadas parciales continuas. Entonces, si se sabe que la aplicación $w = f(z)$ es conforme, pueden demostrarse las condiciones de Cauchy-Riemann, y por consiguiente $f(z)$ es analítica. Análogamente, si la aplicación $w = f(z)$ conserva localmente la escala, una de las aplicaciones $f(z)$ o $\overline{f(z)}$ es diferenciable en todos los puntos de D. La demostración de estas propiedades se da en forma esquemática en los Problemas 1.3 y 1.4 del final de este capítulo.

Una clase sencilla, pero muy importante, de representaciones conformes la constituyen las *transformaciones bilineales:*

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \qquad ad - bc \neq 0 \tag{1.1}$$

donde a, b, c y d son números complejos. Las transformaciones así definidas se llaman bilineales porque la ecuación (1.1) es equivalente a la

$$cwz - az + dw - b = 0$$

cuyo primer miembro es lineal, separadamente, con respecto a z y a w. En el caso de ser $c = 0$, la transformación se llama *lineal.*

De acuerdo con (1.1), a cada punto z del plano complejo ampliado le corresponde

un único punto w. Si $c = 0$, al punto $z = \infty$ le corresponde el punto $w = \infty$ Si $c \neq 0$, el punto $z = -d/c$ se transforma en $w = \infty$, y el punto $z = \infty$ en $w = a/c$. Observemos que la correspondencia es continua, en el sentido de que si $z \to -d/c$ entonces $w \to \infty$, y de que cuando $z \to \infty$, $w \to a/c$.

Resolviendo la ecuación (1.1) respecto de z se obtiene la transformación inversa,

$$z = \frac{dw - b}{-cw + a},$$

luego, para todo w del plano ampliado hay exactamente un punto z que se transforme en él. Además, cuando $w \to \infty$, $z \to -d/c$, y cuando $w \to a/c$, $z \to \infty$. Por lo tanto, (1.1) es una aplicación biyectiva del plano ampliado z sobre el plano ampliado w. Como demostraremos más adelante, las únicas funciones analíticas y biyectivas del plano ampliado sobre sí mismo son las transformaciones bilineales.

Como

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2},$$

se sigue que $f'(z)$ está bien definida y es diferente de 0 en todos los puntos del plano ampliado, exceptuados $z = \infty$ y $z = -d/c$ (caso $c \neq 0$), puntos en los que es necesario efectuar un análisis más detallado. La no anulación de f' muestra que toda transformación bilineal es una representación conforme, excepto, posiblemente, en los puntos $z = \infty$ y $z = -d/c$. Se demostrará a continuación que no es éste el caso, por lo que la propiedad de ser conforme es válida en todos los puntos del plano ampliando sin excepción.

Supongamos en primer lugar que $z = \infty$. Para estudiar el comportamiento de la transformación en el punto $c \neq 0$, hacemos el cambio de variable $z = 1/\zeta$ y consideramos $\zeta = 0$. La ecuación (1.1) se convierte en

$$w = \frac{b\zeta + a}{d\zeta + c}$$

Derivando respecto de ζ resulta evidente que la transformación es conforme en $\zeta = 0$ La imagen del punto $z = -d/c$, es $w = \infty$; haciendo el cambio $w = 1/\omega$. se obtiene

$$\omega = \frac{cz + d}{az + b}$$

y la derivada del segundo miembro, $(bc - ad)/(az + b)^2$, es distinta de cero en $z = -d/c$. Así pues, la transformación es conforme en $\omega = 0$, imagen de $z = -d/c$. En el caso de que $c = 0$ puede suponerse sin pérdida de generalidad que $d = 1$. La imagen de $z = \infty$ es $w = \infty$

y haciendo en (1.1) simultáneamente los cambios $\zeta = 1/z$ y $\omega = 1/w$ se obtiene $\omega = \zeta/(a + b\,\zeta)$, que es conforme en el punto $\zeta = 0$.

Como caso particular de (1.1) consideremos en primer lugar

$$w = z + b. \tag{1.2}$$

La transformación (1.2) es una traslación, pues la imagen de cada punto z se obtiene sumándole a z un vector constante b. Un segundo caso particular de importancia es

$$w = az = |a|e^{i\phi}z, \tag{1.3}$$

donde $\phi = \arg a$. Esta transformación puede considerarse como una homotecia de razón real seguida de una rotación. Llamando $w = az$ y $w_0 = az_0$, se tiene

$$|w - w_0| = |az - az_0| = |a||z - z_0|,$$

lo que muestra que las distancias quedan multiplicadas por el factor constante $|a|$. Dado que $w = \phi + \arg z$, la transformación efectúa también un giro del plano alrededor del origen, de ángulo ϕ.

Consideremos por último el caso particular en que (1.1) se reduce a

$$w = 1/z \tag{1.4}$$

Esta transformación se llama *inversión*. Ahora, $|w| = 1/|z|$ y $\arg w = -\arg z$. Las distancias al origen se transforman en sus recíprocas y los argumentos se transforman en sus opuestos. En los casos de traslación, giro y homotecia todo triángulo se transforma en otro triángulo semejante, por lo que es evidente que dichas transformaciones son representaciones conformes. La propiedad de ser la inversión una representación conforme, no es tan simple, pero se sigue del Teorema 1.1.

Como se explicará con mayor detalle en la próxima sección, la ecuación de cualquier recta o circunferencia del plano complejo puede ponerse en la forma

$$Az\bar{z} + \bar{B}z + B\bar{z} + C = 0 \tag{1.5}$$

siendo A y C números reales y $AC < |B|^2$. Para las rectas, $A = 0$. La comprobación de que si $A \neq 0$, (1.5) tiene la misma forma que la ecuación de una circunferencia es trivial. También es obvio que (1.5) representa una recta cuando $A = 0$, $|B| > 0$.

En el plano ampliado las rectas pueden considerarse como circunferencias que pasan por el punto $z = \infty$. En efecto, si siendo $A = 0$, se cambia z por $1/\zeta$ se obtiene

$$C\zeta\bar{\zeta} + B\zeta + \overline{B\zeta} = 0,$$

que es una circunferencia si $C \neq 0$. De aquí que sea natural considerar conjuntamente rectas y circunferencias.

Es fácil comprobar que la forma de la ecuación (1.5) se conserva en cualquiera de las transformaciones

$$z = w - b, \qquad z = w/a, \qquad z = 1/w$$

y por consiguiente, cada una de estas transformaciones convierte cada línea, de la familia de todas las rectas y circunferencia del plano, en otra línea de la misma familia. Como se mostrará a continuación, lo mismo ocurre con las transformaciones bilineales generales.

Cuando en (1.1) se verifica $c \neq 0$ podemos dividir por c el numerador y el denominador de (1.1), que adoptará la forma

$$w = \frac{az + b}{z + d}.$$

El cambio de variable $\zeta_1 = z + d$ representa una traslación; como $z = \zeta_1 - d$,

$$w = \frac{a(\zeta_1 - d) + b}{\zeta_1} = a + \frac{b - ad}{\zeta_1}.$$

Esta transformación puede considerarse como una inversión $\zeta_2 = 1/\zeta_1$, seguida de una homotecia y rotación, $\zeta_3 = (b - ad)\zeta_2$, y de otra traslación, $w = a + \zeta_3$. Por lo tanto, (1.1) se presenta como composición de (1.2), (1.4), (1.3) y (1.2). En el caso $c = 0$ podemos suponer sin pérdida de generalidad que $d = 1$, con lo que $w = az + b$. En esta transformación intervienen tan sólo (1.2) y (1.3).

Puesto que cada una de las aplicaciones (1.2), (1.3) y (1.4) transforma la familia de todas las rectas y circunferencias del plano en sí misma, *toda transformación bilineal transforma la familia de todas las rectas y circunferencias del plano en sí misma.* En el caso $c = 0$ no es preciso efectuar la inversión, el punto del ∞ es invariante, y la transformación convierte rectas en rectas y circunferencias en circunferencias. En el Ejemplo 1.1 se da otra demostración de esta última propiedad.

Con frecuencia se utiliza la notación $w = Tz$ para representar la transformación T que convierte el punto z en el punto w. En el caso de que exista, la transformación inversa, que convierte w en z, se denota T^{-1}; la transformación identidad se representa por I. Así pues, $TT^{-1}z = z$ e $Iz = z$. Se dice que dos transformaciones T_1 y T_2 son iguales si están definidas para todo z de un mismo dominio D y se verifica que $T_1z = T_2z$ para

todo z perteneciente a D. El producto de transformaciones se define como su composición o iteración.

$$(T_1T_2)z = T_1(T_2z), \tag{1.6}$$

y es asociativo; esto es,

$$T_1(T_2T_3)z = (T_1T_2)T_3z \tag{1.7}$$

para todo z para el cual tenga sentido alguno de los dos miembros de esta igualdad. La razón de que esto ocurra es que los dos miembros de (1.7) significan que sobre z actúa en primer lugar la transformación T_3, luego la T_2 y finalmente, T_1. Basándose en (1.6) puede darse una demostración formalizada de la propiedad (1.7).

Con esta notación la descomposición de una transformación lineal expuesta en el análisis anterior puede describirse del modo siguiente: Toda transformación bilineal, o bien es lineal, o bien puede escribirse en la forma L_1VL_2 , donde las L_i son lineales y V representa una inversión.

Ejemplo 1.1. Siendo $a \neq 0$, demostrar que la transformación $w = az + b$ aplica la circunferencia $|z - z_0| = \rho$ sobre una circunferencia de radio $|a|\rho$, y demostrar que el centro de la circunferencia imagen es la imagen del centro de la circunferencia original.

Si llamamos $w = az + b$ y $w_0 = az_0 + b$, entonces $w - w_0 = a(z - z_0)$. Por consiguiente, la condición $|z - z_0| = \rho$ es equivalente a

$$|w - w_0| = |a|\rho,$$

lo que demuestra que la imagen es una circunferencia de centro w_0 y radio $|a|\rho$. Este método es más directo que el del texto, pero no es aplicable para la transformación $w = 1/z$.

Ejemplo 1.2. La *razón doble* de cuatro puntos distintos, z_1, z_2, z_3 y z_4, se define por

$$X(z_1,z_2,z_3,z_4) = \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_4} \cdot \frac{z_3 - z_4}{z_3 - z_2} \tag{1.8}$$

En el caso de que alguno de los z_i sea ∞, la razón doble se define como el límte de la expresión anterior cuando el correspondiente z_i tiende hacia infinito. Demostrar que en una transformación bilineal la razón doble de cuatro puntos distintos cualesquiera permanece invariante.

Si en (1.8) se sustituye cada z_i por $z_i + b$, las diferencias que aparecen en el numerador y en el denominador no sufren variación, por lo que X es invariante frente a traslaciones. Sustituyendo cada z_i por az_i con $a \neq 0$, tanto el numerador como el denominador quedan multiplicados por a^2 por lo cual X tampoco sufre variación. Finalmente,

si cada z_i se sustituye por $1/z_i$ se halla otra vez que X no varía. Teniendo en cuenta la descomposición expuesta en el texto, queda demostrado el resultado pedido.

Ejemplo 1.3. Hallar una transformación bilineal en la que los puntos $0,1,\infty$ se apliquen respectivamente sobre los puntos $-i,1,i$. Si la transformación pedida convierte z en w, por la invariancia de la razón doble se tiene

$$X(w,-i,1,i) = X(z,0,1,\infty).$$

En virtud de (1.8) se obtiene la ecuación

$$\frac{w+i}{w-i}\cdot\frac{1-i}{1+i} = \frac{z-0}{1-0}$$

que resuelta respecto de w da

$$w = \frac{1+iz}{i+z}. \tag{1.9}$$

Ejemplo 1.4. Hallar una transformación bilineal en la que la imagen del eje real sea la circunferencia $|w| = 1$. La función (1.9) transforma el eje real en una recta o en una circunferencia. Esta línea ha de contener a los puntos $-i,1,i$, y por lo tanto coincide con la circunferencia unidad.

Ejemplo 1.5. Si $w=f(z)$ y existe $f'(z_0)$ por la Sección 1 del Capítulo 2 se tiene

$$\Delta w = f'(z_0)\,\Delta z + \epsilon|\Delta z| \tag{1.10}$$

siendo $w_0 = f(z_0)$, $\Delta w = w - w_0, \Delta z = z - z_0$, y tendiendo $\epsilon \to 0$ cuando $\Delta z \to 0$. Estudiar esta aplicación, aproximándola por una función lineal.

Cuando $f'(z_0) \neq 0$ y $|\Delta z|$ es pequeño, el segundo término del segundo miembro de (1.10), es pequeño con relación al primero. Si fuera posible despreciar dicho segundo término se obtendría

$$w = f'(z_0)(z - z_0) + w_0.$$

La aplicación así definida es una transformación lineal, $w = az + b$, con $a = f'(z_0)$. Por consiguiente, es conforme; y representa una homotecia de razón real $|f'(z_0)|$, seguida de un giro de ángulo $\arg f'(z_0)$.

Problemas

1. Las rectas $z = t$ y $z = e^{i\phi}t$ pasan por el origen, y forman al cortarse un ángulo ϕ. Demostrar que sus imágenes en la transformación $w = z^2$ son dos rectas que se cortan con ángulo 2ϕ. Así pues, una transformación puede no ser conforme en aquellos puntos en los que $f'(z_0) = 0$.
2. Demostrar que el interior de la circunferencia del Ejemplo 1.1 se transforma en el interior de la circunferencia imagen, y que lo mismo ocurre para los dominios exteriores.
3. Si todos los puntos z_i son distintos, demostrar que la razón simple $(z_1 - z_3)/(z_1 - z_2)$ es invariante en las transformaciones lineales.
4. Hallar las imágenes de los puntos 1, i, 0 y $1+i$ por la transformación $w = (z + 2i)/(z + i)$ y comprobar que su razón doble es invariante.
5. Hallar las transformaciones bilineales que aplican $(0,1,\infty)$ en
   $(0,1,2)$, $(-i,0,i)$, $(0,1,\infty)$, $(0,i,\infty)$, $(-i,\infty,1)$.
6. Comprobar en (1.9) que si z es real, $|w| = 1$
7. Siendo $w = (z - i)/(z + i)$, demostrar que $|w| < 1$ si y solamente si $\operatorname{Im} z > 0$, y que, en consecuencia, esta transformación aplica el semiplano superior $\operatorname{Im} z > 0$ sobre el disco unidad $|w| < 1$. (Ver Capítulo 1, Ejemplo 2.1.)
8. En En el Problema 7, llamemos d_1 a la distancia del punto z al punto i y d_2 a la distancia de z a $-i$. Demostrar que las condiciones $|w|<1, |w|=1$ y $|w|>1$ son respectivamente equivalentes a las $d_1 < d_2$, $d_1 = d_2$ y $d_1 > d_2$, y poner de manifiesto esta equivalencia mediante una representación gráfica. Adoptando este punto de vista el resultado del Problema 7 es trivial.
9. Sean p y q dos números complejos distintos. La ecuación de la mediatriz del segmento pq es $|z - p| = |z - q|$. Elevando ambos miembros al cuadrado, la ecuación anterior puede ponerse en la forma $\overline{B}z + B\bar{z} + C = 0$, donde $B = p - q \neq 0$. Demostrar también que, recíprocamente, esta última ecuación (siendo $B \neq 0$) puede reducirse a la primera, con $p \neq q$.
10. Los puntos p y q del problema anterior están situados simétricamente respecto de la recta mediatriz. Consideremos $w = az + b$ con $a \neq 0$, y sean $p^* = ap + b$ y $q^* = aq + b$. Demostrar que $|z - p| = |z - q|$ implica $|w - p^*| = |w - q^*|$, y deducir de ello que una función lineal transforma rectas en rectas, y pares de puntos simétricos en pares de puntos simétricos.
11. Siendo $T_1z = 1 + z$, $T_2z = 1 + (1/z)$ y $T_3z = (i + z)/(i - z)$, calcular los cuatro productos necesarios para comprobar la ley asociativa del producto de transformaciones y ver que se verifica en este caso.
12. Siendo $Tz = (1 - z)/(1 + z)$, demostrar que

$$T(-z) = \frac{1}{Tz}, \qquad T\left(\frac{1}{z}\right) = -Tz, \qquad T(Tz) = z, \quad T\frac{a+b}{1+ab} = (Ta)(Tb).$$

13. Un *punto fijo* (o *invariante*) de la transformación bilineal $w = Tz$ definida por (1.1) es un punto z que satisface la ecuación $z = Tz$. En el caso de ser $c = 0$, se considera que ∞ es un punto fijo de la transformación. Demostrar que una transformación bilineal tiene a lo sumo dos puntos fijos, excepto en el caso de que T se reduzca a la transformación identidad, en cuyo caso todo punto es un punto fijo.

14. Teniendo en cuenta la igualdad $X(w, w_1, w_2, w_3) = X(z, z_1, z_2, z_3)$, demostrar que siempre existe una transformación bilineal que aplique tres puntos distintos z_i cualesquiera en otros tres puntos w_i. arbitrarios fijados de antemano. Demostrar también que esta transformación es única; es decir, si otra transformación bilineal aplica z_i en w_i y z en $\tilde{w}$, entonces $\tilde{w} = w$. (La invariancia de la razón doble da

$$X(\tilde{w},w_1,w_2,w_3) = X(z,z_1,z_2,z_3) = X(w,w_1,w_2,w_3)$$

de donde se sigue que $\tilde{w} = w$.)

15. Deducir la unicidad de la transformación del problema procedente apoyándose en el resultado del Problema 13. (Si existieran dos transformaciones, efectuando el producto de una de ellas con la inversa de la otra se obtendría una transformación con tres puntos fijos.)
16. Si C representa una recta o circunferencia del plano z y C^* tiene el mismo significado en el plano w, deducir del Problema 14 que existe una transformación bilineal que aplica C sobre C^*. ¿Es única esta transformación?

2. Transformaciones bilineales. Continuación. La ecuación de la circunferencia de centro z_0 y radio ρ es $|z-z_0|=\rho$, o lo que es igual,

$$(z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) = \rho^2, \qquad \rho > 0. \quad (2.1)$$

Cuando $\rho = 0$, la circunferencia se reduce a un punto, y cuando $\rho<0$, el lugar geométrico es vacío, esto es, no existe ningún punto que se encuentre en él. Estos dos casos no se consideran aquí.

Efectuando el producto indicado en el primer miembro de (2.1) esta ecuación toma la forma

$$z\bar{z} + \bar{B}z + B\bar{z} + C = 0 \quad (2.2)$$

siendo $B = -z_0$ y $C = |z_0|^2-\rho^2$. Esta última igualdad implica $C < |B|^2$. Recíprocamente, dada la ecuación (2.2) con $C < |B|^2$, podemos definir z_0 y ρ mediante las ecuaciones

$$z_0 = -B, \qquad \rho^2 = |B|^2 - C, \qquad \rho > 0.$$

Entonces (2.2) y (2.1) son la misma ecuación, y por lo tanto (2.2) representa una circunferencia de centro z_0 y radio ρ.

Si en la ecuación (2.2) se suprime el término $z\bar{z}$ y se verifica $B \neq 0$ se obtiene la ecuación de una línea recta. Se puede dar una ecuación general que incluya a las rectas y a las circunferencias escribiendo (2.2) en la forma

$$Az\bar{z} + \bar{B}z + B\bar{z} + C = 0, \qquad AC < |B|^2. \quad (2.3)$$

La condición $AC < |B|^2$ proviene de la condición $C < |B|^2$ en (2.2), como se ve sin más que dividir (2.3) por A. Efectuando la división, (2.3) adopta la forma (2.2) y es claro que para $A \neq 0$ el centro y el radio de la circunferencia vienen dados por

$$z_0 = -\frac{B}{A}, \qquad \rho = \frac{\sqrt{|B|^2 - AC}}{|A|}. \tag{2.4}$$

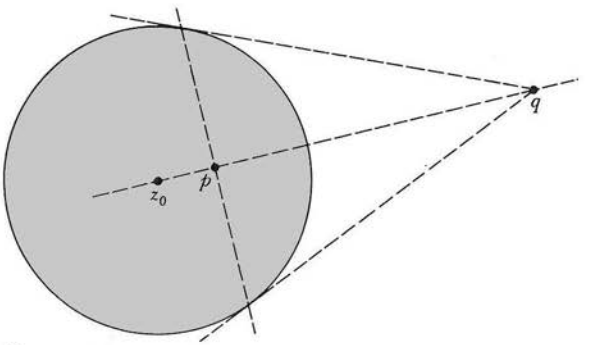


Figura 2.1

Sea $\lambda > 0$ y ϕ un número real cualquiera. Los dos puntos

$$p = z_0 + \lambda e^{i\phi}, \qquad q = z_0 + \frac{\rho^2}{\lambda} e^{i\phi} \tag{2.5}$$

se llaman *puntos inversos respecto de la circunferencia de centro* z_0 y radio ρ. Como se muestra en la Figura 2-1, los puntos p y q están alineados con el centro de la circunferencia, z_0. El producto de sus respectivas distancias al centro es ρ^2; más concretamente,

$$(p - z_0)(\bar{q} - \bar{z}_0) = \rho^2. \tag{2.6}$$

Recíprocamente, si se verifica (2.6) podemos escribir $p - z_0 = \lambda e^{i\phi}$ y obtener otra vez las ecuaciones (2.5). Luego, si $\lambda \neq 0$, la condición necesaria y suficiente para que los puntos p y q sean inversos es que se verifique (2.6).

La construcción geométrica de los puntos p y q se muestra en la Figura 2-1. Esta construcción sugiere que cuando q se aleja hacia ∞ su punto inverso p tiende hacia el centro de la circunferencia. La misma conclusión se obtiene haciendo tender $\lambda \to 0$ en (2.5). Si $\lambda = 0$ pondremos por definición $p = z_0$ y $q = \infty$. Se dice que dos puntos son *inversos (o simétricos) respecto de una línea recta* cuando esta recta es la mediatriz del segmento que une dichos puntos.

Si $z = z_0 + \rho e^{i\phi}$ es un punto de la circunferencia anterior, vamos a demostrar que para $\lambda > 0$ se verifica

$$\left|\frac{z-p}{z-q}\right| = \frac{\lambda}{\rho}. \tag{2.7}$$

Para probar (2.7) observemos que

$$\frac{z-p}{z-q} = \frac{\rho e^{i\theta} - \lambda e^{i\phi}}{\rho e^{i\theta} - (\rho^2/\lambda)e^{i\phi}} = \frac{\lambda}{\rho}\frac{\rho e^{i\theta} - \lambda e^{i\phi}}{\lambda e^{i\theta} - \rho e^{i\phi}}.$$

Multiplicando el numerador y el denominador de esta fracción por $-e^{-i\theta}e^{-i\phi}$, cuyo módulo es igual a 1, el numerador de la nueva fracción que se obtiene es el conjugado del denominador, de donde se sigue (2.7).

El recíproco es el siguiente

TEOREMA 2.1. *Sean p y q dos números complejos distintos y supongamos que $k > 0$. Entonces la ecuación*

$$\left|\frac{z-p}{z-q}\right| = k \tag{2.8}$$

representa una circunferencia cuando $k \neq 1$, cuyo centro y radio son

$$z_0 = \frac{p - k^2 q}{1 - k^2}, \qquad \rho = \frac{k|p-q|}{|1-k^2|} \tag{2.9}$$

Los puntos p y q son puntos inversos respecto de esta circunferencia. Si $0 < k < 1$, el punto p es interior a la circunferencia, y si $1<k<\infty$, p es exterior a ella. Cuando $k = 1$, la ecuación (2.8) representa una recta y los puntos p y q son inversos (es decir, simétricos) con respecto a ella.

Demostración. Si $k = 1$, entonces $|z-p| = |z-q|$, lo que muestra que z equidista de los puntos p y q. El lugar geométrico de z es, así pues, la recta mediatriz del segmento pq, con lo que el Teorema 2.1 queda demostrado en el caso $k = 1$.

Si $k \neq 1$, la ecuación $|z-p| = k|z-q|$ se convierte en la

$$(z-p)(\bar{z}-\bar{p}) = k^2(z-q)(\bar{z}-\bar{q}).$$

sin más que elevar al cuadrado sus dos miembros. Pasando todos los términos al primer miembro y reduciendo términos semejantes se obtiene la ecuación (2.3) con

$$A = 1 - k^2, \qquad B = k^2 q - p, \qquad C = |p|^2 - k^2|q|^2.$$

Un breve cálculo muestra que $|B|^2 - AC = k^2|p - q|^2$, y las igualdades (2.4) nos dan las (2.9). Por (2.9),

$$p - z_0 = \frac{k^2(q - p)}{1 - k^2}, \qquad q - z_0 = \frac{q - p}{1 - k^2}$$

y de aquí, $(p - z_0)(\bar{q} - \bar{z}_0) = \rho^2$. Luego, los puntos p y q son inversos uno de otro. Dado que $|p - z_0| = k\rho$, es claro que p se encuentra en el interior de la circunferencia cuando $k < 1$ y que es exterior a ella cuando $k > 1$. Como se quería demostrar.

En la demostración anterior hemos utilizado que el interior y el exterior de una circunferencia están definidos, respectivamente, por

$$|z - z_0| < \rho, \qquad |z - z_0| > \rho.$$

Estas desigualdades pueden escribirse en forma análoga a (2.2). Los dominios interior y exterior de una circunferencia se llaman *dominios complementarios*, pues unidos a la circunferencia nos dan la totalidad del plano. En el caso de una recta los dominios complementarios son dos semiplanos situados cada uno a un lado de ella, y vienen dados sustituyendo en (2.3) el signo de igualdad por desigualdades, siendo $A = 0$. El punto del infinito es interior a uno de los dominios complementarios en el caso de una circunferencia, y pertenece a la frontera de ambos en el caso de una recta.

TEOREMA 2.2. Una transformación bilineal aplica cualquier recta o circunferencia del plano sobre otra recta o circunferencia; la imagen de un par de puntos inversos con respecto a una de estas líneas es un par de puntos inversos con respecto a la imagen de dicha línea. Además, si K^* es la imagen de una recta o circunferencia K, uno de los dominios complementarios de K se transforma en uno de los dominios complementarios de K^*, y el otro dominio de K se transforma en el otro dominio de K^*.

Demostración. La primera parte del teorema se demostró ya en la Sección 1. Esta misma demostración prueba el aserto referente a los dominios complementarios sin más que sustituir por desigualdades la igualdad de la ecuación (2.3). Para las transformaciones lineales los razonamientos a realizar son enteramente análogos al del Ejemplo 1.1; por tanto, sólo es necesario estudiar la transformación $w = 1/z$

Para probar el aserto relativo a los partes de puntos inversos, supongamos que p y q sean puntos inversos, ambos diferentes de ∞. Entonces, la recta o circunferencia K puede ponerse en la forma

$$\left|\frac{z - p}{z - q}\right| = k.$$

Si la transformación considerada es de la forma $w = az$, $p^* = ap$ y $q^* = aq$, con $a \neq 0$, el factor a desaparece al efectuar la sustitución $z = w/a$ en el primer miembro de la ecuación de K, por lo que la ecuación resultante representa una circunferencia en el plano w respecto de la cual los puntos p^* y q^* son puntos inversos. De manera parecida se estudia la transformación $w = z + b$. Si $w = 1/z$, $p^* = 1/p$ y $q^* = 1/q$, al sustituir se obtiene, tras simplificar un poco,

$$\left|\frac{w - p^*}{w - q^*}\right| = k\left|\frac{p^*}{q^*}\right|$$

por lo que los puntos p^* y q^* siguen siendo inversos. Para la ecuación anterior es necesario que $p \neq 0$ y $q \neq 0$. Cuando $p = 0$, la ecuación transformada es

$$|w - q^*| = \frac{|q^*|}{k}$$

que es una circunferencia respecto de la cual los puntos q^* e ∞ son inversos. El caso $q = 0$ se trata de forma parecida.

Finalmente, hemos de estudiar el caso $p = \infty$ o $q = \infty$. Podemos suponer que se verifique $q = \infty$. Entonces, $p = z_0$ y la ecuación de la circunferencia es $|z - p| = \rho$. Se deja como ejercicio al lector la comprobación de que $w = 1/z$ y $p^* = 1/p$ y $0 = 1/\infty$ transforma esta circunferencia en otra, respecto de la cual los puntos $p^* = 1/p$ y $0 = 1/\infty$ son inversos.

TEOREMA 2.3. *Una condición necesaria y suficiente para que una transformación bilineal aplique el semiplano superior* $\operatorname{Im} z > 0$ *sobre el disco unidad* $|w| < 1$ *es que dicha transformación pueda ponerse en la forma*

$$w = \beta\frac{z - \alpha}{z - \bar{\alpha}} \tag{2.10}$$

donde $|\beta| = 1$ y $\operatorname{Im} \alpha > 0$.

Demostración. Necesidad. Supongamos que la transformación bilineal

$$w = \frac{az + b}{cz + d}$$

aplique el semiplano $y > 0$ sobre el disco $|w| < 1$. La imagen de la recta $y = 0$ será una recta o circunferencia K^* del plano w, y por tanto, $y > 0$ se transforma en uno de los dominios complementarios de K^*, lo que demuestra que uno de los dominios complementarios de K^* es el disco $|w| < 1$. Luego K^* es $|w| = 1$. Dicho de otra forma, la imagen de eje real es la circunferencia unidad.

Sea α el punto de Im $z > 0$ que se transforma en $w = 0$. Entonces $\bar{\alpha}$, simétrico de α respecto de la recta Im $z = 0$, ha de transformarse en $w = \infty$, que es el inverso de $w = 0$ respecto de la circunferencia $|w| = 1$. Pero $w = 0$ y $w = \infty$ son las imágenes de $z = -b/a$ y $z = -d/c$, respectivamente, y de aquí $a \neq 0, c \neq 0$, y $\alpha = -b/a, \bar{\alpha} = -d/c$.

$$w = \frac{a}{c} \cdot \frac{z - \alpha}{z - \bar{\alpha}}.$$

Como la imagen del punto $z = 0$ está en la circunferencia $|w| = 1$, obtenemos $|a/c| = 1$, lo que demuestra la condición necesaria.

Suficiencia. Supongamos válida la ecuación (2.10). Como para x real se verifica $|x - \alpha| = |x - \bar{\alpha}|$, el eje real se aplica sobre la circunferencia $|w| = 1$ y por tanto, $y > 0$ se aplica sobre uno de los dominios complementarios de $|w| = 1$. Como la imagen de $z = \alpha$ es $w = 0$, el dominio complementario en cuestión contiene a $w = 0$ y por consiguiente, ha de ser el dominio $|w| < 1$, y no el $|w| > 1$. Lo que completa la demostración.

TEOREMA 2.4. *Una condición necesaria y suficiente para que una transformación bilineal transforme el disco $|z| < 1$ sobre $|w| < 1$ es que la transformación pueda ponerse en la forma*

$$w = \beta \frac{z - \alpha}{\bar{\alpha} z - 1} \tag{2.11}$$

siendo $|\alpha| < 1$, y $|\beta| = 1$.

Demostración. Necesidad. De forma análoga a la demostración anterior, si la transformación lleva $|z| < 1$ sobre $|w| < 1$ entonces lleva $|z| = 1$ sobre $|w| = 1$. Sea α el punto del disco $|z| < 1$ que se transforma en $w = 0$. En virtud de (2.6), el inverso de q respecto de la circunferencia $|z| = 1$ es $1/\bar{\alpha}$, punto que ha de transformarse en $w = \infty$, inverso de $w = 0$ respecto de la circunferencia $|w| = 1$. Por tanto, (salvo en el caso $\alpha = 0$) $\alpha = -b/a$ y $1/\bar{\alpha} = d/c$. Luego, la transformación bilineal es

$$w = \frac{a}{c} \cdot \frac{z - \alpha}{z - 1/\bar{\alpha}} = \frac{a\bar{\alpha}}{c} \cdot \frac{z - \alpha}{\bar{\alpha} z - 1}.$$

Como la imagen del punto $z = 1$ está en la circunferencia $|w| = 1$,

$$1 = \left| \frac{a\bar{\alpha}}{c} \cdot \frac{1 - \alpha}{\bar{\alpha} - 1} \right| = \left| \frac{a\bar{\alpha}}{c} \right|,$$

y por consiguiente, la transformación es de la forma (2.11). En el caso $\alpha = 0$, el par de puntos $(0, \infty)$ se transforma en $(0,\infty)$ comprobándose sin dificultad que $w = \beta z$, $|\beta| = 1$.

Suficiencia. Si la transformación es de la forma (2.11), tomando $z = e^{i\theta}$, con θ real, se tiene

$$|w| = \left|\frac{e^{i\theta} - \alpha}{\overline{\alpha}e^{i\theta} - 1}\right| = \left|\frac{a - e^{i\theta}}{\overline{\alpha} - e^{-i\theta}}\right| = 1.$$

Luego, $|w| = 1$ cuando $|z| = 1$ y por consiguiente $|z| < 1$ se transforma en uno de los dominios complementarios de la circunferencia $|w| = 1$. Como $z = 0$ se aplica en α, y que $|\alpha| < 1$, el dominio en cuestión ha de ser el definido por $|w| < 1$ quedando demostrado el Teorema 2.4.

De esta demostración de la condición suficiente, se sigue sin dificultad el resultado de Ejemplo 2.1 del Capítulo 1. Inversamente, se puede utilizar el resultado del Ejemplo 2.1 para dar otra demostración de la condición suficiente.

Ejemplo 2.1. Hallar las imágenes de las rectas paralelas a los ejes coordenados $x = x_0$ e $y = y_0$ del semiplano derecho en la transformación

$$w = \frac{z - 1}{z + 1}, \qquad z = \frac{1 + w}{1 - w}.$$

Como w puede ponerse en la forma $w = (iz - i)/(iz + i)$, el Teorema 2.3, con $\beta = 1$ y $\alpha = i$ muestra que esta transformación aplica el semiplano $\mathrm{Im}(iz) > 0$ sobre el disco $|w| < 1$. Luego aplica $\mathrm{Re}\, z > 0$ sobre $|w| < 1$. Esta misma conclusión se obtiene trivialmente a la vista de las identidades

$$1 - w\overline{w} = \frac{2(z + \overline{z})}{|z + 1|^2}, \qquad z + \overline{z} = 2\frac{1 - w\overline{w}}{|1 - w|^2},$$

cuya demostración se deja al cuidado del lector.

Los puntos $z = 0, 1, \infty$ se aplican respectivamente, sobre los $w = -1, 0, 1$, y por consiguiente, el semieje real positivo se transforma en el diámetro $-1 < u < 1$ de la circunferencia unidad, $|w| = 1$. Las rectas $x = c$, c constante, son perpendiculares al eje real del plano z, por lo cual se transforman en rectas o circunferencias ortogonales al segmento $-1 < u < 1$ del plano w. Como las rectas $x = c$ pasan por el punto ∞ del plano z, sus imágenes pasará en el plano w por la imagen del punto del ∞. Luego, las imágenes de dichas rectas son circunferencias que pasan por el punto 1 del plano w y son perpendiculares al eje real, como se muestra en la Figura 2-2. La recta $x = 0$ se transforma en la

circunferencia unidad $|w| = 1$, hecho ya conocido, pues la imagen de $\mathrm{Re}\, z > 0$ es el disco $|w| < 1$. La recta $x = 0.2$ se transforma en la circunferencia indicada con 0.2 en la figura, y así sucesivamente.

Las rectas $y = c$ pasan por $z = \infty$ y por consiguiente, sus imágenes pasan por $w = 1$. Como las rectas $y = c$ cortan perpendicularmente a la $x = 0$ sus imágenes cortarán ortogonalmente a la circunferencia $|w| = 1$. Por lo que sus imágenes son circunferencias tangentes al eje u en el punto $w = 1$, como se indica en la figura. Por ejemplo, la semirrecta $y = -0.2$, $x > 0$ se transforma en el arco circular -0.2 de la Figura 2-2.

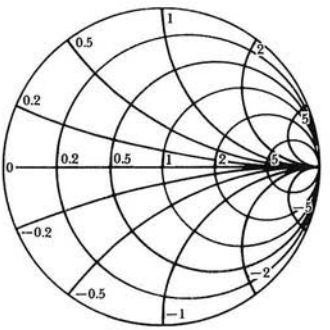


Figura 2-2

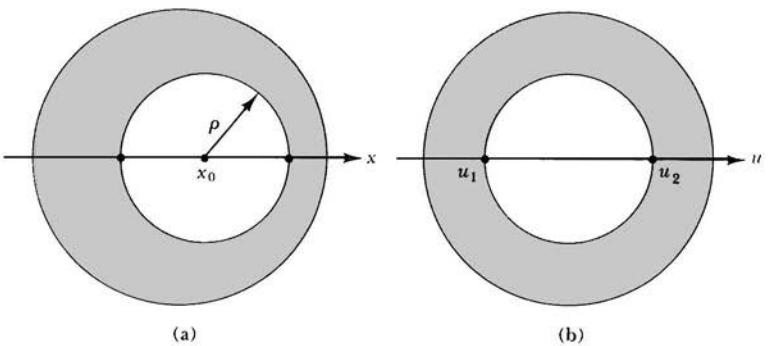


Figura 2-3

Ejemplo 2.2. Designemos por D el dominio limitado por dos circunferencias C y C_0, una de las cuales es interior a la otra. Hallar una representación conforme que aplique D sobre una corona circular. (Figura 2-3).

Efectuando, si es preciso, una semejanza, podemos suponer que la circunferencia exterior es $|z| = 1$, y que la circunferencia interior C tiene su centro en cierto punto $x_0 > 0$. El radio ρ de C verifica, por lo tanto, la condición $\rho + x_0 < 1$. Vamos a aplicar $|z| < 1$

sobre $|w| < 1$ de tal modo que la imagen C^* de C sea una circunferencia $|w| = \rho^*$ con centro en el origen. Por el Teorema 2.2 el interior de $|z| = 1$ se transformará en el interior de $|w| = 1$, y el exterior de C se transformará en el exterior de C^*. Por lo que D se aplicará sobre el anillo, como se pedía. Por el Teorema 2.4, la transformación

$$w = \frac{\alpha - z}{\alpha z - 1}, \qquad -1 < \alpha < 1, \quad (2.12)$$

aplica $|z| < 1$ sobre $|w| < 1$, nos resta tan sólo determinar el valor de α Como α es real dos puntos conjugados se transforman en puntos conjugados, por lo cual C^* quedará dividida en dos partes iguales por el eje real del plano w, lo que demuestra que el centro w_0 de C^* es real. No es verdad que el centro de C se transforme en el centro de C^*. Sin embargo, sí se verifica que el diámetro

$$x_0 - \rho \leq x \leq x_0 + \rho$$

se transforma en el diámetro $u_1 \leq u \leq u_2$ de C^*, y por consiguiente, el centro w_0 de C^* verifica $2w_0 = u_1 + u_2$. Es decir,

$$2w_0 = \frac{(x_0 - \rho) - \alpha}{\alpha(x_0 - \rho) - 1} + \frac{(x_0 + \rho) - \alpha}{\alpha(x_0 + \rho) - 1}.$$

Imponiendo la condición $w_0 = 0$ se obtiene la ecuación cuadrática

$$\alpha^2 x_0 - \alpha(1 + x_0^2 - \rho^2) + x_0 = 0,$$

que posee dos raíces reales y distintas en el caso de que $1 + x_0^2 - \rho^2 > 2x_0$. condición que se satisface, pues $1 - x_0 > \rho$. Como el producto de sus raíces es igual a 1, una de ellas ha de verificar $|\alpha| < 1$. Llevando este valor de α a (2.12) se obtiene la transformación pedida.

Problemas

1. En la ecuación (2.10) es claro que $|w| < 1$ si y solamente si $|z - \alpha| < |z - \bar{\alpha}|$. Interpretar geométricamente este resultado relacionando las distancias de z a α y a $\bar{\alpha}$, y dibujar una figura en la que las propiedades de la transformación sean geométricamente evidentes.
2. Construir una familia uniparamétrica de aplicaciones bilineales que transformen el eje real en la circunferencia unidad. Basta para ello considerar la aplicación que transforma $0, \lambda, \infty$ en $-i, 1, i$, respectivamente, siendo λ un parámetro real. ¿Qué punto del

plano z se transforma en el centro de la circunferencia? ¿Para qué valores de λ la transformación lleva el semiplano superior sobre el disco $|w| < 1$, y para qué valores, sobre el dominio $|w| > 1$? Consultando el Teorema 2.3, decir si la familia obtenida de este modo contiene a todas las transformaciones bilineales que aplican el eje real sobre la circunferencia unidad, o si solamente contiene parte de ellas.

3. Aplicando el Teorema 2.4 a z/a y a w/b, obtener todas las aplicaciones bilineales que llevan el disco $|z| < a$ sobre el $|w| < b$.
4. Hallar todas las transformaciones bilineales que aplican $|z| < 1$ sobre $|w| > 1$.
5. Hallar todas las aplicaciones bilineales que aplican $z > 0$ sobre $|w| < 1$ y $z = i$ sobre $w = \frac{1}{2}$. Dado que un par de puntos inversos se transforman en otro par de puntos inversos, $z = -i$ se transforma en $w = 2$. Así pues, $(z - i)/(z + i) = \beta(w - \frac{1}{2})/(w - 2)$. Demostrar que para z real, es $|w| = 1$ si y solamente si $|\beta| = 2$.
6. Hallar todas las transformaciones bilineales que aplican $|z - 1| < 2$ sobre $w > 0$ y $z = 1$ sobre $w = i$.
7. Si en la ecuación de una transformación bilineal se multiplican a, b, c y d por un mismo número complejo distinto de 0, la transformación no varía. Por consiguiente, podemos suponer que $ad - bc = 1$. . Demostrar que una condición necesaria y suficiente para que una transformación bilineal en la que los coeficientes cumplen la ecuación anterior aplique $\operatorname{Im} z > 0$ sobre $\operatorname{Im} w > 0$ es que a, b c y d sean reales.
8. Demostrar que $X(t,0,1,\infty) = t$ y deducir de esta igualdad que cuatro puntos distintos z_i son concíclicos sí y solamente si $X(z_1, z_2, z_3, z_4)$ es real.

Grupos de transformaciones.

Un conjunto G de aplicaciones biyectivas de un dominio D sobre sí mismo forma un *grupo* si G contiene a la inversa T^{-1}, de cada transformación T perteneciente a G, y si G contiene conjuntamente con cada par T_1, T_2 su producto.

9. Demostrar que el conjunto G de todas las transformaciones lineales $Tz = az + b$ forma un grupo. Demostrar que los subconjuntos de G formados por las transformaciones cuyos coeficientes cumplen las condiciones

$$a = 1; \qquad a = 1, \quad b = \text{entero}, \qquad b = 0; \qquad b = 0, \quad |a| = 1.$$

también forman *grupos*. Se dice entonces que estos grupos son *subgrupos* del grupo inicial, G.

10. Demostrar que el conjunto de todas las transformaciones bilineales que aplican el disco unidad $|z| < 1$ sobre sí mismo forma un grupo.
11. Demostrar que el conjunto de todas las transformaciones bilineales forma un grupo, y que el subconjunto formado por aquéllas en que $ad - bc = 1$ forma un subgrupo. (Los lectores que estén familiarizados con las matrices 2-por-2 pueden abreviar bastante la demostración comprobando que si a

$$Tz = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{se le asocia la matriz} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

entonces el producto T_1T_2 está asociado con el producto de las matrices correspondientes a los factores.)

12. En relación con el Problema 11, demostrar que el conjunto de todas las transformaciones bilineales en las que a, b, c y d son números enteros y $ad-bc=1$ forma un grupo. Demostrar que

$$\operatorname{Im}\frac{az+b}{cz+d}=\frac{y}{|cz+d|^2}$$

y deducir de este hecho que el anterior grupo de transformaciones aplica el semiplano superior y el semiplano inferior sobre sí mismos. Este grupo recibe el nombre de *grupo modular*.

3. Funciones armónicas y representación conforme. Ya se ha hecho notar anteriormente que si la función h es analítica en D, entonces Re h e Im h son funciones armónicas, esto es, cada una de ellas es solución de la ecuación de Laplace. Este resultado es consecuencia de las condiciones de Cauchy-Riemann y del hecho de que h, y en consecuencia Re h e Im h, posean derivadas de todos los órdenes.

En el estudio de las funciones armónicas resulta en ocasiones sugestivo utilizar la terminología de la Física matemática. [1]

Si $\psi(x,y)$ es una solución de la ecuación de Laplace,

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0,$$

entonces las curvas $\psi(x,y)=c$, son c constante, son las líneas de corriente de un flujo plano de un fluido no viscoso, incompresible e irrotacional. Dichas curvas pueden considerarse también como líneas de fuerza de un campo magnético o electrostático plano, y asimismo, como las líneas de flujo calorífico de un cuerpo plano en estado térmico estacionario. Por consiguiente, si $h(z)$ es analítica en un dominio D, las curvas Im $h(z)=c$ son las líneas de corriente o de fuerza descritas arriba. Se verifica también que las curvas Re $h(z)=c$ son ortogonales a las anteriores, y representan en los dos primeros casos las líneas equipotenciales, y en el ejemplo de la transmisión del calor, las líneas isotérmicas. (La ortogonalidad de las familias de curvas Re $h=c$ y Im $h=c$ para $h'(z)\neq 0$ se obtuvo en el Capítulo 2, Ejemplo 1.1, como una consecuencia de las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Esta propiedad se sigue también del hecho de ser conforme la aplicación $w=h(z)$ en los puntos en los que $h'(z)\neq 0$.)

[1] La terminología anterior se utiliza aquí con el único fin de sugerir algunas aplicaciones y de proporcionar un modelo físico concreto a aquellos lectores que prefieran razonar sobre casos concretos. Los lectores no familiarizados con esta terminología pueden omitirla sin más, y seguir el razonamiento matemático.

Si $h = \phi + i\psi$, la *velocidad compleja* del flujo plano descrito antes, se define como $\phi_x + i\phi_y$, designándose mediante subíndices las derivadas parciales primeras respecto a la variable correspondiente; así

$$V = \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Re} h - i \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Im} h.$$

Los lectores que ya conozcan el concepto de gradiente observarán que las componentes del vector V son las mismas que las de grad ϕ. Una discusión más detallada del concepto de velocidad compleja puede verse en la Sección 6 del Capítulo 2. Aquí nos es suficiente señalar que, por las condiciones de Cauchy-Riemann, $V = \psi_y - i\psi_x$, y que por consiguiente, la pendiente del vector V es igual a $-\psi_x/\psi_y$, que es la pendiente de la curvas $\psi(x,y) = c$. Por lo tanto, V es tangente a las líneas de corriente. Por las ecuaciones de Cauchy-Riemann, se tiene también $V = \phi_x - i\psi_x$ o sea,

$$V = \overline{h'(z)}. \tag{3.1}$$

Los hechos que acabamos de describir hacen que las funciones de variable compleja sean extraordinariamente útiles, para atacar numerosos problemas de Física teórica y aplicada. Por ejemplo, las líneas de corriente de la función $h(z) = z^2$ son la familia de hipérbolas $2xy = c$, que describen el movimiento de un fluido ideal en un cuadrante (Figura 3-1). Su velocidad compleja es $2\bar{z}$.

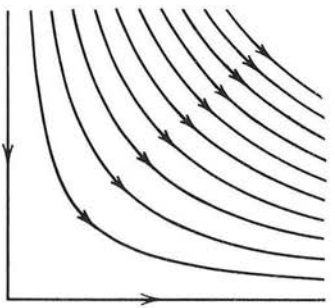


Figura 3-1

Otro ejemplo interesante lo constituye la función $h(z) = \log z$. Esta función no es uniforme, pero su derivada $1/z$, sí lo es. La velocidad compleja correspondiente es $V = 1/\bar{z}$ que en coordenadas polares toma la forma $V = e^{i\theta}/r$ por lo que las líneas de corriente son rayos que parten del origen. Por este motivo, se dice que la función $\log z$ es la función analítica asociada a una fuente situada en el punto $z = 0$. Análogamente, a una fuente en el punto ϵ se le asocia la función $\log(z - \epsilon)$, y un sumidero situado en $-\epsilon$ puede representarse por la función $-\log(z + \epsilon)$. Si se consideran simultáneamente una fuente y

un sumidero como los anteriores, y si sus fuerzas respectivas se multiplican por el factor $1/(2\epsilon)$, el sistema resultante puede representarse mediante la función

$$\frac{1}{2\epsilon}[\log(z-\epsilon)-\log(z+\epsilon)].$$

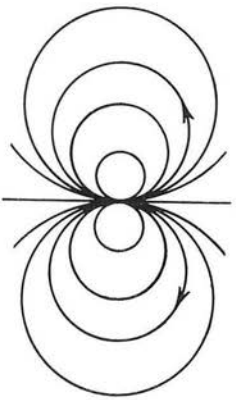


Figura 3-2

Cuando $\epsilon \longrightarrow 0$ la expresión anterior tiene como límite

$$-\frac{d}{dz}\log z = -\frac{1}{z},$$

que es la función analítica asociada a un dipolo. En este caso

$$\operatorname{Im} h(z) = \frac{y}{x^2+y^2}$$

por lo que las líneas de corriente son circunferencias tangentes al eje x, como se muestra en la Figura 3-2. La velocidad es $1/\bar{z}^2 = e^{2i\theta}/r^2$.

La teoría anterior se enriquece mucho estudiando el comportamiento de un flujo en una representación conforme. Sea $w = f(z)$ una biyección que represente el dominio D del plano z conformemente sobre el dominio $f(D)$ del plano w. Se demostrará en la Sección 6 que la biyección inversa, $z = g(w)$ también es analítica. Si $h(z)$ es una función analítica asociada un flujo en D como $h[g(w)]$ es analítica en $f(D)$, las curvas $\operatorname{Im} h[g(w)] = c$ y $Re\, h[g(w)] = c$, que son las imágenes de $\operatorname{Im} h(z) = c$ y $\operatorname{Re} h(z) = c$, respectivamente, están también asociadas a un flujo en el plano w. *Por consiguiente, en una representación conforme las líneas de corriente y las líneas equipotenciales de un flujo se transforman en líneas de corriente y en líneas equipotenciales, respectivamente.*

Para ilustrar las ideas anteriores, consideremos en el plano z el flujo asociado a la función $h(z) = \log z$. En este caso, las líneas de corriente, $\arg z = c$, son radios que desde $z = 0$ llegan hasta $z = \infty$. En la transformación

$$z = \frac{w - 1}{w + 1}$$

la función $h(z)$ se convierte en

$$\log\left(\frac{w - 1}{w + 1}\right).$$

El punto $z = 0$ se transforma en $w = 1$ y $z = \infty$ en $w = -1$. Luego, los rayos de origen 0 se transforman en arcos de circunferencia que unen los puntos $w = 1$ y $w = -1$. La ecuación de esta familia de circunferencias es $\arg z = c$, o sea,

$$\arg\frac{w - 1}{w + 1} = c.$$

Las curvas equipotenciales $\log |z| = c$ son circunferencias, y sus imágenes forman la familia de circunferencias

$$\left|\frac{w - 1}{w + 1}\right| = e^c$$

respecto a las cuales los puntos $+1$ y -1 son inversos. Las líneas equipotenciales y las líneas de corriente en el plano w se muestran en la Figura 3-3. Esta configuración aparece en conexión con cierto número de problemas físicos interesantes.

Consideremos ahora la aplicación $w = z^{a/\pi}$, siendo a una constante que satisface la limitación $0 < a < 2\pi$. En coordenadas polares,

$$z = re^{i\theta}, \qquad w = r^* e^{i\theta^*} = r^{a/\pi} e^{i\theta a/\pi},$$

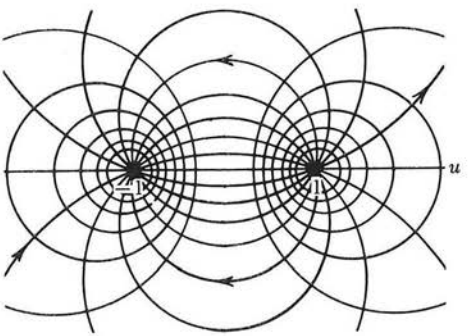


Figura 3-3

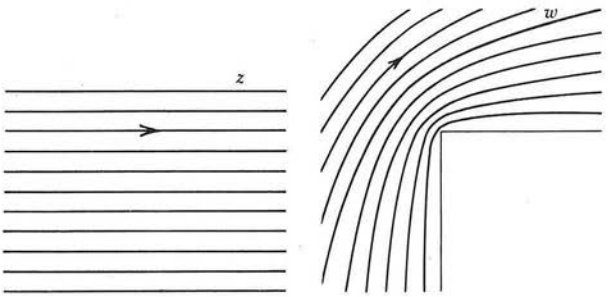


Figura 3-4

y por lo tanto, el semiplano superior $0 < \theta < \pi$ se aplica biunívocamente sobre el sector $0 < \theta^* < a$ del plano w. Las líneas de corriente de la función $h(z) = z$ forman el haz de rectas paralelas $y = c$ y representan un flujo uniforme paralelo al eje x. En la aplicación anterior las nuevas líneas de corriente verifican $\operatorname{Im} w^{\pi/a} = c$, y representan el flujo alrededor de una esquina en el plano w, como se ve en la Figura 3-4. Cuando $a \neq \pi$ la aplicación $w = z^{a/\pi}$ no es conforme en el punto $z = 0$ pues los ángulos con vértice en el origen quedan multiplicados por el factor a/π. Sin embargo, la representación respeta la tangencia de curvas en el origen.

La función $w = z^{a/\pi}$ resulta útil para resolver algunos problemas de representación conforme. Supongamos que, por ejemplo, sea necesario representar conformemente la región semicircular $|z| < 1, 0 < \theta < \pi$, sobre el semiplano superior, como se muestra en la Figura 3-5. La transformación bilineal

$$\zeta = \frac{1 + z}{1 - z}$$

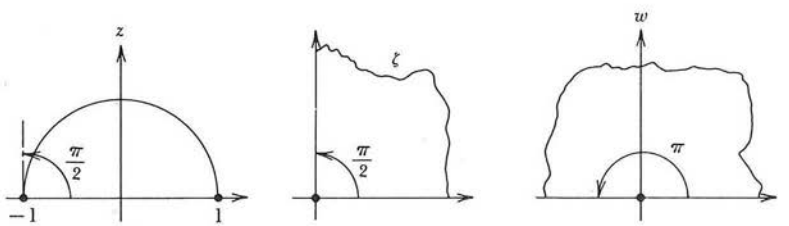


Figura 3-5

aplica -1 en 0 y 1 en ∞. Por consiguiente, el diámetro $-1 \leq x \leq 1$ y la semicircunferencia se transforman en rectas, pues sus imágenes han de pasar por 0 e ∞. El diámetro se transforma en $\operatorname{Re} \zeta > 0$, y por la preservación de ángulos la semicircunferencia ha de transformarse en $\operatorname{Im} \zeta > 0$. Se comprueba sin dificultad que la región semicircular se aplica sobre el primer cuadrante del plano ζ. La transformación $w = \zeta^2$ duplica los ángulos con vértice en el origen, y por consiguiente, la representación de la región semicircular que se desea obtener es

$$w = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2. \tag{3.2}$$

Se expone a continuación una aplicación más refinada de esta misma técnica. Consideremos la región que se obtiene al suprimir del plano w el segmento del eje real cuyos extremos son los puntos $w = -1$ y $w = 1$ y supongamos que se desea representar esta región del plano w sobre el exterior de una curva lisa cerrada C de tal forma que los bordes del corte se apliquen sobre C. Como C es una curva lisa, los ángulos exteriores en los extremos del corte, $w = +1$ y $w = -1$ han de aplicarse sobre ángulos de valor π. Haremos que estos ángulos de valor π tengan sus vértices en $z = +1$ y $z = -1$, respectivamente. A este objeto consideramos la transformación

$$\frac{z-1}{z+1} = \left(\frac{w-1}{w+1}\right)^{1/2}$$

tomando la rama de la raíz cuadrada que es positiva para $v = 0$, $u < 1$. Esta transformación aplica $w = 1$ sobre $z = 1$ y $w = -1$ sobre $z = -1$ y al mismo tiempo divide por dos los ángulos exteriores con vértice en los puntos $w = 1$ y $w = -1$, como se muestra en la Figura 3-6. Elevando al cuadrado los dos miembros de la ecuación y despejando w se tiene

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \tag{3.3}$$

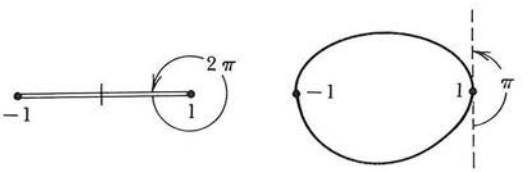


Figura 3-6

por lo cual la derivada $dw/dz = 0$ se anula solamente para $z = 1$ y $z = -1$. Al hacer $z = e^{i\theta}$ se tiene $w = \cos\theta$, y por consiguiente, los dos bordes del corte $-1 \leq w \leq 1$, se aplican sobre la circunferencia unidad $|z| = 1$.

Con mayor generalidad, tomando $z = re^{i\theta}$ se obtiene

$$u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta, \qquad v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\operatorname{sen}\theta \tag{3.4}$$

y así la circunferencia $r = c > 1$ se transforma en una elipse cuyos ejes mayor y menor son, respectivamente, $c + 1/c$ y $c - 1/c$. Por otra parte, las rectas radiales $\theta = c$ se transforman en cuadrantes de hipérbola, cuya ecuación general es

$$\frac{u^2}{\cos^2\theta} - \frac{v^2}{\operatorname{sen}^2\theta} = 1.$$

Como las circunferencias $r = c$ y las rectas $\theta = c$ son ortogonales en el plano z, sus imágenes en el plano w, que son respectivamente las familias de elipses e hipérbolas descritas arriba, son ortogonales, como se ve en la Figura 3-7. Los focos de todas ellas se encuentran en los puntos $w = \pm 1$. La ecuación (3.3) define una representación biyectiva de la región $|z| > 1$ sobre el plano w cortado desde $w = -1$ hasta $w = 1$; el haz de elipses e hipérbolas homofocales y ortogonales se llama *sistema homofocal de coordenadas* para el dominio $|z| > 1$. Se comprueba fácilmente que la aplicación inversa es

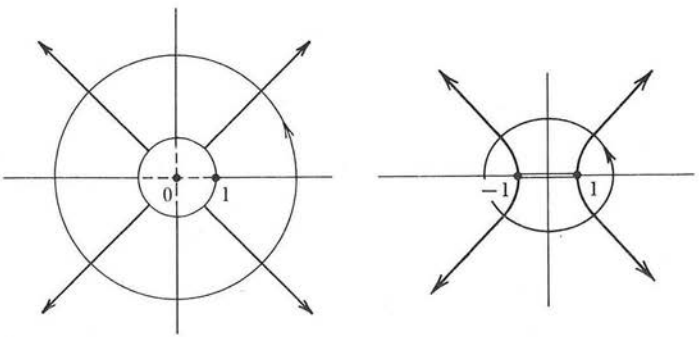


Figura 3-7

$$z = w + (w^2 - 1)^{1/2} \tag{3.5}$$

siendo la raíz considerada positiva para $v = 0$, $u > 1$. Como se muestra en los Problemas 5-7 de esta Sección, se puede utilizar la representación anterior en el estudio de algunos flujos.

Hasta ahora hemos venido considerando flujos definidos por una función analítica $h = \phi + i\psi$, por lo que para estudiar el comportamiento del flujo en la representación $z = g(w)$ ha sido suficiente considerar la función compuesta $h[g(w)]$. En ocasiones, solamente se discute el comportamiento de una de las funciones armónicas ϕ o ψ, no siendo posible, aparentemente, obtener la función analítica $h = \phi + i\psi$ Así ocurre, por ejemplo en el problema de determinar la temperatura en cada punto de una plancha de grosor uniforme una vez alcanzado el estado estacionario. Para resolver este problema es preciso construir una función armónica ϕ que verifique sobre el contorno de la pieza, ciertas condiciones prescritas de antemano; pero no se sabe nada sobre la función conjugada ψ.

Una representación conforme y biyectiva $z = g(w), w = f(z)$, transforma una función armónica ϕ en otra función armónica ϕ^* definida así:

$$\phi^*(u,v) = \phi(x,y) \quad \text{siempre que} \quad x + iy = g(u + iv). \tag{3.6}$$

Si ϕ es armónica en D, la nueva función ϕ^* es armónica en $f(D)$. Efectivamente, en el entorno de cualquier punto (x, y) de D podemos construir una conjugada armónica local ψ tal que la función

$$h(z) = \phi(x,y) + i\psi(x,y)$$

sea analítica. Se comprueba sin dificultad que

$$\phi^*(u,v) = \operatorname{Re} h[g(w)]$$

y como ϕ^* es la parte real de una función analítica, es armónica.

La correspondencia entre ϕ y ϕ^* definida por (3.6) permite obtener condiciones de contorno para ϕ^* a partir de las de ϕ. En particular si sobre una cierta curva C se verifica $\phi = c$, c constante, entonces se verifica $\phi^* = c$ sobre la curva imagen en la representación, C^*. Este hecho coincide con el resultado, ya conocido, de que las líneas equipotenciales se transforman en equipotenciales.

La idea central de las observaciones anteriores consiste en que toda función armónica ϕ está asociada localmente a una función analítica $h = \phi + i\psi$, lo que hace que se puedan estudiar mediante las mismas técnicas de representación conforme utilizadas en el estudio de flujos otros problemas en los que intervienen funciones armónicas.

En el ejemplo siguiente se muestra la construcción de una función armónica por representación conforme.

Ejemplo 3.1. Hallar una función que sea armónica para $|z| < 1$ y que sobre las semicircunferencias de $|z| = 1$ determinadas por $x > 0$ y $x < 0$, tome los valores 0 y 1, respectivamente.

Los puntos $-i, 1, i$ pertenecen al arco correspondiente al valor de contorno 0, y se aplican respectivamente sobre $0, 1, \infty$ por la transformación bilineal

$$w = -i\frac{z+i}{z-i}. \tag{3.7}$$

Esta transformación aplica el disco $|z| < 1$ sobre el semiplano superior $\operatorname{Im} w > 0$, y transforma la función armónica buscada, ϕ en otra función armónica ϕ^*. Como $\phi = 0$ sobre la semicircunferencia $e^{i\theta}, -\pi/2 < \theta < \pi/2$, sobre la imagen de este arco, que es el semieje real positivo $0 < u < \infty$ se verifica $\phi^* = 0$. Análogamente $\phi^* = 1$ sobre $-\infty < u < 0$, pues esta semirrecta es la imagen del arco sobre el cual $\phi = 1$. Ver la Figura 3-8.

El problema inicialmente propuesto para el disco $|z| < 1$ se ha transformado de este modo en un problema mucho más sencillo para el semiplano $\operatorname{Im} w > 0$. En este último problema se requiere que ϕ^* pase de tomar el valor 0 sobre el semieje real positivo a tomar el valor 1 sobre el semieje negativo. Una solución evidente la da la función $\phi^* = (1/\pi) \operatorname{Arg} w$, que es armónica por serlo $\operatorname{Im} \operatorname{Log} w$ y de la cual se obtiene

$$\phi(x,y) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Arg} \frac{z+i}{z-i}(-i).$$

Multiplicando el numerador y el denominador de la fracción que aparece en el segundo miembro por $\bar{z} + i$, se halla que ϕ verifica

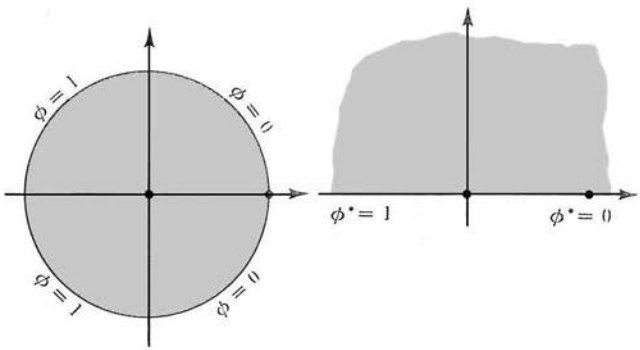


Figura 3-8

$$\tan \pi\phi = \frac{1 - x^2 - y^2}{2x}, \qquad 0 \leq \phi \leq 1.$$

Esta fórmula muestra que las líneas equipotenciales $\phi = c$ son circunferencias. A esta misma conclusión puede llegarse con mayor sencillez, sin recurrir a la fórmula anterior, razonando del modo siguiente: las equipotenciales en el plano z son las imágenes de las del plano w en la representación (3.7). Como estas últimas líneas son rectas que pasan por 0 e ∞, aquéllas han de ser circunferencias que pasen por i y $-i$.

La función ϕ puede interpretarse físicamente de varias formas. Puede considerarse como la temperatura de estado estacionario del disco cuando la mitad de su contorno se mantiene a la temperatura 0 y la otra mitad a la temperatura 1. También puede considerarse como el potencial electroestático en el interior de un cilindro cortado a lo largo de un plano diametral, etc.

Problemas

1. Si λ es una constante real, la función $f(z) = e^{-i\lambda}z$ representa un flujo uniforme segun una dirección que forma con el eje x un ángulo λ (a) Comprobar lo anterior hallando las líneas de corriente y la velocidad compleja. (b) En el Ejemplo 6.1 del Capítulo 2 se discuten tres flujos asociados a la función $\log z$. Repasarlos.
2. En el Ejemplo 3.1, demostrar que el valor de ϕ en el centro del círculo es el promedio de los valores sobre la circunferencia. Este hecho pone de manifiesto una importante propiedad de las funciones armónicas.
3. La transformación conforme $z = e^w$ da $x = e^u \cos v$, $y = e^u \operatorname{sen} v$. Comprobar que en esta correspondencia

$$\phi(x,y) = x^2 - y^2 \quad \text{se transforma en} \quad \phi^*(u,v) = e^{2u}(\cos^2 v - \operatorname{sen}^2 v).$$

Demostrar que tanto ϕ como ϕ^* son armónicas, y que la hipérbola C, sobre la cual $\phi(x, y) = c$, se transforma en otra curva C^*, sobre la cual $\phi^*(u, v) = c$. Demostrar que

$$\phi(x,y) = \operatorname{Re} z^2 \qquad \text{y} \qquad \phi^*(u,v) = \operatorname{Re}(e^w)^2.$$

4. Supongamos que $w = g(z)$ sea analítica y que $\phi^*(u,v) = \phi(x,y)$ como se explicó en el texto. Si ϕ^* es dos veces diferenciable, entonces $\phi_x = \phi_u{}^* u_x + \phi_v{}^* v_x$ y ϕ_{xx} pueden calcularse utilizando la igualdad anterior. Se concluye que

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = |g'(z)|^2(\phi^*{}_{uu} + \phi^*{}_{vv}).$$

5. *Comportamiento de un flujo al rebasar un obstáculo circular.* La función $H(w) = w$ representa un flujo uniforme paralelo al eje real del plano w, y puede considerarse también como un flujo uniforme en el plano cortado desde -1 hasta 1. Representando esta región sobre el exterior de la circunferencia $|z| = 1$, obtener la función

$$h(z) = H\left[\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

correspondiente al flujo en el plano z. Las líneas de corriente $\operatorname{Im} w = c$, c constante, se transforman en líneas de corriente $\operatorname{Im}(z + 1/z) = c$. Comprobar directamente que $\operatorname{Im} h(z)$ es constante cuando $|z| = 1$ y que la velocidad compleja $\overline{h'(z)}$ es un vector tangente a la circunferencia $|z| = 1$ cuando $|z| = 1$. Como $h(z) \to z/2$, cuando $|z| \to \infty$, el flujo es

prácticamente uniforme en puntos distantes. En la Figura 3-9 se sugiere que el resultado anterior describe el comportamiento de una corriente líquida en un canal profundo con un obstáculo en el fondo; el flujo alrededor de un obstáculo circular se obtendría por simetría respecto del eje real de la Figura 3-9.

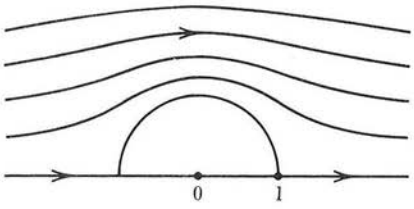


Figura 3-9

6. *Comportamiento de un flujo al rebasar un segmento.* Hallar un flujo en el plano w con un corte desde -1 hasta 1, que tienda hacia $e^{i\lambda}w$ cuando $|w| \to \infty$, siendo λ un número real. ¿En qué puntos de los bordes inferior y superior del corte es igual a 0 la velocidad? Idea de la solución: Hágase girar el flujo obtenido en el problema anterior, $(\frac{1}{2})(z + z^{-1})$ sustituyendo z por $e^{i\lambda}z$. Se obtiene así

$$h(z) = \frac{1}{2}\left(e^{i\lambda}z + \frac{e^{-i\lambda}}{z}\right).$$

Se utiliza ahora la transformación (3.5) a fin de obtener $H(w)$ a partir de $h(z)$. Como cada rama de la raíz cuadrada satisface

$$(w + \sqrt{w^2 - 1})(w - \sqrt{w^2 - 1}) = 1,$$

se hallará que

$$H(w) = w\cos\lambda + i\sqrt{w^2 - 1}\,\mathrm{sen}\,\lambda.$$

7. *Comportamiento de un flujo al rebasar una elipse.* Usando la transformación (3.3) hallar una función $H(w)$ que represente el flujo que rebasa una elipse

$$\frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{3} = 1$$

y que se comporte como el flujo w en puntos distantes con lo que en el infinito el flujo será uniforme. (Hallar una función de flujo en la región del plano z exterior a la circunferencia imagen de la elipse dada.)

4. La transformación de Schwarz-Christoffel. Se expondrá a continuación una discusión intuitiva de un procedimiento para determinar una función analítica que represente el interior de un polígono sobre el semiplano superior, así como su aplicación al caso en que uno o más vértices del polígono dado se encuentren en el ∞.

En el Capítulo 4, Sección 1, pueden verse las definiciones analíticas de las nociones más familiares relativas a polígonos. Sin embargo, para la discusión intuitiva que se expone aquí, hemos considerado que el significado de los distintos términos queda suficientemente aclarada por la Figura 4-1. Las flechas superpuestas a los lados, indican que el polígono está orientado positivamente, es decir, al recorrer el contorno en el sentido señalado el interior del polígono está siempre del lado izquierdo del camino.

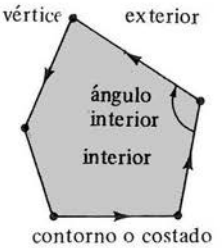


Figura 4-1

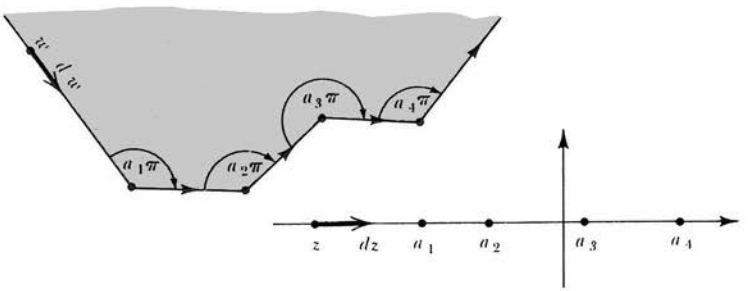


Figura 4-2

Consideremos en el plano w un polígono orientado positivamente, y sean $\alpha_1\pi$, $\alpha_2\pi$, . . . , $\alpha_n\pi$. los ángulos interiores en sus sucesivos vértices. Supongamos que la función $w = f(z)$ establezca una representación conforme del interior del polígono sobre el semiplano superior. Por consiguiente $f(z)$ es analítica para $y > 0$ y continua cuando $y \geq 0$. Supondremos también que la función inversa $z = g(w)$ es analítica en el interior del polígono y continua en la región cerrada formada por el polígono y su interior. Como la frontera del polígono se aplica sobre el eje real, los sucesivos vértices se aplican sobre sendos puntos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de dicho eje, como se indica en la Figura 4-2.

La diferencial de la función $f'(z)$, en el punto z es, por definición,

$$dw = f'(z)\,dz. \tag{4.1}$$

Suponiendo que la relación $w = f(z)$, $z = g(w)$ sea analítica no sólo en el interior del polígono sino también sobre su contorno, podríamos hacernos una idea de la naturaleza de f estudiando sobre los lados del polígono la relación entre dw y dz.

Tomemos para ello un punto w interior a uno de los lados del polígono (es decir, un punto de un lado que no sea un vértice) y llamemos z al punto del plano z que sea imagen de w en la transformación. Tomando como dz un vector positivo sobre el eje real del plano z es de esperar que dw sea un vector cuya recta soporte sea uno de los lados del polígono y cuyo sentido sea el de la orientación positiva, como se muestra en la Figura 4-2. En este caso

$$\arg f'(z) = \arg \frac{dw}{dz}$$

ha de permanecer constante cuando w recorra un lado, partiendo de un vértice y llegando hasta el siguiente. Sin embargo, cuando el punto móvil w pasa por un vértice de ángulo $\alpha_1\,\pi$, entonces arg dw varía en $\pi(1-\alpha_1)$. (Si $\alpha_1 = 1$, su variación es nula.) Como arg dz es siempre igual a 0, en la ecuación (4.1) es de esperar que $\arg f'(z)$ sea constante a la izquierda de a_1 y experimente en el punto a_1 un salto de valor igual a $\pi(1 - \alpha_1)$.

Observemos ahora el comportamiento de la función $\arg(z - a_1)$ en el entorno de a_1 cuando z se mueve sobre el eje real. Como se muestra en la Figura 4-3, el valor de $\arg(z - a_1)$ disminuye desde π hasta 0 cuando z pasa de un valor menor que a_1 hasta un valor mayor haciendo un pequeño rodeo alrededor de a_1, por el semiplano superior. Por consiguiente el argumento de $z - a_1$ varía en $-\pi$ y por tanto, el argumento de

$$(z - a_1)^{\alpha_1 - 1}$$

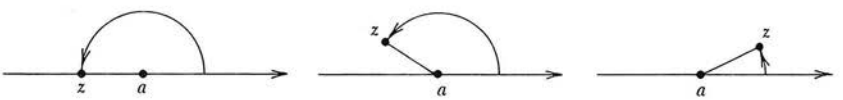


Figura 4-3

varía en $\pi(1 - \alpha_1)$. Esta última función imita en a_1 el comportamiento de $f'(z)$ que se ha descrito. Si $f'(z)$ tuviera esta función como factor entonces el argumento de $f'(z)$ se comportaría en a_1 de la forma requerida. En cada vértice la situación es enteramente análoga, lo que sugiere tomar

$$f'(z) = \gamma(z - a_1)^{\alpha_1 - 1}(z - a_2)^{\alpha_2 - 1} \cdots (z - a_n)^{\alpha_n - 1}$$

siendo γ una constante. Luego, resulta plausible que la ecuación diferencial

$$\frac{dw}{dz} = \gamma(z - a_1)^{\alpha_1 - 1}(z - a_2)^{\alpha_2 - 1} \cdots (z - a_n)^{\alpha_n - 1} \tag{4.2}$$

determinará una representación en la que el comportamiento de arg dw/dz sea el deseado, y por consiguiente, aplicará un polígono cuyos ángulos sean los prescritos en un semiplano.

Como es evidente, la constante compleja γ y los puntos reales $a_1, a_2, \ldots, a_n$ han de elegirse de manera que el polígono resultante sea el polígono dado. Dicho de otra forma, en el mejor de los casos, la ecuación (4.2) determinará tan sólo los ángulos del polígono pero no las longitudes de sus lados.

Aunque la ecuación (4.2) no se ha deducido rigurosamente, se puede demostrar su validez. La demostración depende del teorema de representación de Riemann, que se enuncia en la Sección 8, y del principio de reflexión de Schwarz, demostrado en la Sección 7. El teorema de Riemann garantiza la existencia de la representación $w = f(z)$ del polígono sobre un semiplano, y el teorema de Schwarz proporciona un método para extender el dominio de analiticidad de f. Se halla entonces que f''/f' admite un desarrollo en fracciones simples que por integración da inmediatamente (4.2). Luego, existen siempre constantes $\gamma, a_1, a_2, \ldots, a_n$ tales que (4.2) dá la representación requerida.

No se detallarán aquí los pasos de la demostración anterior, pero se mostrará que (4.2) proporciona la representación deseada en algunos casos de interés. En las aplicaciones siguientes el polígono no será un polígono cerrado simple, sino que uno o más de sus vértices se hallará en el punto $w = \infty$ Aplicando uno de los vértices del polígono en $z = \infty$ se simplifica un poco la ecuación (4.2). Así lo haremos en las aplicaciones siguientes.

En nuestro primer ejemplo, el interior de la semibanda Im $w > 0$, $|\text{Re } w| < b$, que se muestra en la Figura 4-4, se representa sobre el semiplano z superior, de forma tal que los vértices $-b$ y b se transformen en $z = -1$ y $z = 1$. Como los ángulos en los puntos $-b$ y b son $\pi/2$, sus magnitudes α_1 y α_2 son ambas iguales a $1/2$, y la ecuación (4.2) da

$$\frac{dw}{dz} = \gamma(z + 1)^{-1/2}(z - 1)^{-1/2}.$$

Ahora bien, dw/dz ha de ser real y positiva cuando w se encuentre en el segmento del eje real de extremos $-b$ y b, lo que sugiere tomar la constante γ de manera que

$$\frac{dw}{dz} = \frac{a}{(1 - z^2)^{1/2}} \tag{4.3}$$

siendo $a > 0$ y $(1 - x^2)^{1/2} > 0$ para $|x| < 1$. De (4.3) se sigue $w = a \operatorname{arcsen} z_0$, o sea, $z = \text{sen } w/a$. Para que los puntos $w = -b, +b$ se correspondan con los $z = -1, +1$, conviene tomar $a = 2b/\pi$. Por tanto $z = \text{sen}(\pi w/2b)$.

Si se toma $b = \pi/2$ resulta $z = \text{sen } w$, aplicación que ya se estudió en la Sección 2 del Capítulo 2. Se vió allí que la semibanda $|u| < \pi/2$, $v > 0$ se transforma en el semiplano

superior, y que las rectas $u = \text{const.}, v = \text{const.}$ se transforman en un sistema ortonormal de coordenadas homofocales en el plano z, como se muestra en la Figura 4-5.

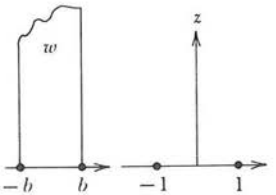


Figura 4-4

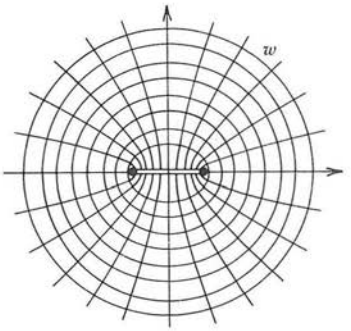


Figura 4-5

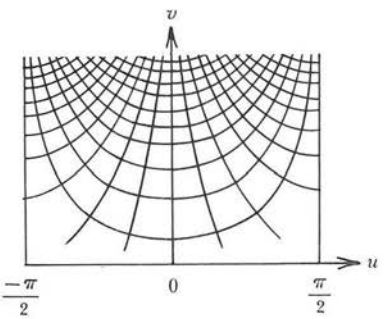


Figura 4-6

Se puede utilizar la transformación anterior para determinar el campo electroestático creado por un cilindro elíptico cargado, o por una lámina plana a la que se le ha recortado una banda de anchura constante, así como para hallar la circulación de un líquido alrededor de un perfil elíptico y el flujo que mana de una rendija del plano. Conviene considerar también las imágenes en el plano w del retículo de rectas coordenadas $x = x_0, y = y_0$ del plano z. Las respectivas ecuaciones de dichas imágenes son

$$\operatorname{sen} u \cosh v = x_0, \qquad \cos u \operatorname{senh} v = y_0$$

y sus gráficas se han representado en la Figura 4-6. Estas curvas pueden considerarse como líneas de corriente y equipotenciales de un flujo en una semibanda. Se dan otras aplicaciones de la transformación $z = \operatorname{sen} w$ en los Problemas 4.1 a 4.4 del final del capítulo.

Como segundo ejemplo, supongamos que en el semiplano w superior se efectúa una incisión de longitud finita a lo largo del eje imaginario, y que se desea representar la región resultante sobre el semiplano superior del plano z. Si se recorre en sentido positivo la frontera de la región considerada en el plano w los ángulos en los vértices son, respectivamente, $\pi/2, 2\pi$ y $\pi/2$, como se muestra en la Figura 4-7. Supongamos que dichos vértices se apliquen sobre $z = -1$, 0 y 1, respectivamente. Entonces (4.2) da

$$\frac{dw}{dz} = \gamma(z + 1)^{-1/2}z(z - 1)^{-1/2} = \frac{\gamma z}{(z^2 - 1)^{1/2}}.$$

Si hacemos $\gamma = a > 0$ una solución es

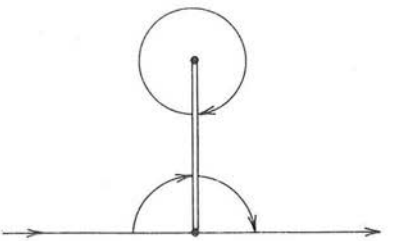


Figura 4-7

$$w = a(z^2 - 1)^{1/2}. \tag{4.4}$$

Se toma la rama de la raíz que es negativa cuando z se encuentra en la semirrecta $x < -1$ del eje real.

De la ecuación (4.4) se sigue $w^2 = a^2z^2 - a^2$. Por consiguiente, para que dos valores distintos $z_1 \neq z_2$ de z den el mismo valor de w es necesario y suficiente que $z_1 = -z_2$. En la región $z > 0$, no pueden existir dos puntos simétricos con respecto al origen, por lo que la transformación del dominio $\mathrm{Im}\, z > 0$ en la región del plano w ha de ser uno-a-uno. Análogamente, no puede existir un par de puntos $w_1 \neq w_2$ en $\mathrm{Im}\, w > 0$ que den el mismo valor de z.

Se puede efectuar un análisis más detallado escribiendo la transformación como composición (o producto) de tres transformaciones

$$\zeta_1 = a^2z^2, \qquad \zeta_2 = \zeta_1 - a^2, \qquad w = \sqrt{\zeta_2}.$$

La primera de ella abre como en abanico el semiplano y lo aplica biunivocamente sobre la totalidad del plano ζ_1 cortado a lo largo del semieje real positivo (Figura 4-8 (a).) La segunda efectúa una traslación paralela al eje real del plano ζ_1 como se ve en la Figura

4-8 (b). Finalmente, la tercera aplicación divide por dos los ángulos con vértice en el origen, transformando el plano cortado ζ_1 en la región que se muestra en la Figura 4-8 (c). Dado que cada una de estas transformaciones es una biyección, su composición (4.4) también lo es, y por tanto, (4.4) posee las propiedades requeridas.

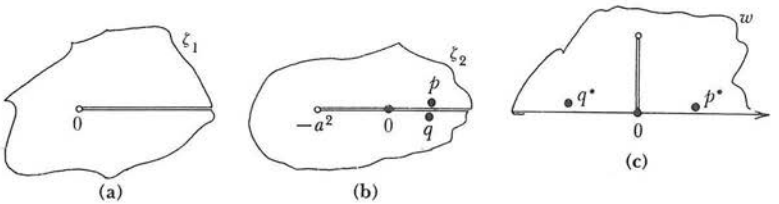


Figura 4-8

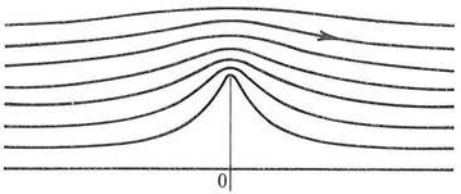


Figura 4-9

Las imágenes en el plano w de las líneas de corriente del flujo paralelo y uniforme en el plano z, asociado a la función $h(z) = z$, son las curvas

$$w = a[(x + iy)^2 - 1]^{1/2}, \qquad -\infty < x < \infty,$$

siendo y constante para una línea de corriente dada. Estas curvas describen el comportamiento del flujo al rebasar una barrera (Figura 4-9).

Como último ejemplo de aplicación de la fórmula de Schwarz-Christoffel efectuaremos una representación del semiplano w superior cortado a lo largo de una semirrecta paralela al eje real. (Figura 4-10.) Este dominio puede considerarse como el límite de un dominio limitado inferiormente por la línea poligonal $ABCD$, representada en la figura, cuando $C \to -\infty$ a lo largo del eje real. En el dominio límite se considera que A, C y D son

el punto del ∞, y que los ángulos de vértices B y C son respectivamente de valor 2π y 0. Si A, B, C y D se aplican respectivamente sobre $\infty, -1, 0$ y ∞, la fórmula (4.2) con $\gamma = a > 0$ da

$$\frac{dw}{dz} = a(z + 1)z^{-1} = a\left(1 + \frac{1}{z}\right) \tag{4.5}$$

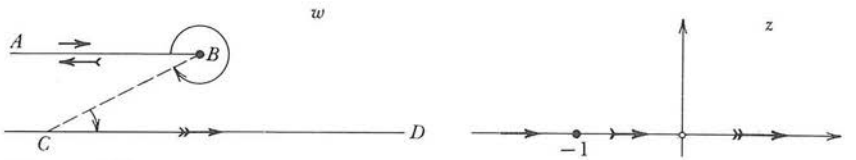


Figura 4-10

Claramente, una solución es

$$w = a(z + \log z). \tag{4.6}$$

La ecuación (4.5) muestra que dw/dz es real cuando x es real, y por consiguiente dw es paralelo a dx cuando x recorre los intervalos

$$-\infty < x < -1, \qquad -1 < x < 0, \qquad 0 < x < \infty$$

del eje real. Sobre estos intervalos (4.5) da, respectivamente

$$\frac{dw}{dx} > 0, \qquad \frac{dw}{dx} < 0, \qquad \frac{dw}{dx} > 0.$$

y los correspondientes valores de Im $\log z$ en (4.6) son $i\pi$, $i\pi$, 0. Para $x = -1$ se tiene $w = a(\pi i - 1)$, que es el punto B de la Figura 4-10.

Utilizando la información anterior se puede comprobar fácilmente que la frontera de la región del plano w se corresponde con el eje real del plano z, en la forma que sugieren las flechas de la figura. La correspondencia entre las fronteras es biunívoca si se conviene en distinguir los dos bordes del corte de extremo B. Por el Teorema 7-1, puede demostrarse que la correspondencia entre los dominios interiores también es biunívoca. Las rectas Im $\log z = c$, o en coordenadas polares, $\theta = c$, son las líneas de corriente de una fuente situada en el origen, y se aplican sobre las curvas

$$w = re^{ic} + \log r + ic, \qquad 0 < r < \infty.$$

Estas curvas son las líneas de corriente que se muestran en la Figura 4-11 (a). Las curvas ortogonales correspondientes a la familia $\operatorname{Re} \log z = c$, (o lo que es igual, $|z| = c$, siendo c constante) son

$$w = ce^{i\theta} + \log c + i\theta, \qquad 0 < \theta < \pi,$$

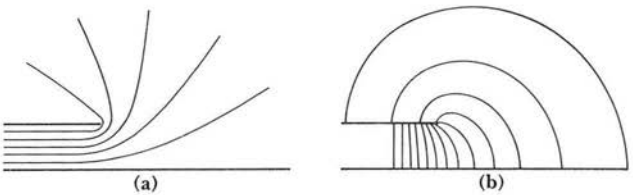


Figura 4-11

y pueden considerarse como las líneas de fuerza del campo mostrado en la Figura 4-11 (b). Si juntamente con la Figura 4-11 (a) se toma su simétrica respecto del eje real, la figura resultante describe el flujo a la salida de un canal. Efectuando la misma operación con la Figura 4-11 (b) el resultado muestra la dispersión de las líneas de fuerza en los bordes de las armaduras de un condensador plano.

Problemas

1. Demostrar que por el procedimiento de Schwarz-Christoffel se obtiene $w = \gamma z^{\alpha}$ como solución del problema de representar el interior de un ángulo α sobre un semiplano. ¿Qué efecto produce la constante compleja γ? (Aplicar el vértice del ángulo en $z = 0$ y el extremo abierto, en $z = \infty$.)
2. Una banda del plano w puede considerarse como un polígono con dos ángulos, ambos iguales a 0. Obtener la función $w = \gamma \log z + \beta$, siendo γ y β constantes, como solución del problema de representar la banda sobre el semiplano superior de tal manera que un "vértice" se aplique en 0 y el otro en ∞. (El caso $\gamma = 1$, $\beta = 0$ se estudió ya en el Capítulo 2.)
3. La transformación del Problema 2 es una composición de $\zeta = \log z$ y $w = \gamma\zeta + \beta$. Demostrar que siempre es posible determinar γ y β de forma que la transformación anterior represente una banda cualquiera sobre el semiplano superior, independientemente de la anchura y posición de aquella. La constante γ y la constante de integración β de la transformación general de Schwarz-Christoffel juegan un papel semejante; es decir, permiten efectuar una traslación, un giro y una homotecia arbitrarias.
4. El lecho de una corriente tiene un escalón; la ecuación del lecho es $w = t + i\pi$, $w = (1 - t)i\pi$, $w = t - 1$ para $-\infty < t \leqslant 0$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $1 \leqslant t \leqslant \infty$, respectivamente. Se desea aplicar la región del plano w que se halla por encima del lecho de la corriente sobre el semiplano $\operatorname{Im} z > 0$ de forma que $w = i$ se corresponda con $z = -1$ y $w = 0$ con $z = 1$.

Comprobar que una rama de la función $f(z) = (z^2 - 1)^{1/2} + \operatorname{argcosh} z$ satisface la ecuación diferencial asociada con el problema. (Se puede demostrar en efecto, que una rama de $w = f(z)$ proporciona la representación requerida.)

5. Se desea aplicar un rectángulo sobre el semiplano superior de modo que sus cuatro vértices se correspondan, respectivamente, con

$$-1/k, \quad -1, \quad 1, \quad 1/k,$$

siendo $0 < k < 1$. Obtener la ecuación diferencial

$$f'(z) = \frac{1}{(1 - z^2)^{1/2}(1 - k^2 z^2)^{1/2}}$$

eligiendo convenientemente la constante γ. No existe en este caso una primitiva elemental del segundo miembro, por lo que no es evidente que exista una solución f de la ecuación anterior. Se demuestra, sin embargo, en el Capítulo 3 que una función que resuelve el problema es la definida por $f(z)$

$$f(z) = \int_0^z \frac{d\zeta}{[(1 - \zeta^2)(1 - k^2\zeta^2)]^{1/2}} \qquad (*)$$

siendo aplicable a la transformación general de Schwarz-Christoffel un método constructivo parecido. La integral (*) es una *integral elíptica.*

6. Se desea representar un triángulo sobre el semiplano superior de tal modo que sus vértices se transformen en $0,1,\infty$. Escribir la ecuación diferencial para la función de representación (a) si el triángulo es equilátero, y (b) para un triángulo arbitrario.
7. Obtener ecuaciones diferenciales para las funciones que representan los dominios de la Figura 4-12 sobre el semiplano superior. Se desea que los "vértices" A, B, C y D se transformen en -1, 0, 1 y ∞, respectivamente.

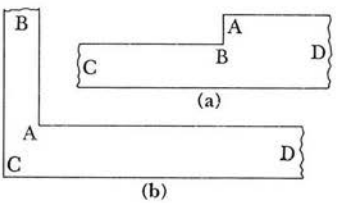


Figura 4-12

5. Polinomios de Hurwitz. Funciones positivas. Un *polinomio de Hurwitz* es un polinomio no constante que tiene todas sus raíces en el semiplano izquierdo. Así pues, si la descomposición factorial del polinomio es

$$f(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n), \tag{5.1}$$

entonces, $\operatorname{Re} z_k < 0$. Los polinomios de Hurwitz juegan un papel importante en los problemas de estabilidad de los sistemas mecánicos y eléctricos, y poseen otras muchas aplicaciones. Las mismas observaciones pueden hacerse con respecto a las funciones positivas, que se definirán más adelante.

El estudio de los polinomios de Hurwitz conduce a una sencilla operación llamada *paraconjugación.* Si $f(z)$ es una función racional cualquiera su *paraconjugada* se define como

$$f^*(z) = \overline{f(-\bar{z})}. \tag{5.2}$$

Por ejemplo, si

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n,$$

su paraconjugada es

$$f^*(z) = \bar{a}_0 - \bar{a}_1 z + \bar{a}_2 z^2 + \cdots + (-1)^n \bar{a}_n z^n.$$

En el caso de que $f(z)$ venga dada por la fórmula (5.1) su paraconjugada es

$$f^*(z) = (-1)^n \bar{a}_n(z + \bar{z}_1)(z + \bar{z}_2) \cdots (z + \bar{z}_n), \tag{5.3}$$

y por consiguiente, los ceros de f^* se obtienen por simetría respecto del eje imaginario, de los ceros de f. La misma conclusión es evidente a partir de la definición (5.2), pues sustituyendo z por $-\bar{z}_k$ en el primer miembro se obtiene $\overline{f(z_k)}$ en el segundo.

Como (5.2) implica que $f^*(iy) = \overline{f(iy)}$, es claro que

$$|f^*(iy)| = |f(iy)|, \qquad -\infty < y < \infty \tag{5.4}$$

Luego, si $g = f^*/f$, la función $w = g(z)$ aplica $\operatorname{Re} z = 0$ en $|w| = 1$. Veremos a continuación que si f es un polinomio de Hurwitz, la transformación $w = g(z)$ aplica el semiplano $\operatorname{Re} z > 0$ en el disco $|w| < 1$ y que la recíproca es esencialmente verdadera. Un desarrollo posterior conduce a una clase de funciones racionales que transforman en sí mismos los semiplanos derecho e izquierdo. En el Teorema 5.2 se da una caracterización completa de las funciones racionales que poseen esta propiedad.

Como ilustración de estas observaciones, consideremos el polinomio de Hurwitz más sencillo, $f(z) = 1 + z$. Entonces, $f^*(z) = 1 - z$ y

$$\frac{f^*(z)}{f(z)} = \frac{1 - z}{1 + z}, \qquad \frac{f(z) - f^*(z)}{f(z) + f^*(z)} = z.$$

La transformación

$$w = \frac{1 - z}{1 + z}, \qquad z = \frac{1 - w}{1 + w} \tag{5.5}$$

aplica $\operatorname{Re} z > 0$ sobre $|w| < 1$, como se ve por el Ejemplo 2.1 o por la Figura 5.1.

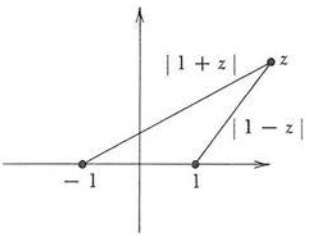


Figura 5-1

Por otra parte, es evidente que la transformación $w = z$ aplica cada uno de los semiplanos derecho e izquierdo sobre sí mismo.

TEOREMA 5.1. *Sea f un polinomio no constante tal que f y f* no posean ninguna raíz común, y sea*

$$g(z) = \frac{f^*(z)}{f(z)}, \qquad h(z) = \frac{f(z) - f^*(z)}{f(z) + f^*(z)}.$$

Entonces, los siguientes asertos son equivalentes: (1) *f es un polinomio de Hurwitz;* (2) $|g(z)| < 1$ *para* $\operatorname{Re} z > 0$; (3) $\operatorname{Re} h(z) > 0$ *para* $\operatorname{Re} z > 0$.

Demostración. Si $\operatorname{Re} z_k < 0$, se verifica

$$|z - z_k| > |z + \bar{z}_k| \qquad \text{para } \operatorname{Re} z > 0. \tag{5.6}$$

Esta desigualdad es consecuencia de que z está más próximo a $-\bar{z}_k$ que a z_k, como se aprecia en la Figura 5-2. La demostración analítica es inmediata; basta elevar los dos miembros al cuadrado. En cualquier caso, (5.6) es válida, y teniendo en cuenta (5.1) y (5.3), se obtiene

$$|f(z)| > |f^*(z)| \qquad \text{para } \operatorname{Re} z > 0. \tag{5.7}$$

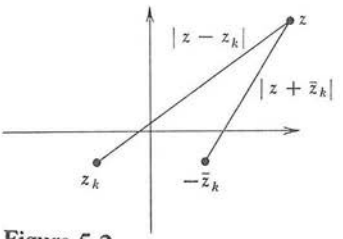


Figura 5-2

Esta desigualdad se verifica para todo polinomio de Hurwitz, *f(z)*. Recíprocamente, si se verifica (5.7) entonces *f(z)* no puede tener ningún cero en $\mathrm{Re}\, z > 0$,por lo que los únicos ceros posibles en la región $\mathrm{Re}\, z \geq 0$serán los que puedan hallarse en el eje imaginario. Sin embargo, la igualdad (5.4) muestra que un cero de esta clase es una raíz común a f y a f^*, caso excluido en el Teorema 5.1. Por consiguiente, la condición (5.7) es necesaria y suficiente para que f sea en el Teorema 5.1 un polinomio de Hurwitz. Dado que f y f^* no se anulan simultáneamente en ningún punto, $|f^*/f| < 1$ si y solamente si $|f^*| < |f|$. De aquí se sigue (2). La equivalencia con (3) se deduce del análisis de la transformación (5.5) que indica que

$$h = \frac{1 - g}{1 + g}$$

verifica $\mathrm{Re}\, h > 0$si y solamente si$|g| < 1$.Como se quería demostrar.

Se dice que una función racional h es *positiva* si$\mathrm{Re}\, h(z) > 0$siempre que$\mathrm{Re}\, z > 0$. Es decir, la función h es positiva si y solamente si verifica la condición (3) del Teorema 5.1. Este teorema reduce el estudio de los polinomios de Hurwitz al estudio de las funciones positivas, que se desarrollará a continuación. Supondremos que *h(z)* es racional y que su numerador y denominador no poseen factores comunes, es decir, la fracción viene dada en forma irreducible.

Si α es un cero de *h(z)*, por el teorema de factorización,

$$h(z) = (z - \alpha)^m H(z), \tag{5.8}$$

siendo $H(\alpha) \neq 0$ y m un número entero. Como$H(z)/H(\alpha) \to 1$cuando $z \to \alpha$, podemos escribir

$$H(z) = \rho e^{i(\delta + \theta_0)}$$

siendo $\theta_0 = \mathrm{Arg}\, H(\alpha)$ y tendiendo $\delta \to 0$, cuando $\rho \to |H(\alpha)|$. Si $z - \alpha = re^{i\theta}$, entonces

$$h(z) = r^m e^{im\theta} \rho e^{i(\delta + \theta_0)} = r^m \rho e^{i(\delta + m\theta + \theta_0)}$$

y por consiguiente,

$$\operatorname{Re} h(z) = r^m \rho \cos(\delta + m\theta + \theta_0). \tag{5.9}$$

En esta ecuación $\delta \to 0$ y $\rho \to |H(\alpha)|$ cuando $r \to 0$.

Es evidente que una función positiva no puede tener ningún cero α tal que $\operatorname{Re} \alpha > 0$. Si $\operatorname{Re} \alpha = 0$ y $m \geqslant 2$, la ecuación (5.9) indica que si δ es suficientemente pequeño, $\operatorname{Re} h(z)$ cambia de signo cuando θ recorre el intervalo $-\pi/2 < \theta < \pi/2$. Luego, los ceros imaginarios de una función positiva han de ser simples; es decir, han de tener $m = 1$. El mismo razonamiento muestra también que $\theta_0 = 0$, por lo cual, en un cero imaginario α se tiene $H(\alpha) > 0$

Dado cualquier número complejo $\alpha \neq 0$ se comprueba inmediatamente que $\operatorname{Re} \alpha$ y $\operatorname{Re}(1/\alpha)$ tienen el mismo signo. Por tanto, *si una función h es positiva, 1/h también lo es.* Se sigue de aquí que el denominador de h carece de ceros en el semiplano $\operatorname{Re} z > 0$ y que los posibles ceros imaginarios del denominador han de ser simples.

La función $h(z)$ del Teorema 5.1 verifica $h^*(z) = -h(z)$, pues $f^{**} = f$, y por tanto, si h es positiva también lo es $-h^*$. Para las funciones de esta clase el análisis precedente puede llevarse mucho más lejos, obteniéndose el siguiente:

TEOREMA 5.2. *Sea h una función racional tal que h y $-h^*$ sean ambas positivas. Entonces h(z) puede escribirse en la forma*

$$h(z) = a + bz + \frac{b_1}{z - i\omega_1} + \frac{b_2}{z - i\omega_2} + \cdots + \frac{b_n}{z - i\omega_n}$$

siendo $\operatorname{Re} a = 0$, $b \geq 0$, $b_k \geq 0$, *y siendo* ω_j *números reales distintos. Recíprocamente, toda función no constante h que sea de esta forma verifica* $h^* = -h$ *y es positiva.*

Demostración. La parte recíproca del teorema es trivial, pues una suma de funciones positivas es positiva. Supondremos que h y $-h^*$ son ambas positivas y demostraremos que h ha de tener la forma expresada.

Como h es positiva, carece de ceros en $\operatorname{Re} z > 0$, y puesto que $-h^*$ es positiva, tampoco tiene ningún cero en $\operatorname{Re} z < 0$. Así pues, todos sus ceros han de ser imaginarios puros, y por la discusión anterior, han de ser simples. El desarrollo en fracciones simples[1] de h tendrá por consiguiente la forma enunciada, excepto, posiblemente, por lo que se refiere al término $a + bz$, que podría ser un polinomio de grado más alto. Sin embargo, si el desarrollo contiene un polinomio de este tipo se comprueba sin dificultad que $\operatorname{Re} h(z)$ cambia de signo en el semiplano $\operatorname{Re} z > 0$ para $|z|$ suficientemente grande. El mismo razonamiento muestra también que $b \geq 0$, y analizando el comportamiento de la función

[1] Capítulo 2, Problema 11.

en el entorno de ω_k se ve que $b_k \geq 0$. Sobre el eje imaginario la única contribución a Re h o Re h^* proviene de a, y haciendo tender $z \to iy$ se ve que Re $a = 0$, lo que completa la demostración.

Una función h que verifique la ecuación $h^*(z) = -h(z)$ se llama *para-impar.* Por ejemplo, la función $h(z)$ del Teorema 5.1 es para-impar, y si h y $-h^*$ son ambas positivas, el Teorema 5.2 establece que h ha de ser para-impar. Una función h que posea las propiedades descritas en el Teorema 5.2 se llama para-impar positiva.

El binomio $a + bz$ del desarrollo del Teorema 5.2 se llama *parte entera* de h, y se denota por $[h]$. Si h no se reduce a su parte entera, el Teorema 5.2 indica que h es para-impar positiva si, y solamente si,

(1) $[h] = a + bz$ verifica Re $a = 0$, $b \geq 0$;
(2) La función $\tilde{h} = h - [h]$ es para-impar positiva.

Como h es para-impar positiva si y solamente si lo es $1/\tilde{h}$, podemos aplicarle el criterio anterior a la función $h_1 = 1/\tilde{h}$, y así sucesivamente. Se obtiene así un proceso sistemático de caracterización que se ilustra con el Ejemplo 5.1.

Ejemplo 5.1. ¿Para qué valores del parámetro real c es

$$f(z) = z^4 + 2z^3 + 3z^2 + 4z + c$$

un polinomio de Hurwitz? En nuestro caso,

$$f^*(z) = z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 4z + c$$

y como el polinomio f es real,

$$h(z) = \frac{f(z) - f^*(z)}{f(z) + f^*(z)} = \frac{\text{parte impar de } f}{\text{parte par de } f}.$$

Así pues,

$$h(z) = \frac{2z^3 + 4z}{z^4 + 3z^2 + c}.$$

Es mucho más cómodo tener el polinomio de mayor grado en el numerador, por lo que consideraremos la función $h_0 = 2/h$,

$$h_0(z) = \frac{z^4 + 3z^2 + c}{z^3 + 2z} = z + \frac{z^2 + c}{z^3 + 2z}. \tag{5.10}$$

La segunda expresión se obtiene efectuando la división indicada en la primera. El Teorema 5.1 indica que f es un polinomio de Hurwitz si y solamente si $1/h$ es para-impar positiva, y el Teorema 5.2 muestra que $1/h$ es para-impar positiva si y solamente si la fracción del segundo miembro de (5.10) es para-impar positiva. Así pues, tomaremos

$$h_1(z) = \frac{z^3 + 2z}{z^2 + c} = z + \frac{(2 - c)z}{z^2 + c}.$$

La fracción central es para-impar positiva si y solamente si lo es la fracción del último miembro y por lo tanto, consideraremos

$$h_2(z) = \frac{z^2 + c}{(2 - c)z} = \frac{z}{2 - c} + \frac{c}{(2 - c)z}.$$

La primera fracción muestra que la condición $c < 2$ es necesaria, y la segunda, que también lo es la condición $c > 0$ Por el Teorema 5.2, estas dos condiciones, conjuntamente, son suficientes, y por consiguiente $f(z)$ es un polinomio de Hurwitz para $0 < c < 2$.

Poniendo $\alpha = 1/(2-c)$ y $\beta = c/(2-c)$, el proceso se resume así:

$$h_2 = \alpha z + \frac{\beta}{z}, \qquad h_1 = z + \frac{1}{h_2}, \qquad h_0 = z + \frac{1}{h_1}, \qquad h = \frac{2}{h_0}.$$

Sustituyendo sucesivamente, a partir de la derecha,

$$h(z) = \cfrac{2}{z + \cfrac{1}{z + \cfrac{1}{\alpha z + \cfrac{\beta}{z}}}}.$$

Este desarrollo es el *desarrollo en fracción continua de Stieltjes* de h. Se puede repetir el proceso con cualquier función racional, y el Teorema 5.2 da una condición necesaria y suficiente que deben satisfacer los coeficientes del desarrollo en fracción continua para que una función racional sea para-impar positiva. En particular, *$h(z)$ es una función racional real para-impar positiva si y solamente si todos los coeficientes de su desarrollo de Stieltjes son positivos.* El proceso anterior exige tan sólo operaciones racionales (división de polinomios), no es preciso extraer raíces, y se puede adaptar sin gran dificultad para su programación en computadora.

Problemas

1. Si $f(z) = (1 + z)(1 - z^2)$, demostrar que $h(z) = z$, función que es positiva. Luego, la condición de que f y f^* carezcan de ceros comunes es esencial en el Teorema 5.1.

2. Demostrar que un polinomio f no puede nunca ser un polinomio de Hurwitz si f y f^* tiene un cero común.
3. (a) El término bz que aparece en el Teorema 5.2 se llama *parte principal de h en el punto del* ∞. Demostrar que $b = \lim h(z)/z$ cuando $z \to \infty$. (b) Cuando h es real, $a = 0$ y la función $h_1 = h - [h]$ es sencillamente $h - bz$ evitándose así una larga división. Repetir el Ejemplo 5.1 por este procedimiento.
4. ¿Para qué valores reales de c son polinomios de Hurwitz los siguientes?

$$3z^3 + 2z^2 + z + c, \quad 4z^4 + z^3 + z^2 + c, \quad z^5 + 5z^4 + 4z^3 + 3z^2 + 2z + c.$$

5. Repetir la parte (i) del Problema 4 suponiendo que c puede tomar valores complejos. (El caso c real es el más importante en las aplicaciones.)
6. Demostrar que para las constantes, $c^* = \bar{c}$, que $z^* = -z$, y que en los puntos z donde el denominador no se anule,

$$(f+g)^* = f^* + g^*, \quad (fg)^* = f^* g^*, \quad (f/g)^* = f^*/g^*, \quad (f^*)^* = f.$$

7. Demostrar que la función h de los Teoremas 5.1 y 5.2 verifica $h + h^* = 0$.
8. Si $f(z)$ es un polinomio real sus raíces complejas aparecen en pares conjugados. Considerando el binomio $(z - z_k)$ cuando $z_k < 0$ y el producto $(z - z_k)(z - \bar{z}_k)$ cuando $\operatorname{Re} z_k < 0$, demostrar que los coeficientes de un polinomio de Hurwitz real han de tener todos el mismo signo. (El polinomio puede expresarse como un producto de factores como los indicados.)
9. Dar un ejemplo de polinomio de tercer grado con coeficientes positivos que no sea un polinomio de Hurwitz.
10. De acuerdo con el *criterio de Routh-Hurwitz* el polinomio real

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n, \qquad a_0 > 0$$

es un polinomio de Hurwitz si y solamente si

$$a_1 > 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} > 0, \ldots.$$

Esta sucesión termina en el determinante de orden n, sustituyéndose a_j por 0 cuando $j > n$. Comprobar este criterio (a) para $n = 1,2,3$, y (b) para $n = 4$.

11. Si h es para-impar positiva, demostrar que los grados de su numerador y su denominador difieren a lo sumo en 1. (Si el grado del numerador supera al grado del denominador en 2 o más, se comprueba fácilmente que $h(z)/z \to \infty$ cuando $z \to \infty$, mientras que por el Problema 3, $h(z)/z \to b$. El mismo razonamiento es aplicable a $1/h$.)
12. Sea $h(z)$ una función como la del Teorema 5.2, con $a = 0$, y sea $H(y) = -ih(iy)$. Demostrar que $H'(y) > 0$ para $y \neq \omega_k$. Demostrar que la función $H(y)$ crece estrictamente desde $-\infty$ hasta ∞ en cada intervalo (ω_k, ω_{k+1}) y que por consiguiente, la ecuación $H(y) = c$ tiene exactamente una solución en cada uno de estos intervalos. En

particular, tomando $c = 0$ se ve que los ceros del numerador y del denominador se van alternando.

13. *Teorema de reactancia de Foster.* Una función real impar y positiva se llama una función de Foster. Demostrar que toda función de Foster es positiva y para-impar. Deducir del Teorema 5.2 que toda función de Foster es de la forma

$$f(z) = bz + \frac{c}{z} + \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i z}{z^2 + \omega_i^2}$$

siendo $b \geq 0$, $c \geq 0$, $b_k \geq 0$, y siendo $\omega_i \neq 0$ reales.

14. Sea $g(z)$ una función racional no reducida a una constante y tal que $|g(z)| = 1$ cuando $\operatorname{Re} z = 0$. De aquí $z + \bar{z} = 0$ implica $g(z)\overline{g(z)} = 1$. Deducir que $g(z)g^*(z) = 1$ para $z = iy$ y, dado que gg^* es racional, que esta ecuación se verifica para todo z. Descomponiendo en factores el numerador y el denominador, demostrar que g admite la representación

$$g(z) = g(\infty)\frac{z + \bar{z}_1}{z - z_1} \cdot \frac{z + \bar{z}_2}{z - z_2} \cdots \frac{z + \bar{z}_n}{z - z_n}.$$

En consecuencia $g = f^*/f$ para un cierto polinomio f.

6. Aplicaciones inversas. Funciones univalentes. Se estudian aquí las propiedades generales de una aplicación analítica $w = f(z)$ y de su función inversa $z = f^{-1}(w)$ utilizando para ello el Teorema de Rouché y el principio de variación del argumento (ver Capítulo 4, Sección 6.)

Se ha demostrado ya que cuando $f'(z) \neq 0$ la aplicación $w = f(z)$ es conforme. El resultado siguiente es válido incluso en los puntos de anulación de $f'(z)$.

TEOREMA 6.1. *(Teorema de la aplicación abierta.) Si la aplicación f es analítica en un dominio D y no se reduce a una constante, entonces $w = f(z)$ transforma conjuntos abiertos en D en conjuntos abiertos del plano w. Más explícitamente, si z_0 es un punto de D y si $w_0 = f(z_0)$, entonces para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño existe un $\delta > 0$ tal que la imagen del disco $|z - z_0| < \epsilon$ contiene al disco $|w - w_0| < \delta$.*

Como $f(z)$ es continua, todos los puntos de D suficientemente próximos a z_0 se transforman en puntos próximos a w_0. El teorema afirma más aún: que la imagen de todo entorno suficientemente pequeño de w_0 recubre completamente un disco de centro z_0.

Demostración. Supongamos que en el punto $z = z_0$ el cero de la función $f(z) - w_0$ sea de orden $n \geq 1$. Tomemos $\rho < \epsilon$ lo bastante pequeño como para que $f(z) - w_0$ no se anule en ningún punto del disco perforado $0 < |z - z_0| \leq \rho$. La existencia de un $\rho > 0$ como el requerido es consecuencia de que los ceros de una función analítica no constante son aislados. Sea

$$m = \min|f(z) - w_0| \quad \text{en} \quad |z - z_0| = \rho. \tag{6.1}$$

Entonces $m > 0$. Si α es un número complejo tal que $|\alpha| < m$, la función

$$f(z) - w_0 - \alpha$$

tiene en el disco $|z - z_0| < \rho$ el mismo número de ceros que la función $f(z) - w_0$. Esta propiedad se deduce del teorema de Rouché, puesto que

$$|f(z) - w_0| > |\alpha| \quad \text{en} \quad |z - z_0| = \rho.$$

Por tanto, $f(z) - w_0 - \alpha$ tiene n ceros en el disco $|z - z_0| < \rho$. Como $n \geq 1$, la ecuación $f(z) = w_0 + \alpha$ tiene al menos una solución en el disco $|z - z_0| < \rho$, y por consiguiente, la imagen de $|z - z_0| < \rho$ contiene a $|w - w_0| < m$. El teorema queda demostrado sin más que tomar $\delta = m$.

Del Teorema 6.1 se deducen varias consecuencias de gran interés; su demostración contiene más información de la que expresa su enunciado. Por ejemplo, se puede utilizar el Teorema 6.1 para demostrar el principio del módulo máximo para funciones $f(z)$ analíticas y no constantes. En efecto, como el punto $w_0 = f(z_0)$ está en el interior de algún disco contenido en $f(D)$ existen en $f(D)$ puntos más alejados del origen que w_0 (ver la Figura 6-1). Tales puntos verifican la condición $|w| > |w_0|$ lo que demuestra que $|f(z_0)|$ no puede ser máximo. El mismo razonamiento puede hacerse para cualquier punto z_0 de D, por lo que $|f(z)|$ no puede alcanzar en D un valor máximo.

También como consecuencia del Teorema 6.1 puede demostrarse que $f(D)$ es un dominio. Como el Teorema 6.1 muestra ya que $f(D)$ es abierto, será suficiente probar que es conexo.

De acuerdo con lo expuesto en el Capítulo 1, un conjunto abierto S es conexo si cada par de puntos de S pueden unirse mediante una línea poligonal totalmente contenida en S. Como S es abierto, se podría decir, igualmente, que S es conexo si cada par de puntos de S se pueden unir mediante un contorno contenido en S. La equivalencia para

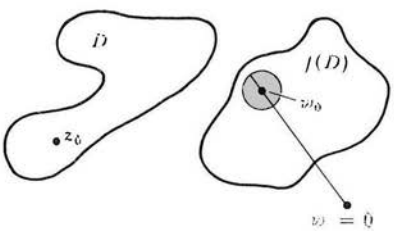


Figura 6-1

conjuntos abiertos de estas dos definiciones se sigue de un sencillo teorema de Análisis real, que afirma que cualquier contorno puede ser arbitrariamente aproximado por una línea poligonal. Se supone aquí que dicha equivalencia ha sido ya establecida.

TEOREMA 6.2 *Si $f(z)$ es una función analítica en un dominio D la imagen $f(D)$ de D en la aplicación $w = f(z)$ es un dominio del plano w.*

Demostración. Sean $w_1 = f(z_1)$ y $w_2 = f(z_2)$ dos puntos de $f(D)$. Como D es conexo, z_1 y z_2 pueden unirse por una línea poligonal L contenida en D. Como f es diferenciable, la imagen de cada lado de L es un arco contenido en $f(D)$, y así pues, la imagen de L es un contorno que une los puntos w_1 y w_2 (Ver la Figura 6-2.) Esto prueba que cualquier par de puntos de D puede unirse mediante un contorno contenido en $f(D)$. Luego $f(D)$ es conexo.

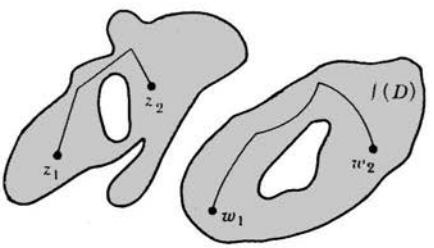


Figura 6-2

La demostración del Teorema 6.1 muestra también que una función analítica posee una inversa analítica en el entorno de cualquier punto z en el que $f'(z)$ no sea nula. Estableceremos el siguiente:

TEOREMA 6.3. *Si f es analítica en z_0, si $f'(z_0) \neq 0$, y si $f(z_0) = w_0$, entonces f tiene una única inversa analítica g en el entorno de w_0. Si z está suficientemente próximo de z_0 y si $w = f(z)$, entonces $z = g(w)$; es decir, $z = g[f(z)]$. Si w está suficientemente cerca de w_0 y si $z = g(w)$, entonces $w = f(z)$; es decir, $w = f[g(w)]$. En cualquiera de estos casos, $f'(z)g'(w) = 1$.*

La afirmación del teorema muestra que $g'(w) \neq 0$, y por consiguiente, la aplicación inversa $z = g(w)$ es conforme.

Demostración. Como $f'(z_0) \neq 0$, en la demostración del Teorema 6.1 se tiene $n = 1$ Luego, cada punto w del disco K, $|w - w_0| < \delta$, es imagen de un único punto z del disco

$|z - z_0| < \epsilon$ en la aplicación $w = f(z)$. Por la unicidad de z, está definida sobre K una función $z = g(w)$ que satisface $z_0 = g(w_0)$. Además, puesto que sobre K se verifica $w = f(z)$ y $z = g(w)$ se tiene también $w = f[g(w)]$ para todo valor w de K.

Demostraremos ahora que g es continua. Sea w_1 un punto cualquiera de K; este punto es imagen de un solo punto z_1 del disco $|z - z_0| < \rho < \epsilon$. Por el Teorema 6.1, existe para todo $\epsilon_1 > 0$ un $\delta_1 > 0$ tal que la imagen del disco $|z - z_1| < \epsilon_1$ contiene al disco $|w - w_1| < \delta_1$. Tomemos δ_1 lo bastante pequeño como para que $|w - w_1| < \delta_1$ esté contenido en K. Entonces, si $|w - w_1| < \delta_1$, se verifica $|g(w) - g(w_1)| < \epsilon_1$. Como ϵ_1 es arbitrario, y se puede asociar a cada ϵ_1, un $\delta_1 > 0$ se sigue que $g(w)$ es continua en K.

Se utiliza ahora la continuidad de $g(w)$ en K para probar que $g(w)$ es analítica. [1] Sea w_1 un punto de K, y w_2 otro punto de K, tan próximo a w_1 como sea necesario. Entonces w_1 y w_2 son imágenes de $z_1 = g(w_1)$ y $z_2 = g(w_2)$, respectivamente. Si se fija w_1 la continuidad de g implica que si $|w_2 - w_1|$ es pequeño entonces $|z_2 - z_1|$ ha de ser pequeño. Claramente es:

$$\frac{g(w_2) - g(w_1)}{w_2 - w_1} = \frac{z_2 - z_1}{w_2 - w_1} = 1 \div \left(\frac{w_2 - w_1}{z_2 - z_1}\right) = 1 \div \left(\frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1}\right).$$

Haciendo $|w_1 - w_2|$ suficientemente pequeño se puede conseguir que $|z_2 - z_1|$ sea tan pequeño como se desee. Luego, el segundo miembro tiende hacia $1/f'(z_1)$ cuando $|w_2 - w_1| \to 0$. Como la ecuación $f(z) = w_1$ tiene exactamente una solución en el disco $|z - z_0| < \rho$, que es precisamente $z = z_1$, y como esta solución es simple, se sigue que $f'(z_1) \neq 0$ lo que demuestra que $g'(w_1)$ existe y es igual a $1/f'(z_1)$. El punto w_1 es un punto arbitrario de K, y por lo tanto, pueden suprimirse los subíndices. En consecuencia, $g(w)$ es analítica en K y $g'(w) = 1/f'(z)$.

Finalmente, por la continuidad de $f(z)$, la imagen de un punto z próximo a z_0 está cerca de w_0. Si se toma $|z - z_0|$ suficientemente pequeño, $w = f(z)$ es un punto de K, y por tanto, $z = g(w)$ lo que muestra que se verifica $z = g[f(z)]$ en un entorno de z_0. La igualdad $1 = g'(w)f'(z)$ se sigue de la regla de la cadena.

Como se recordará del Capítulo 3, una curva $z = \zeta(t)$ definida en el intervalo $a \leqslant t \leqslant b$ es simple si $t_1 \neq t_2$ implica $\zeta(t_1) \neq \zeta(t_2)$. La condición anterior muestra que si $\zeta(t)$ toma un valor en un punto del intervalo $a \leqslant t \leqslant b$, solamente lo toma una vez. De forma análoga, se dice que una función $f(z)$ es *simple* o *univalente* en un dominio D cuando es analítica en D y toma cada uno de sus valores exactamente una vez en D. Así pues, para una función simple, la condición $z_1 \neq z_2$ implica $f(z_1) \neq f(z_2)$. Una función simple establece una aplicación biyectiva de D sobre $f(D)$ y tiene, por tanto, una inversa uniforme sobre $f(D)$.

En los puntos de anulación de $f'(z)$ la función $f(z)$ no posee una inversa analítica, y por tanto, en tales puntos la función no es univalente. Esto es debido a que en el entorno de dichos puntos la ecuación $w = f(z)$, tiene, para un valor dado de w, no una sino varias

[1] Se da otra demostración en el Problema 6.3 del Capítulo 4.

soluciones en el plano z. Se tiene en esencia la misma situación que con la función $w = z^n$ en el entorno de los puntos $z = 0$ y $w = 0$, para $n > 1$. Efectivamente, en el entorno de z_0 podemos escribir

$$w - w_0 = h(z)(z - z_0)^n, \qquad h(z_0) \neq 0,$$

siendo $w = f(z)$ y n el orden del cero de la función $f(z) - w_0$ en el punto $z = z_0$ (ver Capítulo 3, Teorema 7.2.). Si se pudiera sustituir $h(z)$ por $h(z_0)$, se obtendría

$$w - w_0 = h(z_0)(z - z_0)^n, \qquad h(z_0) \neq 0.$$

Esta función es, salvo por las traslaciones $\tilde{w} = w - w_0$, $\tilde{z} = z - z_0$ en los planos w y z y la rotación y homotecia introducidas por el factor $h(z_0)$, la misma que $w = z^n$.

Se vio en la Sección 4 del Capítulo 2 que la función $w = z^n$ establece una aplicación biyectiva entre el plano z y una superficie de Riemann de n hojas construída sobre el plano w. Cada hoja de la superficie de Riemann de una copia del plano w cortado a lo largo del semieje real positivo, [1] y para $n = 3$ puede verse en la Figuga 6-3; en ella se considera que los planos están superpuestos, y que los bordes afectados de la misma letra están unidos entre sí.

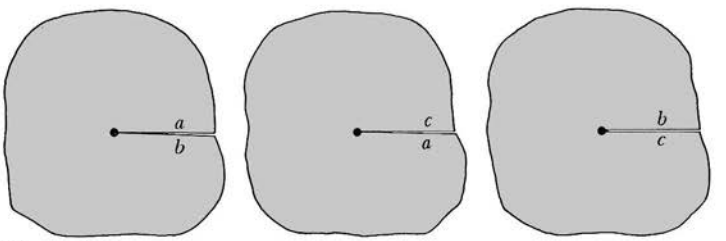


Figura 6-3

La primera hoja del plano w corresponde al sector circular $0 \leqslant \theta < 2\pi/n$ del plano z; la segunda al sector $2\pi/n \leqslant \theta < 4\pi/n$, y así sucesivamente. La superficie de Riemann obtenida, formada por n hojas, se encuentra así en correspondencia biunívoca con el plano z. Si se da un número complejo $w \neq 0$ sin especificar en qué hoja se encuentra, existen n valores de z que se transformen en este w, por lo que $w = z^n$ tiene una inversa n-forme. Considerando la superficie de Riemann la correspondencia es biunívoca, y la función inversa de $w = z^n$ es uniforme.

[1] En el Capítulo 2 el corte se dió a lo largo del semieje negativo, pero la localización del corte carece de importancia.

El hecho de que el sencillo artificio anterior permite invertir una relación general de la forma $w = f(z)$ en un punto de anulación de $f'(z)$ posee una gran importancia. Asumiendo, lo que no es pérdida de generalidad, que $z_0 = w_0 = 0$, estableceremos el siguiente

TEOREMA 6.4. *Supongamos que $f(z)$ sea analítica en $z = 0$ y que tenga en este punto un cero de orden $n \geqslant 1$. Es decir, $f^{(k)}(0) = 0$ cuando $k < n$ y $f^{(n)}(0) \neq 0$.* Entonces, a todo *$w \neq 0$ suficientemente pequeño le corresponden n puntos distintos z en el entorno de $z = 0$, cada uno de los cuales se transforma en w por la aplicación $w = f(z)$. Además, la aplicación $w = f(z)$ puede descomponerse en la forma $w = \zeta^n$, $\zeta = g(z)$, siendo $g(z)$ una función univalente en el entorno de $\zeta = z = 0$.*

Si se considera la superficie de Riemann para w, que está formada por n hojas, la correspondencia entre w y ζ es biunívoca, y por consiguiente, la correspondencia entre w y z también es uno-a-uno. La diferencia entre el enunciado preciso anterior y la aproximación $w = h(0)z^n$ que se discutió más arriba es que para obtener $\zeta = g(z)$ es necesario ahora considerar una función univalente general $w = \zeta^n$, en el entorno de 0, mientras que en la formulación aproximativa aparecía una función lineal $\zeta = \alpha z$. La función univalente introduce tan solo una pequeña distorsión en la imagen general. Ver la Figura 6-4.

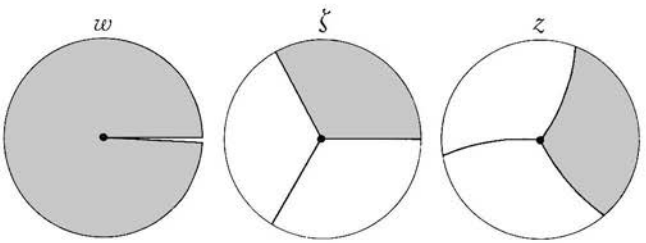


Figura 6-4

Demostración. Como ya se ha visto, en el entorno de $z = 0$, $w = z^n h(z)$, siendo h analítica en $z = 0$ y $h(0) \neq 0$. El hecho de ser $h(0) \neq 0$ posibilita la construcción de una raíz n-ésima analítica de $h(z)$, que llamaremos $H(z)$, en el entorno de 0, como se ve en los Problemas 5 y 6 al final de esta Sección. Así pues,

$$h(z) = [H(z)]^n,$$

siendo $H(0) \neq 0$ por ser $h(0) \neq 0$. La función $g(z) = zH(z)$ verifica $g(0) = 0, g'(0) = H(0) \neq 0$ por lo tanto es univalente en el entorno de cero. Como

$$w = z^n h(z) = [zH(z)]^n = [g(z)]^n,$$

se tiene también la segunda afirmación del Teorema 6.4. El primer aserto es consecuencia de propiedades de $w = \zeta^n$ y del hecho de ser biyectiva la aplicación $\zeta = g(z)$ en el entorno de 0.

Ejemplo 6.1. Si $f(z)$ es simple en el dominio D demostrar que $f'(z) \neq 0$ en todo punto z de D.

Supongamos que $f'(z_0) = 0$ en un punto z_0 de D, y sea $w_0 = f(z_0)$. Entonces, la función $f(z) - w_0$ tiene un cero de orden $n \geq 2$, y el Teorema 6.4 muestra que la ecuación $f(z) = w$ tiene al menos dos raíces distintas en el entorno de z_0 cuando w se toma suficientemente próximo a w_0. Por consiguiente, la aplicación no puede ser simple.

Ejemplo 6.2. Demostrar que si $w = f(z)$ es simple en un dominio D entonces su aplicación inversa $z = g(w)$ es simple en $f(D)$.

Como la aplicación f de D sobre $f(D)$ es biyectiva, z es función uniforme de w, $z = g(w)$, y $g(w)$ no puede tomar más de una vez ningún valor de D. Teniendo en cuenta el Ejemplo 6.1 y el Teorema 6.3 se ve que $g(w)$ es analítica en todo punto w_0 de $f(D)$ y, por consiguiente, es analítica sobre todo el dominio $f(D)$.

Ejemplo 6.3. Describir una superficie de Riemann para la aplicación $w = f(z)$ siendo

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

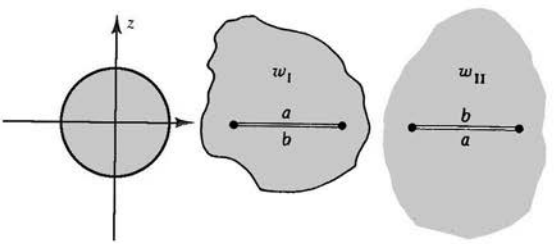


Figura 6-5

Consideremos el plano z y dos copias del plano w cortado desde -1 hasta $+1$, como se muestra en la Figura 6-5. En virtud de resultados de la Sección 3, $w = f(z)$ establece una representación conforme de $|z| > 1$ sobre el exterior del corte del plano w. Como $f(z)$ no varía al sustituir z por $1/z$, $w = f(z)$ da también una representación conforme del disco $|z| < 1$ sobre la región exterior al corte. Supongamos que la región $|z| > 1$ se aplica sobre la primera copia del plano cortado, w_{I}, y que el disco $|z| < 1$ se transforma en la segunda copia, w_{II}. Con los planos w_{I} y w_{II} se forma una superficie de Riemann uniendo los bordes de sus respectivos cortes afectados de la misma letra a o b (Figura 6-5). (En la Figura 6-5 se han dibujado los dos planos uno al lado del otro, pero para realizar la construcción anterior conviene imaginar que una de las hojas está superpuesta a la otra.) Como es evidente $f'(z) = 0$ tan sólo en 1 y en -1, y en estos puntos $f''(z) \neq 0$. Así pues, puede aplicarse el Teorema 6.4 con $n = 2$, el cual muestra que la superficie de Riemann tiene en el entorno de los puntos de ramificación 1 y -1 la estructura apropiada. Los puntos -1 y 1 se suprimen tanto en el plano z como en la superficie de Riemann. No es difícil ahora demostrar que la aplicación del plano z sobre la superficie de Riemann es biyectiva.

Problemas

1. Repasar la Sección 6 del Capítulo 4.
2. Examinando la Figura 6-1, concluir que $|f(z_0)|$ no es un mínimo si $f(z_0) \neq 0$; que $\mathrm{Re}\, f(z)$ no alcanza en D ni un máximo ni un mínimo, y que $\mathrm{Im} f(z)$ no alcanza tampoco ni un máximo ni un mínimo en D.
3. (a) Demostrar que la función $w = z/(1 - z)^2$ es simple en el disco $|z| < 1$; es decir, demostrar que sólo puede verificarse $f(z_1) = f(z_2)$ si $z_1 = z_2$. (b) Sea D el dominio simplemente conexo $1 < |z| < 2$, $|\arg z| < 3\pi/4$. Demostrar que la función z^2 no es simple en D a pesar de que su derivada $2z \neq 0$ en D.
4. Siendo $(1 - z)^{1/2} = \exp[(1/2)\,\mathrm{Log}(1 - z)]$, demostrar que $z/(1 - z)^{1/2}$ es simple en el disco $|z| < 1$.
5. Supongamos que $h(z)$ sea analítica cuando $|z|$ es suficientemente pequeño, y supongamos que $h(0) \neq 0$. Demostrar que en el entorno de 0 la función $h(z)/h(0)$ posee un logaritmo analítico, dado por

$$L(z) = \mathrm{Log}\left(1 + \frac{h(z) - h(0)}{h(0)}\right).$$

   (Obsérvese que $\mathrm{Log}(1 + \zeta)$ es una función analítica en el disco $|\zeta| < 1$.)

6. En el problema anterior pongamos $H(z) = [h(0)]^{1/n} \exp[L(z)/n]$, siendo $[h(0)]^{1/n}$ cualquier valor bien determinado de la raíz n-ésima. Demostrar que $H(z)$ es analítica cuando $|z|$ es suficientemente pequeño, y que $[H(z)]^n = h(z)$.
7. Describir superficies de Riemann para las funciones $w = z + 1/z$, $w = z^2 - 1$, $z^2 = (w - 1)/w$.

8. *Perfiles de Joukowski.* Se toman dos números positivos pequeños a y b y se considera la circunferencia C de centro $z = a + ib$ que pasa por $z = -1$. Representar gráficamente la imagen de la circunferencia C por la transformación $w = (\frac{1}{2})(z + z^{-1})$. Al variar a y b se obtiene una familia de curvas que jugó un importante papel en los comienzos de la Aerodinámica. Su interés radica en que la circunferencia C pasa por el punto de ramificación $z = -1$ y está en parte contenida en $|z| < 1$ y en parte contenida en $|z| > 1$, siendo estos dos dominios regiones fundamentales de la transformación. (Utilizando coordenadas polares es fácil obtener $1/z$ a partir de z; w es el punto medio del segmento que une $1/z$ con z.)
9. Se dice que un dominio es convexo cuando el segmento rectilíneo que une dos cualesquiera de sus puntos está contenido en el dominio. Si $f(z)$ es una función analítica en un dominio convexo que verifica la condición $|f'(z) - 1| < 1$, entonces $f(z)$ es simple. (Se expresa $f(z_1) - f(z_2)$ como el valor de una integral cuyo integrando es $1 + f'(\zeta) - 1$.)

***7. Teoremas globales.** La mayor parte de los resultados de la sección anterior son resultados locales, es decir, su validez solo puede asegurarse en un entorno suficientemente pequeño, $|z - z_0| < \epsilon$, de un cierto punto z_0. Un teorema global es un teorema válido "en grande", o sea, un teorema válido en todo un dominio D o $f(D)$ no sujeto a la condición de ser "suficientemente pequeño". Por ejemplo, el Teorema 6.2, que asegura que $f(D)$ es conexo en un teorema global. Se exponen en esta sección algunos otros resultados de este tipo.

Por definición la función $f(z)$ es simple en D si la ecuación $f(z) = w_0$ tiene para todo número complejo w_0 a lo sumo una solución z en el dominio D. Así pues, el Teorema 6.3 indica que una aplicación $w = f(z)$ es simple en un entorno de cualquier punto z_0 en el que $f'(z_0) \neq 0$. El teorema siguiente permite en ocasiones decidir si una representación conforme es simple en la totalidad de un dominio dado.

TEOREMA 7.1. *Sea D el dominio interior de un contorno de Jordan C. Supongamos que la función $f(z)$ sea analítica en un dominio que contiene a C y a D. Supongamos también que $f(z)$ sobre C, no tome cada valor más de una vez. Entonces $f(z)$ es univalente en D. La aplicación $w = f(z)$ transforma C en un contorno cerrado simple C^* en el plano w; llamemos D^* al interior de C^*. Entonces $w = f(z)$ es una biyección de D sobre D^*. Además, cuando z recorre C en el sentido positivo, $w = f(z)$ recorre C^* en el sentido positivo.*

Demostración. La imagen de C es un contorno cerrado C^*, pues $f(z)$ es analítica y uniforme, y es simple, porque $f(z)$ no toma dos veces un mismo valor sobre C. Sea w_0 un punto cualquiera del plano w que no se encuentre sobre C^*. Como ya se vió en la discusión de la fórmula (6.2) de la Sección 6 del Capítulo 4,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z) - w_0}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{C^*} \frac{dw}{w - w_0}. \tag{7.1}$$

Por el teorema de Rouché, el primer miembro es igual a $N - P$, siendo N el número de ceros y P el número de polos de $f(z) - w_0$ que se hallan en el interior de C. Como $f(z)$ es analítica en el interior de C, $P = 0$, y por lo tanto, el primer miembro es igual a N.

Si w_0 es exterior a C^*, entonces $1/(w - w_0)$ es analítica sobre C^* y en su interior, y la integral del primer miembro de (7.1) es igual a 0; lo que prueba que el número de ceros de $f(z) - w_0$ en el interior de C es , a lo que es igual, que $f(z)$ no toma nunca el valor w_0 en el interior de C.

Si w_0 es interior a C^* el segundo miembro de (7.1) es $+1$ o -1, según que C^* se recorra en sentido positivo o negativo. Sin embargo, el valor -1 es imposible, pues el primer miembro es igual a N que no es nunca menor que 0. Así pues, cuando w_0 está en el interior de C los dos miembros de (7.1) son iguales a $+1$, lo que demuestra que C^* está recorrida en sentido positivo, y también, que $f(z) - w_0$ tiene exactamente un cero dentro de C. Es decir, el valor w_0 se toma una y exactamente una vez en el interior de C.

En el caso de que w_0 se tome sobre C^*, no puede ser imagen de ningún punto z_0 de D. En efecto, la aplicación transforma conjuntos abiertos en conjuntos abiertos, y si w_0 fuese imagen de un punto z_0 de D entonces existirían puntos próximos a z_0 que se transformarían en puntos exteriores a C^* lo que se ha demostrado arriba que es imposible. El teorema ha sido demostrado.

Se precisan los resultados del Teorema 6.3 en el siguiente

TEOREMA 7.2. *Supongamos que $f(z)$ sea analítica y verifique la acotación $|f(z)| \leq M$ cuando $|z - z_0| < R$, siendo R y M constantes. Supongamos también que $f(z_0) = 0$ $|f'(z_0)| = m \neq 0$. Entonces la función $w = f(z)$ posee una inversa $z = g(w)$ que es simple, por lo menos, en el disco cerrado*

$$|w - w_0| \leq \frac{1}{4}\frac{(mR)^2}{M}.$$

El teorema anterior se debe, esencialmente, a Landau. Por lo común se enuncia con una constante menor que 1/4, o con una cota de $|f'(z)|$ que implica la cota anterior de $|f(z)|$. Se da en el Problema 11 una forma algo más débil; otra más fuerte se demuestra en el Problema 4.6 del capítulo final.

Daremos ahora algunos teoremas de unicidad para funciones simples.

TEOREMA 7.3. *Una función simple f tal que la aplicación $w = f(z)$ transforme el disco $|z| < 1$ en el disco $|w| < 1$ y tal que $f(0) = 0$, ha de ser necesariamente de la forma $f(z) = \alpha z$, y además, $|\alpha| = 1$.*

Demostración. La función $h(z) = f(z)/z$ tiene en el punto $z = 0$, una singularidad evitable, que supondremos que ya ha sido eliminada. Por el principio del módulo máximo aplicado

a la función h, o más directamente, por el Lema de Schwarz,[1] $|f(z)| \leq |z|$. Análogamente, la función inversa $z = g(w)$ verifica $|g(w)| \leq |w|$, por lo que $|z| \leq |f(z)|$. Luego, el módulo de la función $f(z)/z$ es constante, y por el Ejemplo 1.2 del Capítulo 2, dicha función es constante. Se sigue que $f(z) = \alpha z$, quedando demostrado el Teorema 7.3.

TEOREMA 7.4. *Una función simple que aplique el plano* $|z| < \infty$ *sobre el plano* $|w| < \infty$ *ha de ser necesariamente lineal.*

Demostración. Por el teorema de la aplicación abierta la imagen por f del disco $|z| < 1$ contiene cierto disco $|w - w_0| < \delta$. Si ∞ fuese una singularidad esencial de f, por el teorema de Casorati-Weierstrass, $f(z)$ toma valores arbitrariamente próximos a w_0 en todo entorno de ∞. Por lo tanto, la función f toma en la región $|z| > 1$ algún valor contenido en el disco $|w - w_0| < \delta$. Este resultado se halla en contradicción con la hipótesis de que f es simple. Luego, el punto $z = \infty$ es en el peor de los casos un polo de f, por lo que f ha de ser un polinomio. Este polinomio ha de ser de primer grado. De lo contrario, $f'(z)$ tendrá al menos un cero, y por el Ejemplo 6.1, la aplicación f no sería simple.

Se deduce del Teorema 7.4 que *una función simple que aplica* $|z| \leq \infty$ *sobre* $|w| \leq \infty$ *ha de ser bilineal.* Este resultado se demostrará en el Problema 6.

Se discute a continuación el llamado *principio de simetría (principio de reflexión)* así denominado porque en él se amplía el dominio de una función analítica considerando su simétrico respecto de líneas rectas de los planos z y w. El principio es de gran utilidad para prolongar funciones analíticas de forma tal que sean válidos para la prolongación teoremas de unicidad como, por ejemplo, el Teorema 7.4. El principio de simetría permite también comprender más profundamente las propiedades de periodicidad de ciertas funciones ligadas a problemas de representación conforme, y justifica parte del análisis intuitivo que se efectuó en la Sección 4.

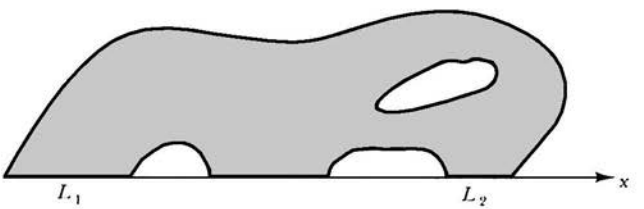


Figura 7-1

[1] Capítulo 3, Sección 7, Problema 8.

Sea $f(z)$ una función analítica en un dominio D contenido en el semiplano $\operatorname{Im} z > 0$ y supongamos que una parte de la frontera de D está formada por uno o más segmentos L_k del eje real. (Figura 7.1) Supongamos también que $f(z)$ sea continua en la región formada por D y los segmentos $L_1, L_2, \ldots, L_n$, y además, que $f(z)$ sea real sobre cada uno de los L_k. En el caso que se muestra en la Figura 7-1, $n = 2$ pues el segmento central no es uno de los L_k. Tal exclusión es necesaria cuando $f(z)$ no es real o no es continua sobre el segmento central.

Sea $\tilde{D}$, el dominio simétrico del D respecto del eje real. Como $\bar{z}$ pertenece a D si y solamente si z pertenece a $\tilde{D}$, podemos definir sobre $\tilde{D}$ una función $\tilde{f}$ por $\tilde{f}(z) = \overline{f(\bar{z})}$, es decir, reflejando $f(\bar{z})$ respecto del eje real del plano w. Descomponiendo ambas funciones en sus partes real e imaginaria,

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y), \qquad \tilde{f}(z) = u(x,-y) - iv(x,-y).$$

La descomposición anterior muestra que las partes real e imaginaria de $\tilde{f}$ tienen primeras derivadas parciales continuas, y puesto que f verifica las condiciones de Cauchy-Riemann, también las verifica $\tilde{f}$. Luego, $\tilde{f}$ es analítica en $\tilde{D}$.

Sobre los segmentos L_k se construye la función $\tilde{f}(z)$ usando el mismo método que en D. Como $z = \bar{z}$ sobre L_k, se deduce también que $\tilde{f}(z) = \overline{f(z)}$ sobre L_k, y como $f(z)$ es real, sobre estos segmentos $\tilde{f}(z) = f(z)$. (Por esta razón se ha exigido que f sea real sobre L_k.) Se comprueba sin dificultad que la función F definida mediante

$$F(z) = f(z) \text{ en } D, \quad F(z) = \tilde{f}(z) = f(z) \text{ en } L_k, \quad F(z) = \tilde{f}(z) \text{ sobre } \tilde{D}$$

es continua en la región formada por $D, \tilde{D}$ y todos los segmentos L_k. Además la función $F(z)$ es analítica cuando los segmentos L_k tienen la siguiente propiedad: Para todo punto x_0 de L_k existe un $\delta > 0$, dependiente de x_0, tal que el semidisco

$$|z - x_0| < \delta, \qquad \operatorname{Im} z > 0$$

está contenido en D. Los segmentos que poseen esta propiedad se llaman *admisibles*. Cuando todos los L_k son admisibles, se ve por el Ejemplo 9.1 del Capítulo 4 (o en virtud de una sencilla aplicación del teorema de Morera) que $F(z)$ es analítica sobre L_k. En consecuencia, esta función es la prolongación requerida de f, a través de los segmentos L_k.

Mediante transformaciones lineales en los planos z y w el resultado anterior puede extenderse al caso de que una porción de recta de la frontera de D se transforme en una porción recta de la frontera de $f(D)$; no es necesario que los segmentos estén contenidos en el eje real, como en el caso anterior. La generalización así obtenida puede resumirse de la forma siguiente:

TEOREMA 7.5. *(Principio de simetría de Schwarz.) Sea D un dominio cuya frontera contiene uno o más segmentos admisibles L_k. Supongamos que $w = f(z)$ sea analítica en D*

y continua en la región formada por D y los segmentos L_k. Supongamos también que la imagen de cada L_k sea un segmento rectilíneo L_k^* del plano w. Entonces la función f(z) puede prolongarse analíticamente a través de los segmentos L_k, por simetría.

La frase "prolongación por simetría" o también, "prolongación por reflexión", significa que si $\tilde{z}$ es el simétrico de z respecto de L_k entonces $\tilde{w} = f(\tilde{z})$ es el simétrico de $w = f(z)$ respecto de L_k^*. Como sugiere la Figura 7-2, no es preciso que los puntos z, $\tilde{z}$ se encuentren suficientemente próximos a L_k, por lo que el teorema anterior no es un teorema local. El eje de simetría es, hablando con precisión, la recta de la cual forma parte el segmento L_k

La hipótesis $\operatorname{Im} f = 0$ sobre $\operatorname{Im} z = 0$, que se hizo en relación con la Figura 7-1, significa geométricamente que los segmentos L_k (de la recta $y = 0$) se transforman en segmentos L_k^* (de la recta $v = 0$), hecho que forma parte del enunciado del Teorema 7.5. En la Figura 7-1, la prolongación analítica se obtuvo asignándole a cada par de puntos simétricos con respecto a la recta $y = 0$, otro par de puntos simétricos con respecto a la recta $v = 0$. Si se considera que una recta es una circunferencia que pasa por el punto del ∞, y que dos puntos simétricos respecto de aquélla recta son un par de puntos inversos respecto de esta circunferencia, el principio de prolongación analítica por simetría puede generalizarse más, incluyendo el caso de que la frontera de D contenga arcos de circunferencia y la función $f(z)$ transforme estos arcos en otros arcos de circunferencia del plano w. En efecto, una circunferencia del plano z puede representarse mediante una aplicación bilineal en el eje real de un plano auxiliar ζ, y análogamente, una circunferencia del plano w puede de la misma forma convertirse en el eje real de otro plano auxiliar, ω. Efectuar la prolongación analítica aplicando el principio de simetría en los planos ζ y ω equivale a efectuarla por inversión respecto de las correspondientes circunferencias de los planos z y w. Esta idea puede todavía extenderse al caso de que en lugar de un segmento rectilíneo o un arco circular se considere un arco analítico.

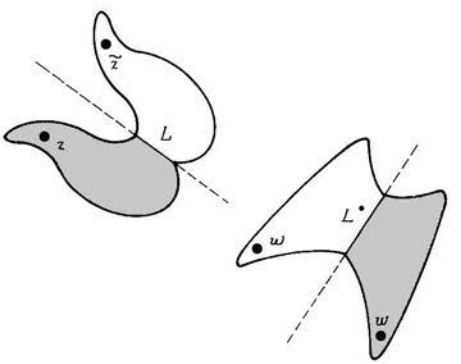


Figura 7-2

Ejemplo 7.1. Supongamos que f_1 y f_2 sean funciones simples en un dominio D, que se anulen ambas en un mismo punto z_0 de D y que apliquen D sobre el disco $|w| < 1$. Demostrar que $f_1 = f_2$.

La función inversa f_2^{-1} aplica $|w| < 1$ sobre D, de tal manera que $w = 0$ se transforma en $z = z_0$. Luego $f_1[f_2^{-1}(w)]$ aplica $|w| < 1$ sobre sí mismo y deja fijo el punto $w = 0$. Por el Teorema 7.3,

$$f_1[f_2^{-1}(w)] = \alpha w$$

siendo $|\alpha| = 1$. Haciendo $w = f_2(z)$ se obtiene $f_1(z) = \alpha f_2(z)$, y además, $\alpha = 1$ pues $f_1'(z_0)$ y $f_2'(z_0)$ son ambas positivas.

Ejemplo 7.2. Se sabe que la función $f(z)$ es analítica en el semiplano $\operatorname{Im} z > 0$ y continua en la región formada por $\operatorname{Im} z > 0$ y el segmento $a < x < b$ del eje real. Si para $f(x) = x$ se verifica $a < x < b$, demostrar que $f(z) = z$ en todo punto del semiplano $\operatorname{Im} z > 0$.

Se extiende, por simetría, el dominio de analiticidad de f, de forma que la nueva función sea analítica en el segmento $y = 0, a < x < b$. Sobre este segmento la prolongación analítica de la función dada y la función analítica z son idénticas; por consiguiente, la función dada coincide con z en todo su dominio de analiticidad, como se deseaba obtener.

Ejemplo 7.3. Una función $w = f(z)$ es continua sobre la banda

$$-\pi/2 \leq x \leq \pi/2, \qquad y \geq 0$$

excepto, posiblemente, en los puntos $-\pi/2$ y $\pi/2$, y establece una aplicación simple del interior de la banda sobre el semiplano superior. Se sabe también que aplica la frontera de la banda sobre el eje real (Figura 7-3). Prolongar por simetría la función dada y demostrar que la prolongación tiene periodo 2π.

Las simetrías respecto de la frontera de la banda en el plano z, y respecto del eje real del plano w se indican mediante flechas en la Figura 7-3. Evidentemente, w vuelve a tomar su valor primitivo tras efectuar las dos simetrías indicadas en la figura; en cambio z se transforma en $z + 2\pi$. En consecuencia, la prolongación analítica de la función dada verifica

$$w = f(z), \qquad w = f(z + 2\pi)$$

y tiene período 2π.

En este problema, $f(z)$ es la función $w = \operatorname{sen} z$, que puede escribirse como una transformación de Schwarz-Christoffel,

$$z = \int_0^w \frac{d\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}. \tag{7.2}$$

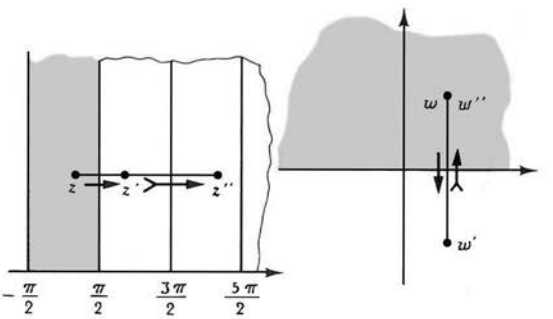


Figura 7-3

El método de simetría es aplicable a integrales mucho más complicadas que la (7.2) y constituye un instrumento de gran utilidad en el estudio de las funciones periódicas.

Problemas

1. Considerando la función $w = z + z^2$ sobre un disco $|z| < R$, suficientemente grande, demostrar que la constante $1/4$ del teorema de Landau es óptima; es decir, existen funciones para las que el teorema no es válido si dicha constante se sustituye por otra mayor.
2. Demostrar que una aplicación simple de $|z| < 1$ sobre $|w| < 1$ ha de ser bilineal. Solución: Sea T la transformación dada y supongamos que $T\alpha = 0$. Denotemos T_0 una transformación bilineal de $|z| < 1$ sobre $|w| < 1$ que aplique el origen en α, es decir, $T0 = \alpha$. Entonces $T_1 = TT_0$ aplica $|z| < 1$ sobre $|w| < 1$ y transforma 0 en 0. Por el Teorema 7.3, T_1 es lineal, y por tanto $T = T_1T_0^{-1}$ es bilineal.
3. Repetir el Problema 2 utilizando esta vez la notación funcional $w = f(z)$, como en el Ejemplo 7.1, en lugar de la notación $w = Tz$.
4. ¿En qué forma ha de modificarse el resultado del Ejemplo 7.1 si no se supone que $f_k'(z_0) > 0$? Utilícese para justificar la respuesta la notación $w = Tz$ como en el Problema 2.
5. Demostrar que una representación univalente de $\operatorname{Im} z > 0$ sobre $\operatorname{Im} w > 0$, que transforme $z = i$ en $w = i$ ha de ser de la forma

$$w = \frac{z \operatorname{sen}\lambda + \cos\lambda}{\operatorname{sen}\lambda - z\cos\lambda}$$

siendo λ un número real. (Se procede como en los Problemas 2 ó 3, y se hace $\alpha = e^{2i\lambda}$ en el Teorema 7.3.)

6. Demostrar que una aplicación simple de todo el plano ampliado sobre todo el plano ampliado ha de ser, necesariamente, bilineal. (Si el punto $z = \infty$ se transforma en $w = \infty$ el resultado se sigue del Teorema 7.4. Si el punto $z = z_0$ es imagen de $w = \infty$, se hace $\zeta = 1/(z - z_0)$ y por el caso anterior, $w = A\zeta + B$.)

7. Los lectores que se hayan familiarizado con la Sección 5 deben demostrar que la operación de paraconjugación es un caso particular del método de simetría
8. Prolongar la función estudiada en el Ejemplo 7.3 por simetría respecto de los ejes reales de los planos z y w. Demostrar mediante dos simetrías que la prolongación verifica la condición $f(-z) = -f(z)$ si y solamente si $f(iy)$ es imaginaria pura sobre la semirrecta $0 < y < \infty$.
9. Se sabe que una cierta función $f(z)$ es analítica en $\operatorname{Re} z > 0$, y continua en la región formada por $\operatorname{Re} z > 0$ y el segmento $0 < y < 1$ del eje imaginario. Si $f(iy) = y^4 - 2y^2$ para $0 < y < 1$, demostrar que $f(1) = 3$.
10. Tomando $(1 - z)^p = \exp[p \operatorname{Log}(1 - z)]$, demostrar que la función $z/(1 - z)^p$ es simple en el disco $|z| < 1$ cuando $0 < p < 2$. En el Problema 2 de la Sección 6 se estudió el caso $p = 2$, pero la situación considerada ahora es mucho más difícil. (Sea D_ϵ el conjunto de todos los puntos del disco $|z| < 1$ cuya distancia a $z = 1$ es mayor que ϵ. Si los dos arcos que componen la frontera de D_ϵ se parametrizan en la forma $z = e^{i\theta}$ y $z = 1 - \epsilon e^{-i\phi}$, se hace uso de las propiedades de monotonía de

$$\arg \frac{z}{(1-z)^p} = \frac{p\pi + (2-p)\theta}{2}, \quad \arg \frac{z}{(1-z)^p} = p\phi + \arctan \frac{\epsilon \operatorname{sen} \phi}{1 - \epsilon \cos \phi}$$

con ϵ suficientemente pequeño a fin de mostrar que la frontera C_ϵ de D_ϵ se aplica biunivocamente sobre una curva cerrada simple C_ϵ^*.)
11. Supongamos que en el disco $|z| \leq R$ la función $h(z)$ sea analítica y verifique $h(0) = 0$, $h'(0) = 1$, $|h(z)| \leq M$. Tomemos $A = R^2/(M + R)$. Entonces, si $|w| < A/4$, la ecuación $h(z) = w$ tiene una y solamente una solución z tal que $|z| < A/2$. (Se aplica sobre una circunferencia conveniente $|z| = r$ el teorema de Rouché con w fijo y

$$f(z) = z - w, \qquad g(z) = h(z) - z.$$

Es claro que $|f(z)| \geq r - |w|$ sobre $|z| = r$. Como $g(z)/z^2$ tiene una singularidad evitable en $z = 0$, aplicándole el principio del módulo máximo a $g(z)/z^2$ se tiene $|g(z)| \leq r^2/A$ para $|z| = r$. La condición $|g(z)| < |f(z)|$ es válida sobre $|z| = r$ cuando $|w| < r - r^2/A$. Se elige r de forma que el segundo miembro sea máximo.)

8. Teorema de representación de Riemann. Aunque el plano finito $|z| < \infty$, es un dominio simplemente conexo, no existe ninguna representación conforme del plano $|z| < \infty$ sobre el disco unidad. Este hecho es consecuencia del teorema de Liouville, pues una función analítica $w = f(z)$ que verifique $|f(z)| < 1$ para todo punto z del plano finito ha de ser, forzosamente, constante. Evidentemente, el mismo razonamiento muestra que no existe ninguna representación conforme del plano ampliado $|z| \leq \infty$ sobre el disco unidad.

Posee gran importancia el hecho de que estos dos dominios $|z| < \infty$ y $|z| \leq \infty$, son los únicos dominios simplemente conexos que no pueden ser representados conformemente sobre el disco unidad. En esencia, este es el contenido del *teorema de representación de Riemann,* cuyo enunciado es el siguiente:

TEOREMA 8.1. *(Riemann). Si D es un dominio simplemente conexo del plano z, que no es ni el propio plano z finito ni el plano z ampliado, entonces existe una función simple $f(z)$ tal que la transformación $w = f(z)$ aplica D sobre el disco $|w| < 1$.*

La hipótesis acerca de D implica que existe al menos un punto α finito que no pertenece a D. Como D es simplemente conexo, si existe un punto α no perteneciente a D existen infinitos puntos con dicha propiedad. No es preciso sin embargo, enunciar este hecho explícitamente.

Si z_0 es un punto de D y se imponen a f las condiciones $f(z_0) = 0, f'(z_0) > 0$, entonces la función simple $w = f(z)$ que representa D sobre $|w| < 1$ es única. Este resultado es fácil de probar y ya fue establecido en el Ejemplo 7.1. La existencia de una tal $f(z)$ es mucho más difícil de demostrar. Posiblemente la demostración más sencilla sea ésta:

(1) Consideremos el conjunto de todas las funciones $g(z)$ simples en D y tales que $|g(z)| < 1$, $g(z_0) = 0$ y $g'(z_0) > 0$. Se demuestra sin demasiada dificultad que este conjunto no es vacío.

(2) Se demuestra que el conjunto anterior de funciones contiene una función extremal $\tilde{g}(z)$ que posee la propiedad de que $\tilde{g}'(z_0) \geq g'(z_0)$ para toda función g perteneciente al conjunto. (Esta es la parte principal de la demostración; en líneas generales, se parece a la demostración de que todo conjunto acotado de funciones equicontinuas contiene una sucesión convergente.)

(3) Se demuestra que si una función g_1 del conjunto definido en (1) deja de tomar un valor w_1 del disco $|w| < 1$, entonces existe una función g_2 en dicho conjunto tal que $g_1'(z_0) < g_2'(z_0)$ (La demostración no es difícil.)

El paso (3) muestra que la función extremal hallada en (2) ha de aplicar la totalidad de D sobre el disco $|w| < 1$ completándose de este modo la demostración. La idea subyacente es que *haciendo máxima la derivada* $g'(z_0)$ *se obliga a la transformación* $w = g(z)$ *a recubrir por completo el disco* $|w| < 1$.

Riemann descubrió el teorema de su nombre guiado por consideraciones de tipo físico, pero la primera demostración completa se debe a Osgood. Como el proceso (2) no es constructivo no se expondrá aquí. Con respecto a los pasos (1) y (3) pueden verse los Problemas 8.1 y 8.2.

Problemas suplementarios al Capítulo 5

1.1. Si una transformación bilineal $w = Tz$ tiene dos puntos fijos finitos, z_1 y z_2, se deduce del Problema 14 que

$$\frac{w - z_1}{w - z_2} = H\frac{z - z_1}{z - z_2}$$

siendo H una constante. Si dos transformaciones tienen los mismos puntos fijos z_1, z_2 pero sus constantes H_1, H_2 son diferentes, demostrar que su producto tiene los mismos puntos fijos y la constante H_1H_2. Generalizar por inducción el resultado anterior para n transformaciones, y mostrar de este modo como obtener la ecuación de la transformación T iterada n veces, $T^n z$. Esta técnica es útil para el estudio de redes eléctricas en serie y de estructuras periódicas de las líneas de transmisión.

1.2. Hallar los puntos fijos, y utilizarlos para determinar $T^n z$: en las transformaciones:

$$Tz = \frac{1 - 3z}{z - 3}, \quad Tz = \frac{3 - iz}{z - 2 - i}, \quad Tz = \frac{2iz - z + 2}{2i + 1 - z}.$$

1.3. Sean $F(x, y)$ y $G(x, y)$ funciones reales con primeras derivadas continuas en un dominio D del plano (x, y). Supongamos que la transformación real $u = F(x, y)$, $v = G(x, y)$ de D en el plano (u, v) sea conforme en todos los puntos de D. Demostrar que $F_x = G_y$, $F_y = -G_x$ y que, por consiguiente, $F + iG$ es analítica sobre D. Idea de la solución: Sea $z = z_0 + te^{i\theta}$ la recta que pasa por un punto dado z_0 de D y que forma un ángulo θ con el eje x. Si $w = F + iG$, entonces sobre esta recta,

$$\frac{dw}{dt} = (F_x + iG_x)\frac{dx}{dt} + (F_y + iG_y)\frac{dy}{dt}. \qquad (*)$$

Sustituyendo en (*) los valores

$$\frac{dx}{dt} = \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \frac{dy}{dt} = \operatorname{sen}\theta = -i\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2}$$

y dividiendo por $e^{i\theta} = dz/dt$ se tiene

$$\frac{dw}{dt} \div \frac{dz}{dt} = \frac{1}{2}(F_x + G_y + iG_x - iF_y) + \frac{1}{2}(F_x - G_y + iG_x + iF_y)e^{-2i\theta}.$$

Al variar θ, la suma anterior describe, para $t = 0$, una circunferencia cuyo centro y radio son

$$z_1 = \tfrac{1}{2}(F_x + G_y + iG_x - iF_y), \quad \rho = \tfrac{1}{2}|F_x - G_y + iG_x + iF_y|.$$

Si $\arg(dw/dt \div dz/dt)$ ha de permanecer constante al variar θ, el radio ρ ha de ser 0, lo que da las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

1.4. Si en el problema anterior $|dw/dt \div dz/dt|$ es constante en $t = 0$ al variar θ, demostrar que o bien $F + iG$ o bien $F - iG$ satisface en z_0 las condiciones de Cauchy-Riemann. Demostrar también que si una de las cantidades z_1 o ρ no es igual a 0 en z_0, entonces la otra ha de anularse en un entorno de z_0 por lo que, bien $f(z)$, o bien $\overline{f(z)}$ es analítica en z_0.

1.5. Para este problema se requiere conocer las matrices ortogonales. Si $f = u + iv$ es analítica, entonces, por las condiciones de Cauchy-Riemann

$$\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ -u_y & u_x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}.$$

(a) Demostrar que la segunda de estas matrices es proporcional a una matriz ortogonal, y obtener, en consecuencia, que la transformación es conforme cuando $f'(z) \neq 0$. (b) Demostrar, recíprocamente, que si la primera matriz es proporcional a una matriz ortogonal, entonces bien f, bien $\overline{f}$ verifica las condiciones de Cauchy-Riemann en el punto (x, y).

1.6. Para este problema se requiere conocer los determinantes Jacobianos. (a) Si se descompone una representación conforme $w = f(z)$ en sus partes real e imaginaria, demostrar que el Jacobiano de la transformación $w = f(z)$ es $|f'(z)|^2$. Deducir de aquí que la transformación es localmente inversible cuando $f'(z)$ es continua y diferente de 0. (b) Mostrar que el área de $f(D)$, imagen en una transformación conforme $w = f(z)$del dominio D, viene dada formalmente por

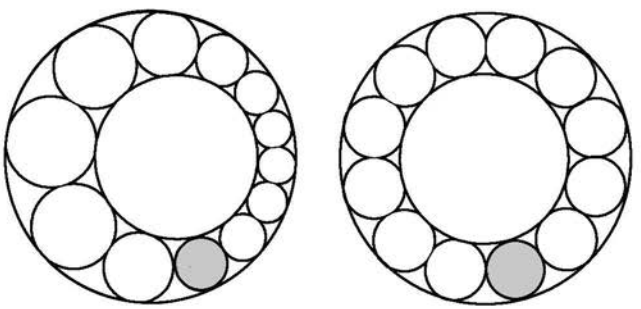
$$\iint_{f(D)} du\, dv = \iint_D |f'(z)|^2\, dx\, dy,$$

lo que está de acuerdo con el hecho de que $|f'(z)|$ represente localmente el factor de dilatación asociado a la transformación.

2.1. Las transformaciones para las que, en el Problema 1.1. $|H| = 1$ se denominan *elípticas;* aquéllas para las que H es real se llaman *hiperbólicas.* Demostrar que el conjunto de todas las transformaciones que tienen el mismo par de puntos fijos $z_1 \neq z_2$ forma un grupo, y que los subconjuntos de transformaciones elípticas e hiperbólicas son subgrupos de él.

2.2. *Teorema de Steiner.* Consideremos dos circunferencias, una exterior a la otra, y tracemos en la región comprendida entre ellas otras circunferencias tangentes a las dos anteriores y entre sí, como se indica en la Figura 8-1(a). En ocasiones el anillo de circunferencias así formado se cierra, es decir, la última circunferencia es tangente a la primera. Demostrar que si el anillo se cierra para una cierta elección de la circunferencia de partida, lo mismo ocurre tomando arbitrariamente la primera circunferencia. (Por el Ejemplo 2.2, la configuración dada se puede aplicar conformemente sobre otra en la que las dos circunferencias principales son concéntricas. Figura 8-1 (b).)

2.3. Dos puntos p y q son inversos con respecto a una circunferencia (o recta) C si y solamente si toda recta y toda circunferencia que pase por p y q es ortogonal a C. Idea de la solución: En la transformación $w = (z - p)/(z - q)$, los puntos p y q se convierten en $w = 0$ y $w = \infty$. (Si q ya es el punto ∞ se utiliza la transformación $w = z - p$. Como $w = 0$ y $w = \infty$ son puntos inversos con respecto a la imagen de C, la imagen de C ha de ser una circunferencia de la forma $|w| = k_1$. Además, cualquier recta o circunferencia que contenga a p y a q ha de transformarse en una recta radial, $\arg w = k_2$, puesto que p y q se transforman en 0 e ∞, respectivamente.



(a) (b)

Figura 8-1

Como es evidente, las circunferencias $|w| = k_1$ y las rectas $\arg w = k_2$ son ortogonales. Por lo tanto, también lo son sus imágenes en el plano z. Así pues, las familias de circunferencias

$$\left|\frac{z-p}{z-q}\right| = k_1, \qquad \arg\left(\frac{z-p}{z-q}\right) = k_2$$

han de ser mutuamente ortogonales, y la segunda familia ha de estar formada por todas las circunferencias que contienen a p y a q, como se muestra en la Figura 8-2.

2.4. Deducir del Teorema 2.4 que si una de las transformaciones

$$w = a + \frac{bz}{1-cz}, \qquad w = c + \frac{bz}{1-az}$$

aplica $|z| < 1$ sobre $|w| < 1$, lo mismo hace la otra.

2.5. Sea $|w - w_0| = \rho_0$ la imagen de $|z| = \rho$ en una transformación bilineal general $w = Tz$ con coeficientes a, b, c y d. Poniendo $|T^{-1}w| = \rho$ y utilizando el Teorema 2.1, obtener w_0 y ρ_0. Calcular $|w_0| + \rho_0$ y así obtener el valor máximo de $|Tz|$ sujeto a la condición $|z| = \rho$.

2.6. Teniendo en cuenta el Problema 2.5, obtener una condición necesaria y suficiente para que T aplique $|z| < 1$ en $|w| < 1$. Siendo $b \neq 0$ deducir que si una de las transformaciones del Problema 2.4 aplica $|z| < 1$ sobre $|w| < 1$, entonces lo mismo hace la otra.

2.7. Consideremos la transformación $w = \beta(z - \alpha)/(\bar{\alpha}z - 1)$, con $|\alpha| < 1$ y $|\beta| = 1$, por lo cual el disco $|z| < 1$ se aplica sobre $|w| < 1$ como en el Teorema 2.4. En esta transformación la circunferencia $|w| = r < 1$ se corresponde con una cierta circunferencia del plano z, de centro z_0 y radio s. Si $t = |z_0|$, calcular t y s mediante el Teorema 2.1, y demostrar que el efecto de intercambiar entre sí r y $|\alpha|$ es intercambiar s y t. Demostrar que

$$t^2 = (1 - s/r)(1 - sr)$$

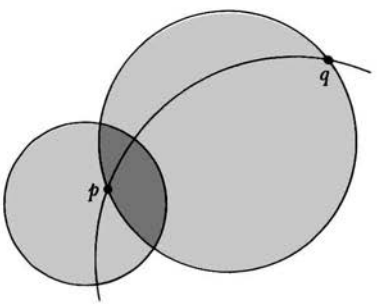


Figura 8-2

y por consiguiente, como s está determinado de modo único por r y t, s debe venir dado por la construcción de la Figura 8-3.

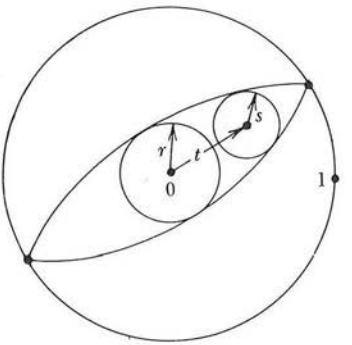


Figura 8-3

2.8. Sea $f(z)$ una función racional no constante, analítica en el disco $|z| \leq 1$ y que verifica la condición $|f(z)| = 1$ para $|z| = 1$. Demostrar que $f(z)$ es producto de expresiones como las del Teorema 2.4. (Sea $\tilde{f}$ la función obtenida al sustituir todos los coeficientes de f por sus conjugados. La igualdad $f(z)\overline{f(z)} = 1$ cuando $z\bar{z} = 1$ da $f(z)f(1/z) = 1$ cuando $|z| = 1$, y como el primer miembro es racional, la igualdad anterior ha de ser válida para todo z.)

2.9. Para $j = 1,2,\ldots,6$ definamos las transformaciones

$$T_j z = \quad z, \ \frac{1}{z}, \ 1 - z, \ \frac{1}{1 - z}, \ \frac{z}{z - 1}, \ \frac{z - 1}{z},$$

Formar una tabla con los productos $T_i T_j$, para $i,j = 1,2,\ldots,6$ y demostrar que estas seis transformaciones forman grupo. Se dice que la función $J(z)$ es *invariante* cuando $J(z) = J[Tz]$ para cada transformación T perteneciente al grupo anterior. Demostrar que la función

$$J(z) = f(T_1 z) + f(T_2 z) + f(T_3 z) + f(T_4 z) + f(T_5 z) + f(T_6 z)$$

es invariante cualquiera que sea la función f definida en todo el plano ampliado, y que, recíprocamente, toda función invariante J puede obtenerse de esta forma, tomando $f(z) = J(z)/6$. (Al sustituir z por Tz lo único que se hace es permutar el orden de los sumandos en la definición de J.)

2.10. Sea $z = X(z_1, z_2, z_3, z_4)$, donde todos los puntos z_i son distintos y X denota la razón doble. Demostrar que al permutar los z_i, z se transforma en uno de los seis números $T_j z$ considerados en el problema anterior.

3.1. Consideremos la función definida por $\phi(x, y) = \mathrm{Re}[(i + z)/(i - z)]$ si $z \neq i$ $\phi(0,1) = 0$. Demostrar que ϕ es armónica en el disco $|z| < 1$, es 0 sobre $|z| = 1$, es continua

en $|z| \leq 1$ exceptuando el punto $z = i$. Se concluye que la solución del Ejemplo 3.1 no es única.

Se puede demostrar que la solución es única si en el Ejemplo 3.1 se exige que la función sea acotada, y lo mismo puede decirse de otros problemas que se enuncian más abajo. La unicidad de la solución es trivial cuando la región es acotada y además los valores de contorno constituyen una función continua (Capítulo 2, Problema 5.4) pero aquí no se demostrará en otros casos.

3.2. Tomando $c_1 + c_2 u$, construir una función acotada que sea armónica en la banda $u_0 < u < u_1$ y que tome valores prescritos, A y B, sobre las rectas $u = u_0$ y $u = u_1$. (b) Tomando $c_1 + c_2 \log |w|$, construir una función armónica en la corona $r_0 < |w| < r_1$ que tome los valores A y B sobre $|w| = r_0$ y $|w| = r_1$. (c) Tomando $c_1 + c_2 \operatorname{Arg} w$ construir una función armónica en el sector $\theta_0 < \operatorname{Arg} w < \theta_1$ que tome los valores A y B para $\operatorname{Arg} w = \theta_0$ y $\operatorname{Arg} w = \theta_1$.

3.3. Dibujar las equipotenciales de cada uno de los tres casos enumerados en el Problema 3.2. En los problemas siguientes se supone que el lector ya está familiarizado con estos resultados. El Problema 3.2 permite también calcular explícitamente $\phi^*(u,v)$, y por tanto, $\phi(x,y)$; obsérvese que las funciones del Problema 3.2 tienen, respectivamente, las formas

$$\operatorname{Re}(c_1 + c_2 w), \quad \operatorname{Re}(c_1 + c_2 \log w), \quad \operatorname{Im}(c_1 + c_2 \log w).$$

3.4. Sea D una región limitada por dos arcos circulares o por un arco y un segmento rectilíneo, como se muestra en la Figura 8-4. Suponiendo que las líneas que limitan el dominio se corten formando un ángulo θ_1 en $z = 0$ y en $z = 1$, aplicar conformemente dichas regiones sobre un sector de ángulo θ_1. Si una función armónica acotada toma el valor A sobre uno de estos arcos y el valor B sobre el otro, demostrar que las equipotenciales son circunferencias que pasan por 0 y 1.

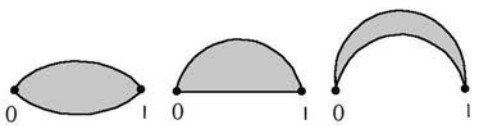


Figura 8-4

3.5. Utilizando el Ejemplo 2.2 explicar cómo puede construirse una función armónica en un anillo excéntrico y que tome valores prescritos A y B sobre las circunferencias interior y exterior, respectivamente. Demostrar que las equipotenciales y las líneas de corriente son arcos de circunferencia, y dibujarlas. Este problema es interesante para el estudio de los condensadores cilíndricos, líneas de transmisión coaxiales y tubos aislados.

3.6. Se desea construir una función acotada que sea armónica en el semiplano superior y que tome el valor A sobre un segmento $x_0 < x < x_1$ del eje real, y el valor B sobre el resto del eje. Describir las equipotenciales y las líneas de corriente. (Para ello se aplica conformemente el semiplano superior sobre sí mismo, de tal forma que x_0 se transforme en $w = 0$ y x_1 en $w = \infty$.)

4.1. Se desea hallar una función armónica acotada en la semibanda que se muestra en la Figura 8-5, y que tome sobre el contorno los valores A, B y C indicados. Mediante la transformación $w = \operatorname{sen} z$, se convierte este problema en otro sobre un sector, y por elevación al cuadrado, en un tercero para un semiplano. Resolverlo explícitamente cuando

$$A = 1, B = C = 0; \quad A = B = 0, C = 1; \quad B = 1, A = C = 0.$$

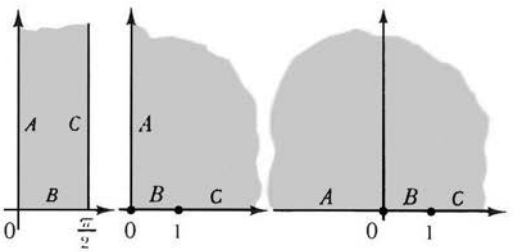


Figura 8-5

4.2. Para este problema se requiere conocer el concepto de derivada direccional. Si ϕ es una función diferenciable y C es una curva lisa, la derivada de ϕ según la dirección de la normal a C por un punto de C se llama *derivada normal* en dicho punto de C, y se denota $\partial\phi/\partial\nu$ o ϕ_ν. Demostrar que la condición $\phi_\nu = 0$ se conserva en representaciones conformes biyectivas; es decir, si ϕ se transforma en ϕ^*, por el procedimiento explicado en el texto, y si C se transforma en C^*, entonces si se verifica $\phi_\nu = 0$ sobre C, se verifica $\phi_\nu{}^* = 0$ sobre C^*. (Las curvas sobre las cuales $\phi_\nu = 0$ son las trayectorias ortogonales a las curvas en las que $\phi = \text{const.}$)

4.3. Se desea hallar una función acotada que sea armónica en el primer cuadrante, que tome el valor A sobre el semieje imaginario positivo, y el valor B sobre la semirrecta $x > 1$ del eje real; se pide además que su derivada normal en todos los puntos del segmento $0 < x < 1$ del eje real sea 0. (Véase la Figura 8-6 (b).) Transformar este problema en el sugerido por la Figura 8-6 (c), resolver este último mediante el Problema 3.2 (a) y obtener explícitamente la función ϕ cuando $y = 0, 0 \leq x \leq 1$. Este problema corresponde al de hallar la temperatura estacionaria de una lámina uniforme cuando parte de su frontera está aislada térmicamente.

4.4. Explicar como podría reducirse el problema sugerido por la Figura 8-6 (a) al Problema 4.3.

5.1. Este problema requiere cierto conocimiento de las ecuaciones diferenciales lineales

$$y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + p_1 y' + p_0 = 0$$

siendo las p_j constantes complejas e $y' = dy/dt$. Su *polinomio característico* es

$$P(z) = z^n + p_{n-1}z^{n-1} + \cdots + p_1 z + p_0$$

Se dice que la ecuación es estable cuando toda solución y verifica que $y(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$. (a) Ensayando $y = e^{st}$, demostrar que la ecuación no es estable si P no es un polinomio de Hurwitz. (b) Demostrar que la ecuación es estable cuando P es un polinomio de Hurwitz tal que ningún par de raíces tiene la misma parte real. Esta última condición se introduce para simplificar la demostración, pero de hecho, es superflua. (Si $P(s) = 0$, al efectuar la sustitución $y = e^{st}Y$ se obtiene una ecuación de orden inferior en Y'. Se usa inducción.)

6.1. De acuerdo con lo expuesto en la Sección 2 del Capítulo 2, las bandas

$$-\infty < x < \infty, \qquad (2n-1)\pi < y < (2n+1)\pi$$

son regiones fundamentales de $w = e^z$, y cada una de estas bandas se aplica sobre el plano w cortado a lo largo del eje real negativo. Representar su superficie de Riemann dibujando, unas al lado de otras, copias del plano w cortado a lo largo del semieje real negativo, marcando los bordes que es preciso medir mediante letras apropiadas.

6.2. De acuerdo con la Sección 2 del Capítulo 2, la banda

$$-\tfrac{1}{2}\pi < u < \tfrac{1}{2}\pi, \qquad -\infty < v < \infty \qquad (*)$$

en una región fundamental de la aplicación $z = \operatorname{sen} w$, cada una de estas bandas se transforma en el plano z cortado a lo largo del eje real desde $-\infty$ hasta -1 y desde 1 hasta ∞. Dibujar la superficie de Riemann como se sugiere en el Problema 6.1. (Puede resultar conveniente considerar la función $z = \operatorname{sen} w$ como la composición de $\zeta = e^{iw}$, y $2iz = \zeta - \zeta^{-1}$.)

6.3. Construir una rama uniforme de la función arc tan z en el plano z suprimiendo de este último toda la región del eje imaginario en la que $|y| > 1$. (Demostrar que

$$\arctan z = \frac{i}{2}\log\zeta \quad \text{donde} \quad \zeta = \frac{i+z}{i-z}.$$

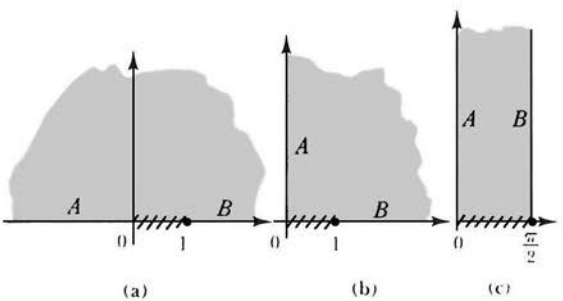


Figura 8-6

En virtud de propiedades de las transformaciones bilineales, el plano ζ cortado del eje real negativo está en correspondencia biunívoca con el plano z cortado de la manera explicada antes.)

6.4. Demostrar que la banda (*) es una región fundamental de la transformación $z = \tan w$ y que esta banda se transforma en el plano z cortado de la forma que se explicó en el Problema 6.3. Tomando una copia del plano z para cada banda, construir la superficie de Riemann de $z = \tan w$.

7.1. Sea $f(z)$ una función entera que sea real sobre un segmento del eje real e imaginaria pura sobre un segmento del eje imaginario. Deducir del principio de simetría que la función f es impar.

7.2. Supongamos que $f(z)$ sea analítica en el disco $|z| \leq 1$ y que además, $|f(z)| = 1$ cuando $|z| = 1$. Demostrar que f es una función racional. (Definamos $\overline{f}(\zeta) = \overline{f(\zeta)}$ para $|\zeta| \leq 1$. Aplicando el principio de simetría con frontera circular se deduce que $f(z) = 1/\overline{f}(1/\overline{z})$ para $|z| \geq 1$. Por tanto, las únicas singularidades α contenidas en el disco $|z| > 1$ son los polos correspondientes a ceros $1/\overline{\alpha}$ de f.)

7.3. Utilizando una técnica parecida a la empleada en el Problema 4.1 del Capítulo 4, generalizar el Problema 7.2 a las funciones meromorfas.

7.4. Se sabe que una función $f(z)$ es analítica en el rectángulo $0 < x < a$, $0 < y < b$ y continua en el rectángulo cerrado, excepto, posiblemente, en los vértices, y que aplica el interior del rectángulo sobre el primer cuadrante, y el contorno sobre los ejes coordenados, como se muestra en la Figura 8-7. Prolongar por simetría la función dada, y demostrar que la prolongación tiene los dos períodos $\omega_1 = 4a$, $\omega_2 = 2ib$. (Cuatro simetrías sucesivas respecto de rectas verticales del plano z equivalen a otras tantas simetrías respecto de los ejes real, imaginario, real e imaginario del plano w.)

7.5. Una función que posee las propiedades descritas en el Problema 7.4 es la definida implícitamente por la integral elíptica

$$z = \int_0^w \frac{d\zeta}{[(1 - \zeta^2)(1 - k^2\zeta^2)]^{1/2}}, \qquad 0 < k < 1.$$

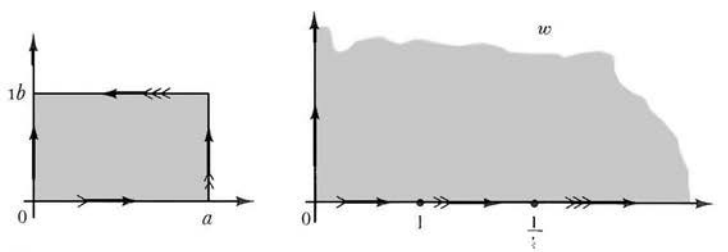


Figure 8-7

(Comparar con el Problema 5 de la Sección 4.) Eligiendo convenientemente una rama del integrando, demostrar que por esta función la frontera del rectángulo se transforma en la manera que se ha descrito arriba, y que

$$a = \int_0^1 \frac{dx}{[(1 - x^2)(1 - k^2x^2)]^{1/2}}, \quad b = \int_0^\infty \frac{dy}{[(1 + y^2)(1 + k^2y^2)]^{1/2}}.$$

Asimismo, expresar b como el valor de una integral desde $1/k$ hasta ∞.

7.6. Demostrar que la aplicación $w = z + \log z$ establece una representación univalente del plano cortado de la Figura 4-10 sobre el semiplano superior. (Sea D_ϵ el conjunto de puntos del semiplano superior contenidos en el disco $|z| < 1/\epsilon$ cuya distancia al segmento $-1 < x < 0$ del eje real es mayor que ϵ; se procede después como en el Problema 10 de la Sección 7. Es suficiente evaluar la variación de $\arg[f(z) - w_0]$ con un margen de error de 2π, pues dicha variación es múltiplo entero de 2π.)

8.1. Demostrar que el conjunto de funciones $\{g\}$ que se consideró en relación con el teorema de representación de Riemann no es vacío. (Si α no pertenece a D, por el Ejemplo 1.2 del Capítulo 4 se tiene un logaritmo analítico uniforme definido en D,

$$L(z) = \log \frac{z - \alpha}{z_0 - \alpha}, \qquad L(z_0) = 0.$$

Tomando exponenciales se ve que $L(z_1) = L(z_2)$ solamente es posible cuando $z_1 = z_2$, por lo que L es una función simple. Análogamente, si $L(z_n) + 2\pi i \to 0$ para una cierta sucesión $\{z_n\}$, tomando exponenciales se obtiene que $z_n \to z_0$. Pero por la continuidad de L, $L(z_n) \to L(z_0) = 0$ cuando $z_n \to z_0$. Esta contradicción muestra que $L(z) + 2\pi i$ está alejado de 0 en D, y por lo tanto, la función

$$h(z) = \frac{1}{L(z) + 2\pi i}$$

está acotada en D. Tomando ahora $Ah(z) + B$ se obtiene la función g requerida.)

8.2. Si $g_1(z)$ es simple en el dominio D del Problema 8.1, $g_1(z_0) = 0$, $g_1'(z_0) > 0$, $|g_1(z)| < 1$, y g_1 no toma un valor w_1, $|w_1| < 1$, demostrar que existe una función $g_2(z)$ que posee todas las propiedades de $g_1(z)$ con excepción de la última, y tal que $g_2'(z_0) > g_1'(z_0)$. En otras palabras, demostrar el punto (3) del teorema de Riemann. (Sean

$$h_1(z) = \frac{g_1(z) - w_1}{1 - g_1(z)\overline{w}_1}, \qquad h_2(z) = \sqrt{h_1(z)}, \qquad h_3(z) = \frac{h_2(z) - h_2(z_0)}{1 - h_2(z)\overline{h_2(z_0)}}.$$

Demostrar que h_1 es simple en D, $|h_1| < 1$, y que h_1 no toma el valor 0. Demostrar que h_2 es simple en D y verifica $|h_2| < 1$, y lo mismo para h_3. Además, $h_3(z_0) = 0$,

$$h_3'(z_0) = \frac{g_1'(z_0)}{2\sqrt{-w_1}}(1 + |w_1|) = \frac{g_1'(z_0)}{\alpha}\frac{1 + t^2}{2t}$$

siendo $|\alpha| = 1$ y $t^2 = |w_1|$. Como $1 + t^2 > 2t$, $0 < t < 1$, la función $g_2 = \alpha h_3$ posee todas las propiedades pedidas.)

Obsérvese que al tomar la función $\sqrt{h_1(z)}$, como $|h_1| < 1$, la imagen de D sufre una dilatación, pero continúa estando contenida en el disco unidad. La construcción de g_2 a partir de g_1 posee cierto interés práctico, pues proporciona un método concreto para obtener una sucesión de funciones que tienda hacia la función extremal.

Capítulo 6

Convergencia uniforme

Una suma finita de funciones analíticas en un dominio D es analítica, y su derivada se obtiene sin más que derivar cada sumando. Se plantea entonces la cuestión de determinar condiciones en las que se pueda asegurar que la suma de una serie infinita de funciones analíticas es analítica, y que su derivada se obtiene derivando cada término de la serie. Cuestiones parecidas surgen en relación con las integrales dependientes de un parámetro y los productos infinitos. Para el análisis de estas cuestiones es preciso considerar un tipo especial de convergencia, la convergencia uniforme, en la cual se considera la convergencia no en un punto sino en toda una región. Imponiendo que z varíe en una región suficientemente pequeña se puede mostrar fácilmente la validez de muchos cálculos por medio de la convergencia uniforme. Los resultados así obtenidos se extienden después a regiones mayores mediante prolongación analítica. En este capítulo se aplicarán métodos de convergencia uniforme para la resolución de ecuaciones diferenciales, para el desarrollo en serie de ciertas integrales, con objeto de representar funciones por medio de series o productos infinitos, y para resolver el problema de Dirichlet para un disco. El capítulo finaliza con una discusión del teorema de monodromía, que establece condiciones en las que el proceso de prolongación analítica determina una función uniforme.

1. Convergencia de sucesiones. Consideremos, para cada $n = 1, 2, 3, \ldots$ una función compleja de $s_n(z)$ definida en una cierta región G del plano complejo. Podemos formar con estas funciones una sucesión infinita

$$s_1(z), \quad s_2(z), \quad s_3(z), \ldots, \quad s_n(z), \ldots .$$

Esta sucesión se denota también $\{s_n(z)\}$, $n = 1,2,3, \ldots$ o más sencillamente, $\{s_n(z)\}$ si se sobreentiende el conjunto de valores de n. La sucesión se llama infinita porque contiene infinitos términos. (En general, una sucesión es una función $s(n, z)$ de las dos variables n y z, en la que n recorre un conjunto de números enteros y z varía en una cierta región del plano complejo. La notación $s_n(z)$ tiene por objeto poner de relieve que n y z juegan papeles diferentes.)

Se dice que la sucesión anterior converge hacia $s(z)$, y se escribe

$$\lim_{n\to\infty} s_n(z) = s(z) \quad \text{o} \quad s_n(z) \to s(z),$$

cuando se verifica lo siguiente: Para todo $\epsilon > 0$ y para todo z existe un N, que depende de ϵ y de z, tal que

$$n \geq N \quad \text{implica} \quad |s_n(z) - s(z)| \leq \epsilon. \tag{1.1}$$

La convergencia se llama *uniforme* cuando es posible elegir N de forma que no dependa de z; es decir, si se puede hallar uno y un mismo valor de N que sea válido para todo punto z perteneciente a G. En el caso de que la sucesión sea convergente, $N = N(\epsilon,z)$, pero si la sucesión es uniformemente convergente, entonces N puede tomarse de forma que dependa tan sólo de ϵ, es decir, $N = N(\epsilon)$. Las mismas definiciones son utilizables cuando G no sea una región, sino simplemente un conjunto de puntos del plano complejo. Por ejemplo, G podría ser el conjunto de puntos que se encuentran sobre un contorno C. En este caso, se dice que la sucesión converge, o converge uniformemente, sobre C.

Puede ocurrir que una sucesión de funciones no constantes converja sin que la convergencia sea uniforme. Para verlo, consideremos las funciones $s_n(z)=1/(nz)$ en el disco perforado $0 < |z| < 1$. La sucesión $\{s_n(z)\}$ es

$$\frac{1}{z}, \quad \frac{1}{2z}, \quad \frac{1}{3z}, \ldots, \quad \frac{1}{nz}, \ldots$$

y, entonces, $s_n(z) \to 0$ cuando $n \to \infty$. Si se toma $s(z) = 0$ tenemos

$$|s_n(z) - s(z)| = \frac{1}{|z|n}.$$

Por consiguiente, se verifica (1.1) si y solamente si $n \geq 1/(|z|\epsilon)$. Así pues, N puede ser cualquier número entero que verifique $N \geq 1/(|z|\epsilon)$, ningún valor más pequeño será válido. En este caso el valor de N depende forzosamente de z; si se fijan ϵ y N, podríamos hacer que fuera falsa la condición $N \geq 1/(|z|\epsilon)$ escogiendo z de modo que $|z| < 1/(\epsilon N)$. La sucesión converge para $0 < |z| < 1$, pero la convergencia no es uniforme.

Por otra parte, si la región considerada fuese $\epsilon_0 < |z| < 1$, con $\epsilon_0 > 0$ fijo, la convergencia sería uniforme. En efecto, sería suficiente tomar $N = 1/(\epsilon_0\epsilon)$, que es independiente de z.

En los ejemplos anteriores se ve que la convergencia de una misma sucesión de funciones puede no ser uniforme en una región y, en cambio, serlo en otra. Esto indica que la noción de convergencia uniforme está radicalmente asociada con un conjunto de puntos o una región del plano complejo. Si no se permite que z varíe, la distinción entre una y otra clase de convergencia es superflua.

Algunas demostraciones de los Capítulos 3 y 4 se fundaban en propiedades de convergencia uniforme. (Se hizo así, en parte, a fin de que el lector estuviera algo familiarizado con esta noción a la hora de estudiar este capítulo.) En todas ellas, el análisis a realizar se apoyó directamente en la definición. Nuestro principal objetivo ahora es obtener teoremas generales de los cuales los resultados mencionados sean otros tantos casos particulares. Este tratamiento sistemático además de ser más eficiente nos llevará a otros resultados de mayor alcance y profundidad.

TEOREMA 1.1. *Supongamos que todas las funciones $s_n(z)$ sean continuas y que $s_n(z) \to s(z)$ uniformemente sobre la región G. Entonces $s(z)$ es continua, y si C es un contorno arbitrario contenido en G,*

$$\lim_{n\to\infty} \int_C s_n(z)\, dz = \int_C s(z)\, dz.$$

Demostración. Sean z_0 y z dos puntos de G. Entonces

$$s(z) - s(z_0) = s_n(z) - s_n(z_0) + s_n(z_0) - s(z_0) + s(z) - s_n(z). \tag{1.2}$$

Dado $\epsilon > 0$, podemos elegir un N independiente de z tal que $n \geq N$ implique

$$|s_n(z_0) - s(z_0)| \leq \epsilon, \qquad |s(z) - s_n(z)| \leq \epsilon.$$

Tomemos $n = N$, que satisface de manera evidente la condición $n \geq N$. Como $s_n(z)$ es continua, podemos elegir $\delta > 0$ de manera que se verifique

$$|s_n(z) - s_n(z_0)| < \epsilon \quad \text{para} \quad |z - z_0| < \delta.$$

Entonces, (1.2) da

$$|s(z) - s(z_0)| < 3\epsilon \quad \text{para} \quad |z - z_0| < \delta$$

lo que muestra que $s(z)$ es continua en z_0. Como z_0 es un punto arbitrario de G, $s(z)$ es continua en G.

El hecho de ser $s(z)$ continua en G permite afirmar que es integrable. Estableceremos la siguiente forma fuerte del segundo aserto del Teorema 1.1: Dado $\epsilon > 0$, existe un $N = N(\epsilon, L)$ independiente de C tal que $n > N$ implica

$$\left| \int_C s_n(z)\, dz - \int_C s(z)\, dz \right| < \epsilon \tag{1.3}$$

para todo contorno C contenido en G cuya longitud sea $\leq L$. Es decir, brevemente, la convergencia es uniforme con respecto a C para todos los contornos de la clase especificada. Para demostrarlo, tomemos N de manera que

$$|s_n(z) - s(z)| < \epsilon/L$$

cuando $n > N$ para todo z perteneciente a G. Entonces, el primer miembro de (1.3) es menor o igual que $(\epsilon/L)L$ de donde se sigue el aserto.

TEOREMA 1.2. *Supongamos que $s_n(z)$ sea analítica en el disco $|z - z_0| < R$ y que $s_n(z) \to s(z)$ uniformemente en todo disco $|z - z_0| \leq R - \delta$, para cada valor constante $\delta > 0$. Entonces $s(z)$ es analítica en el disco $|z - z_0| < R$ y $s_n'(z) \to s'(z)$ uniformemente en cada disco $|z - z_0| \leq R - \delta$.*

Este resultado es verdaderamente notable. No es verdad, en general, que la sucesión de derivadas de una sucesión uniformemente convergente de funciones reales sea convergente, como muestra el ejemplo

$$s_n(x) = \frac{\operatorname{sen} nx}{n}.$$

En este caso, $s_n'(x) = \cos nx$ y esta sucesión no converge para ningún $x \neq 2k\pi$. Sin embargo, $\{s_n(x)\}$ converge uniformemente hacia 0 en toda la recta $-\infty < x < \infty$.

Demostración. Sea C un contorno triangular arbitrario contenido en el disco $|z - z_0| < R$ y elijamos $\delta > 0$ lo suficientemente pequeño como para que C esté contenido en el disco $|z - z_0| \leq R - \delta$. Entonces

$$\int_C s(z)\, dz = \lim_{n \to \infty} \int_C s_n(z)\, dz = 0$$

La primera igualdad se sigue del Teorema 1.1, y la segunda, del teorema de Cauchy. Por el teorema de Morera, $s(z)$ es analítica en $|z - z_0| < R$.

Sea ahora C una circunferencia cualquiera $|z - z_0| = R - \delta$ con $\delta > 0$. Si z está en el interior de C, por la fórmula de Cauchy se tiene

$$s'(z) - s_n'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C [s(\zeta) - s_n(\zeta)] \frac{d\zeta}{(\zeta - z)^2}. \tag{1.4}$$

Para cada $\epsilon > 0$ podemos elegir N de tal manera que, en (1.4),

$$n \geq N \quad \text{implica} \quad |s(\zeta) - s_n(\zeta)| \leq \frac{\epsilon \delta^2}{R}.$$

Si z no sólo es interior a C sino que verifica además la condición más restrictiva

$$|z - z_0| \leq R - 2\delta, \tag{1.5}$$

entonces, en (1.4), $|\zeta - z|^2 \geq \delta^2$ y de aquí

$$|s'(z) - s_n'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} 2\pi R \frac{\epsilon \delta^2}{R} \frac{1}{\delta^2} = \epsilon.$$

Esta acotación muestra que la convergencia de $s_n'(z)$ hacia $s'(z)$ es uniforme en el disco (1.5). Como δ es arbitrario, el Teorema 1.2 queda probado.

TEOREMA 1.3. *Supongamos que $s_n(z)$ sea analítica en un dominio D y que $s_n(z) \to s(z)$ uniformemente en D. Entonces, para todo z perteneciente a D,*

$$s_n'(z) \to s'(z), \quad s_n''(z) \to s''(z), \quad s_n'''(z) \to s'''(z),$$

y así sucesivamente. (Obsérvese que D es arbitrario.)

Demostración. Sea z_0 un punto arbitrario de D y consideremos un disco $|z - z_0| < R$ contenido en D. Entonces $s_n(z)$ verifica en este disco las hipótesis del Teorema 1.2. La tesis del Teorema 1.2 es que $s_n'(z)$ verifica en dicho disco la hipótesis del Teorema 1.2. Aplicando otra vez el Teorema 1.2 vemos que $s_n''(z)$ verifica en este disco las hipótesis del Teorema 1.2, y así sucesivamente. En consecuencia, el Teorema 1.2 demuestra la conclusión del Teorema 1.3 en el punto $z = z_0$. Por ser z_0 un punto arbitrario de D el teorema está demostrado.

En los resultados anteriores se ha supuesto que el límite $s(z)$ ya es conocido. Daremos ahora un criterio de convergencia que es utilizable aún cuando no se conozca la función $s(z)$ tal que $s_n(z) \to s(z)$

Se dice que una sucesión de números complejos s_n forma una sucesión de Cauchy cuando se verifica lo siguiente: Para todo $\epsilon > 0$ existe un N, que depende de ϵ, tal que

$$n \geq N \quad \text{y} \quad m \geq N \quad \text{implica} \quad |s_n - s_m| \leq \epsilon.$$

La misma definición se utiliza para una sucesión $s_n(z)$ de funciones, aunque ahora, posiblemente, N depende no sólo de ϵ sino también de z. Cuando N puede hacerse independiente de z, para z en una cierta región G, se dice que la sucesión $\{s_n(z)\}$ es una sucesión uniformemente de Cauchy en G.

Por ejemplo, supongamos que $s_n(z) \to s(z)$ sobre G, y demos $\epsilon > 0$ En este caso podemos elegir $N = N(\epsilon,z)$ de manera que

$$|s_n(z) - s(z)| \leq \tfrac{1}{2}\epsilon, \quad |s(z) - s_m(z)| \leq \tfrac{1}{2}\epsilon$$

para $n \geq N$ y $m \geq N$, respectivamente. Las dos acotaciones anteriores implican

$$|s_n(z) - s_m(z)| \leq \epsilon$$

y por lo tanto, $\{s_n(z)\}$ es una sucesión de Cauchy. Además, si $s_n(z) \to s(z)$ uniformemente sobre G, podemos tomar $N = N(\epsilon)$ independiente de z, y la sucesión es una sucesión uniformemente de Cauchy.

Demostraremos ahora que el recíproco también es cierto. La demostración se sigue de un resultado de Análisis real que afirma que toda sucesión de Cauchy de números reales posee límite. En algunos tratados de Análisis real el enunciado anterior se toma como axioma; en otros, constituye un teorema. Sea como fuere, lo aplicaremos aquí.

TEOREMA 1.4. *Si* $\{s_n(z)\}$ *es una sucesión de Cauchy en una región G, existe una función* $s(z)$ *tal que* $s_n(z) \to s(z)$ *en G. Además, si* $\{s_n(z)\}$ *es una sucesión uniformemente de Cauchy en G, entonces la convergencia de* $s_n(z) \to s(z)$ *es uniforme en G.*

Demostración. Sea $s_n(z) = u_n(z) + i\,v_n(z)$. Si z es un punto arbitrario de G, entonces,

$$|u_n(z) - u_m(z)| \leq |s_n(z) - s_m(z)|$$

y por tanto, $\{u_n(z)\}$ es una sucesión de Cauchy de funciones reales. Por consiguiente, existe $u_n(z) = u(z)$. Lo mismo puede decirse con respecto a $v_n(z)$ y tomando $\lim s_n(z) = s(z)$ es inmediato que $s(z) = u(z) + iv(z)$. Para demostrar que la convergencia es uniforme cuando la sucesión es uniformemente de Cauchy, dado $\epsilon > 0$ se toma $N = N(\epsilon)$ de forma que

$$|s_n(z) - s_m(z)| \leq \epsilon$$

para todos $n \geq N$, $m \geq N$, y para todo z perteneciente a G. Haciendo tender $m \to \infty$ se tiene

$$|s_n(z) - s(z)| \leq \epsilon$$

para todo $n \geq N$, que es la condición de convergencia uniforme.

Ejemplo 1.1. Siendo R fijo y tal que $0 < R < 1$, demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} z^n = 0 \qquad \text{uniformemente para } 0 \leq |z| \leq R.$$

Como $1/R > 1$, existe un $1/R = 1 + \delta$ tal que $\delta > 0$. Entonces,

$$|z| \leq \frac{1}{1+\delta}, \qquad |z|^n \leq \frac{1}{1+n\delta}$$

La primera acotación es consecuencia de $|z| \leq R$ la segunda se deduce del teorema del binomio (Capítulo 1, Ejemplo 1.6.) Basándose en estas dos acotaciones la conclusión pedida es trivial. Si, a pesar de todo, fuera preciso demostrar rigurosamente esta conclusión, razonaríamos así: Dado $\epsilon > 0$ tomemos $N = 1/(\epsilon\delta)$, que es independiente de z. Entonces $n \geq N$ implica $n\delta \geq 1/\epsilon$, y por la acotación dada arriba,

$$|z|^n \leq \frac{1}{1 + (1/\epsilon)} = \frac{\epsilon}{1+\epsilon} < \epsilon.$$

Ejemplo 1.2. Se define la sucesión $\{s_n(z)\}$ por

$$s_n(z) = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n.$$

Demostrar que $s_n(z) \to (1 - z)^{-1}$ cuando $|z| < 1$ y que la convergencia es uniforme en el disco $|z| \leq R$, siendo $R < 1$ constante.

Por el Ejemplo 1.5 del Capítulo 1.

$$s_n(z) = \frac{1}{1 - z} - \frac{z}{1 - z} z^n.$$

Por lo tanto, los asertos anteriores se siguen del Ejemplo 1.1 de esta sección. Como ya se explicó en la Sección 6 del Capítulo 3, el resultado se denota en la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1 - z}, \qquad |z| < 1, \quad (1.6)$$

y se dice que (1.6) converge uniformemente cuando $|z| \leq R$.

La serie (1.6) es una serie geométrica, formalmente idéntica a las series geométricas reales. Acabamos de ver que algunos resultados concernientes a las series geométricas reales son válidos sin más, cuando z toma valores complejos. Otros resultados relativos a las sucesiones y series de números reales se generalizan fácilmente al campo complejo, y no insistiremos más sobre ellos.

Problemas

1. (a) Representar la gráfica de $s(z) = \lim z^n$ para $0 \leq z \leq 1$ deducir del Teorema 1.1 que la convergencia no es uniforme en este intervalo. (b) Demostrar que la convergencia tampoco es uniforme en el intervalo semicerrado $0 \leq z < 1$.
2. Supongamos que $s_n(z) \to s(z)$ y $t_n(z) \to t(z)$ uniformemente en una región G, y supongamos que $f(z)$ sea una función acotada en G, esto es, $|f(z)| <$ constante. Demostrar que

$$s_n(z) \to s(z), \quad s_n(z) + t_n(z) \to s(z) + t(z), \quad s_n(z)f(z) \to s(z)f(z)$$

   siendo uniforme la convergencia en G. Mostrar también que la acotación de f es esencial. (Tómese $f(z) = 1/z$, $s_n(z) = 1/n$.)
3. Supongamos que $s_n(z) \to s(z)$ y $t_n(z) \to t(z)$ uniformemente en una región G, y supongamos que $s(z)$ y $t(z)$ están acotadas en G. Demostrar que

$$s_n(z)t_n(z) \to s(z)t(z)$$

   uniformemente en G. (Tómese $s_n(t_n - t) + t(s_n - s)$.)
4. Siendo $p > 0$ se define la sucesión $\{s_n\}$ mediante

$$s_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p}.$$

Observando la Figura 1-1, demostrar que para $n > m \geq 2$ se verifica

$$\int_m^{n+1} \frac{dx}{x^p} < s_n - s_m < \int_{m-1}^{n} \frac{dx}{x^p}.$$

Se concluye que $\{s_n\}$ converge si y solamente si $p > 1$.

Repaso de series.

Se denotarán ahora mediante $\{a_j\}$ y $\{b_j\}$ sucesiones de números complejos, $j \geq m$.

5. Como en el Análisis de variable real, si $n \geq m$,

$$\sum_{j=m}^{n} a_j = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n.$$

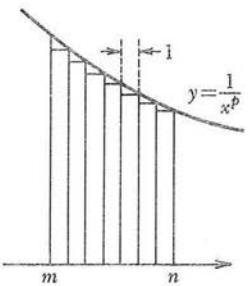


Figura 1-1

Demostrar que esta operación es lineal, en el sentido de que

$$\sum_{j=m}^{n} (\alpha a_j + \beta b_j) = \alpha \sum_{j=m}^{n} a_j + \beta \sum_{j=m}^{n} b_j \qquad (*)$$

para todo par de números complejos α y β.

6. Como en variable real, el valor de la suma del problema anterior para $n = \infty$ se obtiene tomando el límite para $n \to \infty$. Así pues, si el límite existe,

$$\sum_{j=m}^{\infty} a_j = \lim_{n \to \infty} \sum_{j=m}^{n} a_j.$$

Se dice entonces que la serie del primer miembro es convergente. Suponiendo que las dos series del segundo miembro de (*) sean convergentes cuando $n = \infty$, extender aquel resultado al caso (*).

7. Tomando en (*) $\beta = 0$ o $\alpha = 1, \beta = 1$, y $\alpha = 1, \beta = -1$, demostrar que una serie convergente puede multiplicarse término a término por una constante, y que para sumar o restar dos series convergentes basta sumarlas o restarlas término a término.
8. Sean $a_i(z)$ los términos de una serie infinita definida en una región G. Si se sustituye un número finito de funciones $a_i(z)$ por otras, $b_i(z)$, demostrar que no se alteran las propiedades de convergencia de la serie. (El valor de la suma sí resultará afectada, como es natural.)

2. **Convergencia de series.** Una sucesión infinita de funciones equivale a la sucesión de sumas parciales de una serie infinita. Si se considera la serie

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j(z) = a_1(z) + a_2(z) + \cdots + a_n(z) + \cdots$$

su n-ésima suma parcial es, por definición,

$$s_n(z) = a_1(z) + a_2(z) + \cdots + a_n(z). \tag{2.1}$$

Así pues, la sucesión de sumas parciales $\{s_n(z)\}$ es

$$a_1(z),\ a_1(z) + a_2(z),\ a_1(z) + a_2(z) + a_3(z), \ldots$$

y se encuentra totalmente determinada cuando se conoce la sucesión $\{a_n(z)\}$ de términos de la serie. Recíprocamente, dada la sucesión de sumas parciales se obtiene la sucesión de términos sin más que observar que

$$a_1(z) = s_1(z), \qquad a_j(z) = s_j(z) - s_{j-1}(z) \tag{2.2}$$

para todo $j \geq 2$. En razón de esta correspondencia, no se hace distinción lógica entre la serie y la sucesión de sumas parciales que determina.

Se puede construir una teoría no trivial en la cual se consideran tan sólo las propiedades formales de las series, no estudiando ni las propiedades de convergencia ni asignándoles suma. Sin embargo, las series comúnmente utilizadas en Análisis son importantes precisamente por dichas propiedades, definiéndose su suma como el límite de la sucesión $\{s_n(z)\}$. Cuando las sumas parciales de una serie verifican la condición $s_n(z) \to s(z)$ en todos los puntos de una región G se dice que la serie converge hacia $s(z)$ en G y se escribe

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j(z) = s(z). \tag{2.3}$$

En el caso de que el límite anterior no exista en un punto z se dice que la serie es divergente en dicho punto, y no se le asigna en él ningún valor a $s(z)$. Si $s_n(z) \to s(z)$ uniformemente en G, entonces se dice que la serie es uniformemente convergente en G. Como es obvio, estos mismos convenios son válidos aunque G sea tan sólo un cierto conjunto de puntos que no formen región, o cuando la suma no comience en $j = 1$.

Si el índice de sumación recorre todos los valores enteros de $(-\infty,\infty)$ en lugar de los correspondientes a $(0,\infty)$ o $(1,\infty)$ las definiciones para series son enteramente análogas a las utilizadas para integrales en la Sección 4 del Capítulo 4. Así,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n = a_0 + \lim_{N_1\to\infty} \sum_{n=1}^{N_1} a_n + \lim_{N_2\to\infty} \sum_{n=-N_2}^{-1} a_n$$

supuestos existentes los dos límites del segundo miembro. En este caso se dice que la serie es convergente. Por definición, el valor principal de Cauchy de la serie es

$$P \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} a_n$$

Puede ocurrir que la serie sea convergente en valor principal y que sin embargo no lo sea en sentido ordinario. En caso de que a_n sea función par de n, la convergencia en valor principal de Cauchy y la convergencia en sentido ordinario son equivalentes.

Tomando en (2.2) el límite cuando $j \to \infty$ se tiene

$$\lim_{j\to\infty} a_j(z) = \lim_{j\to\infty} s_j(z) - \lim_{j\to\infty} s_{j-1}(z) = s(z) - s(z) = 0$$

supuesto que la serie sea convergente hacia $s(z)$ en el punto z; por consiguiente, el término general de una serie convergente ha de tener límite 0.

Se deduce del Teorema 1.3 que si cada término de una serie es función analítica en un dominio D, y la serie (2.3) es uniformemente convergente en D, entonces la suma $s(z)$ de la serie es analítica en D, y además, derivando la serie término a término se obtiene

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j'(z) = s'(z), \qquad \sum_{j=0}^{\infty} a_j''(z) = s''(z), \tag{2.4}$$

y así sucesivamente, en todo punto de D. Más todavía, si C es un contorno arbitrario contenido en D, se puede integrar la serie término a término sobre él obteniéndose

$$\int_C s(z)\,dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_C a_j(z)\,dz. \tag{2.5}$$

Este resultado se sigue del Teorema 1.1; es menos profundo que el correspondiente para la derivación, pues continúa siendo válido si los términos de la serie son tan sólo funciones continuas.

Los resultados anteriores no serían de gran valor si no se dispusiera de métodos para reconocer cuando una serie converge uniformemente. Una condición suficiente de gran utilidad es el llamado criterio M de Weierstrass, cuyo enunciado es el siguiente:

TEOREMA 2.1. *(Weierstrass.) Supongamos que en una región G se verifique $|a_j(z)| \leq M_j$ siendo M_j constantes tales que*[1]

$$\sum_{j=1}^{\infty} M_j < \infty. \tag{2.6}$$

Entonces la serie (2.3) converge uniformemente en G.

Demostración. Evidentemente, si $n > m$,

$$|s_n(z) - s_m(z)| \leq \sum_{m+1}^{n} |a_j(z)| \leq \sum_{m+1}^{n} M_j \leq \sum_{m+1}^{\infty} M_j.$$

En virtud de (2.6), el segundo miembro puede hacerse arbitrariamente pequeño, tomando m suficientemente grande. Por tanto, $\{s_n(z)\}$ es una sucesión uniformemente de Cauchy en G; el Teorema 2.1 es entonces consecuencia del Teorema 1.4.

Para utilizar con éxito el criterio de Weierstrass es importante conocer algunas series numéricas convergentes que aparecen con frecuencia, Por el Ejemplo 1.2 y el Problema 4 de la Sección 1,

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n < \infty, \quad 0 \leq r < 1; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} < \infty, \quad p > 1.$$

Estas dos series serán suficientes para las necesidades de este texto.

Ejemplo 2.1. Una de las funciones más importantes en Matemáticas, que origina difíciles problemas es la función zeta de Riemann, que se define por

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}, \qquad \operatorname{Re} z > 1.$$

Demostrar que $\zeta(z)$ es analítica en el semiplano $\operatorname{Re} z > 1$.

Cada término $n^{-z} = \exp(-z \operatorname{Log} n)$ de esta serie es una función entera. Se tiene,

[1] La acotación (2.6) significa que la serie es convergente. Se utiliza esta notación solamente para series de términos no negativos e integrales con integrandos no negativos.

$$|n^{-z}| = |e^{-(x+iy)\operatorname{Log} n}| = |e^{-x\operatorname{Log} n}e^{-iy\operatorname{Log} n}| = n^{-x}.$$

Cuando $x \geq p > 1$, $|n^{-z}| \leq n^{-p}$, el criterio de Weierstrass muestra que la serie converge uniformemente en este semiplano. Por consiguiente, representa una función analítica en $x \geq p$ para todo $p > 1$, de donde se sigue el resultado requerido.

Históricamente la variable independiente de esta función se designa por $s = \sigma + it$ en lugar de z, y se escribe

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \qquad \operatorname{Re} s > 1.$$

Hemos demostrado aquí que $\zeta(s)$ es analítica para $\operatorname{Re} s > 1$. En realidad, $\zeta(s)$ puede prolongarse analíticamente a la región $\operatorname{Re} s \leq 1$, hallándose que la prolongación de la función tiene una única singularidad finita: un polo simple en $s = 1$.

TEOREMA 2.2. *(Criterio del cociente.) Supongamos que en una región C esté definida $a_j(z)$ para todo $j \geq 1$, que $|a_N(z)|$ esté acotada para algún número fijo $N \geq 1$, y que*

$$\left|\frac{a_{n+1}(z)}{a_n(z)}\right| \leq R < 1, \qquad n \geq N,$$

siendo R constante. Entonces la serie (2.3) converge uniformemente en G.

Demostración. Puesto que al suprimir un número finito de términos de la serie no se altera su convergencia, es suficiente demostrar el teorema cuando $N = 1$ Evidentemente,

$$a_n(z) = a_1(z)\frac{a_2(z)}{a_1(z)}\,\frac{a_3(z)}{a_2(z)} \cdots \frac{a_n(z)}{a_{n-1}(z)}.$$

Tomando valores absolutos se obtiene $|a_n(z)| \leq MR^{n-1}$, siendo M una cota superior de $|a_1(z)|$ en G. El resultado se sigue ahora del criterio M de Weierstrass.

El siguiente caso particular del Teorema 2.2 no es un criterio de convergencia uniforme, pero con frecuencia resulta de utilidad. Supongamos que en un punto $z = z_0$, dado se verifique

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}(z)}{a_n(z)}\right| = R_0. \tag{2.7}$$

Entonces la serie (2.3) converge en z_0 si $R_0 < 1$ y diverge si $R_0 > 1$. En efecto, si $R_0 < 1$, podemos tomar R de forma que $R_0 < R < 1$. Se comprueba sin dificultad que el criterio del Teorema 2.2 es válido en z_0 para N suficientemente grande, y por consiguiente, la serie converge. Por otra parte, si $R_0 > 1$, el término general no tiende a 0, y la serie es divergente.

Ejemplo 2.2. Demostrar que la función

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{2z}{z^2 - n^2} \tag{2.8}$$

es meromorfa en el plano z, y que sus únicas singularidades finitas son polos simples de residuo 1 en todos los puntos enteros.

Demostraremos que la función dada posee estas propiedades en el disco $|z| < R$ para todo R. Dado $R > 0$ elijamos un entero $N > 2R$. Entonces $f(z) = J_1(z) + J_2(z)$ siendo

$$J_1(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{N}{}' \frac{2z}{z^2 - n^2}, \qquad J_2(z) = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}.$$

Es claro que $J_1(z)$ es analítica en el disco $|z| < R$ exceptuados los puntos enteros contenidos en el disco, que son polos simples con residuo igual a 1. Cuando $|z| < R$, los términos de la serie $J_2(z)$ verifican

$$\left|\frac{2z}{z^2 - n^2}\right| \leq \frac{2R}{n^2 - R^2} = \frac{1}{n^2} \frac{2R}{1 - (R/n)^2}.$$

El factor $1 - (R/n)^2$ en el denominador se hace mínimo cuando $n = 2R$, tomando entonces el valor 3/4. Así pues,

$$\left|\frac{2z}{z^2 - n^2}\right| \leq \frac{8R}{3n^2}, \qquad (n \geq 2R)$$

y la serie asociada con $J_2(z)$ converge uniformemente en $|z| < R$ por el criterio M. Esto muestra que $J_2(z)$ es analítica para $|z| < R$ lo que completa la demostración.

La función $\pi \cot \pi z$ tiene las mismas propiedades que la función $f(z)$ que acabamos de estudiar; veremos ahora que $f(z) = \pi \cot \pi z$. La serie (2.8) se llama desarrollo de Mittag-Leffler de $\pi \cot \pi z$

Ejemplo 2.3. No siendo α un número entero, demostrar que

$$\sum_{-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{\alpha^2 - n^2} = \pi \frac{\cot \pi\alpha}{\alpha}. \tag{2.9}$$

Como sugiere la Sección 6 del Capítulo 4, consideraremos

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\pi \cot \pi z}{\alpha^2 - z^2}\, dz$$

siendo C un contorno cerrado simple. El integrando puede ponerse en la forma

$$\frac{\pi \cos \pi z}{\operatorname{sen} \pi z} \frac{1}{\alpha^2 - z^2}$$

y por la ecuación (2.4) del Capítulo 4, su residuo en un punto entero $z = n$, es

$$\frac{\pi \cos \pi z}{\pi \cos \pi z} \frac{1}{\alpha^2 - z^2}\bigg|_{z=n} = \frac{1}{\alpha^2 - n^2}.$$

Por consiguiente, la integral es la suma de aquellos términos de la serie (2.9) correspondientes a valores de n que sean interiores al contorno C.

Tomaremos ahora como contorno C la frontera orientada del dominio rectangular

$$-(N + \tfrac{1}{2}) < x < N + \tfrac{1}{2}, \qquad -N < y < N$$

siendo $N \geq 2$ y entero. (Ver la Figura 2-1.) Cuando $N > |\alpha|$, el teorema de los residuos da

$$I = \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{\alpha^2 - n^2} - \pi \frac{\cot \pi\alpha}{\alpha}$$

La aparición del último sumando se debe a los residuos en $-\alpha$ y α. Se muestra en el Problema 6 que

$$|\cot \pi z| \leq \coth \pi, \qquad z \text{ en } C. \quad (2.10)$$

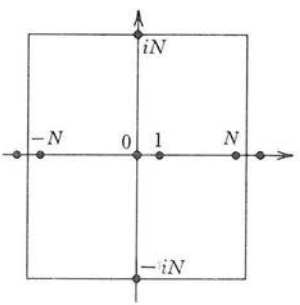


Figura 2-1

Como la longitud de C es $4N+1$, y dado que sobre C se verifica $|z| \geq N$ se deduce que

$$|I| \leq \frac{4N+1}{2\pi} \frac{\pi \coth \pi}{N^2 - |\alpha|^2}, \qquad N \geq 2, \quad N > |\alpha|.$$

El segundo miembro tiende a 0 cuando $N \to \infty$ y el resultado requerido aparece como el valor principal de la serie. Como n^2 es función par de n, la serie es convergente en sentido ordinario.

Si hacemos $\alpha = z$ en (2.9) y multiplicamos por z, la serie resultante coincide con la (2.8). Así pues, $f(z) = \pi \cot \pi z$.

Problemas

1. Siendo a una constante real cualquiera, y tomando n^a en su sentido ordinario de variable real, demostrar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{4^n n^a}$$

es convergente para $|z| < 2$ y divergente para $|z| > 2$. Solución: si $z \neq 0$, la razón del término $n+1$-ésimo al n-ésimo verifica

$$\left| \frac{a_{n+1}(z)}{a_n(z)} \right| = \left| \frac{z^{2n+2}}{4^{n+1}(n+1)^a} \frac{4^n n^a}{z^{2n}} \right| = \frac{|z|^2}{4} \left| \frac{n}{n+1} \right|^a.$$

Cuando $n \to \infty$ el límite es $|z|^2/4$, y la conclusión se sigue de (2.7).

2. Hallar para cada una de las series siguientes un número R tal que la serie sea convergente para $|z| < R$ y divergente para $|z| > R$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n z^{2n}}{n^2 + n}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n z^n}{4^n + 5^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n n!}{n^n}.$$

3. Demostrar que cada una de las funciones siguientes es función entera de z:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(n!)^{1/2}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n^2}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{1}{n^z}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nz}{n!}.$$

4. Siendo $a > 0$, demostrar que cada una de las series siguientes representa una función analítica en el semiplano $\operatorname{Re} z > 0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a+n)^{z+1}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 az}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-anz}}{(a+n)^z}.$$

5. Demostrar que cada una de las funciones siguientes es meromorfa en el plano finito $|z| < \infty$ y hallar sus residuos en los polos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+z)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2+n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nz}{n!(z^2+n^2)}.$$

Sumación de series

6. En la Figura 2-1, sobre los lados verticales se verifica $\pi x = \pi m + \pi/2$, siendo m un número entero, y por tanto,

$$|\cot \pi(x + iy)| = |\tan \pi iy| = |\tanh \pi y|.$$

Como $|e^{\pi i(x+iy)}| = e^{-\pi y}$ y $|e^{\pi i(x-iy)}| = e^{\pi y}$, demostrar también, para todo $y \neq 0$, que

$$|\cot \pi(x + iy)| \leq |\coth \pi y|.$$

Demostrar que $|\tanh \pi y| \leq 1$ y que $|\coth \pi y|$ decrece al crecer $|y|$, y de aquí, que esta función alcanza su máximo para $|y| \geq 1$ en $y = 1$. Obtener de esta forma (2.10).

7. Demostrar que, excepto en los polos,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\alpha}{n^2+\alpha^2} = \frac{\pi}{\tanh \pi\alpha}, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n+\alpha)^2} = \left(\frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi\alpha}\right)^2.$$

8. Agrupando los términos correspondientes a n y a $-n$, la primera serie del Problema 7 puede escribirse como $1/\alpha$ más una serie de 1 a ∞. Calcular la suma de la segunda serie del Problema 5, y haciendo $z = 0$, mostrar que

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

9. Demostrar que $|\pi \csc \pi z|$ está acotado sobre el contorno de la Figura 2-1, y discutir la relación existente entre

$$\int_C f(z)\pi \csc \pi z \, dz \quad \text{y} \quad P \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n f(n).$$

10. Haciendo uso del Problema 9, demostrar que si $\alpha \neq$ no es un número entero y si $-\pi < \beta < \pi$, entonces

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\alpha+n)^2} = \pi^2 \frac{\cot \pi\alpha}{\operatorname{sen} \pi\alpha}, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n n \operatorname{sen} n\beta}{\alpha^2 - n^2} = \frac{\pi \operatorname{sen} \alpha\beta}{2 \operatorname{sen} \alpha\pi}.$$

3. Series de potencias. Siendo α y a_n constantes complejas, la serie

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - \alpha)^n \tag{3.1}$$

se llama serie de potencias en torno al punto $z = \alpha$. Tomando $z - \alpha$ como nueva variable siempre es posible poner la serie anterior en la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{3.2}$$

efectuándose ahora el desarrollo en torno al origen. Así se hará en las demostraciones que se darán a continuación.

TEOREMA 3.1. *Si la serie (3.1) converge en un punto $z_0 \neq \alpha$, entonces converge para todo z del disco $|z - \alpha| < |z_0 - \alpha|$ y la convergencia es uniforme en el disco cerrado $|z - \alpha| \leq r$ cualquiera que sea $r < |z_0 - \alpha|$.*

Demostración. Se puede suponer que $\alpha = 0$. Como la serie (3.2) converge en z_0 su término general tiene límite 0, y por lo tanto, $|a_n z_0^n| < 1$ para todo n suficientemente grande; por ejemplo, para $n > N$. Entonces, si $n > N$

$$|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leq \left|\frac{z}{z_0}\right|^n. \tag{3.3}$$

Si se toma $|z/z_0| \leq R < 1$, basta considerar $M_n = R^n$ en el criterio M de Weierstrass; los dos asertos del teorema son ahora evidentes.

TEOREMA 3.2. *Sea $R > 0$ y supongamos que $|b_n| \leq |a_n|$ para todo n suficientemente grande. Entonces, si la primera de las series siguientes converge para todo z que verifique $|z - \alpha| < R$, lo mismo es cierto para la segunda:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - \alpha)^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - \alpha)^n. \tag{3.4}$$

Demostración. Supongamos que $\alpha = 0$ y que la primera serie converja en $z_0 \neq 0$. Entonces (3.3) da una acotación del mismo tipo para $|b_n z^n|$, en la hipótesis $|b_n| \leq |a_n|$, y por tanto, la segunda serie converge para $|z| < |z_0|$. Como z_0 puede ser cualquier número tal que $|z_0| < R$, el teorema ha sido demostrado.

TEOREMA 3.3. *Una serie de potencias (3.1) es necesariamente de uno de los tipos siguientes:*

(1) *La serie converge solamente en el punto $z = \alpha$*
(2) *La serie converge para todo $|z| < \infty$.*
(3) *Existe un $R > 0$ tal que la serie es convergente para $|z - \alpha| < R$ y divergente para $|z - \alpha| > R$.*

El número R se llama radio de convergencia de la serie. Los casos (1) y (2) se designan en ocasiones por $R = 0$ y $R = \infty$, respectivamente. Si $|a_n| = |b_n|$, el Teorema 3.2 muestra que las dos series (3.4) tienen el mismo radio de convergencia. Por consiguiente, R, depende tan solo de la sucesión $\{|a_n|\}$ de valores absolutos, y es independiente de $\{\arg a_n\}$.

Demostración. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\alpha = 0$ con lo que la serie vendría dada por (3.2). Si la serie no está incluida en los casos (1) ni (2), entonces la serie converge en un cierto punto $z_0 \neq 0$ y diverge en algún otro, z_1. Sea S el conjunto de todos los números positivos ρ tales que la serie converge para $|z| < \rho$. Es obvio que S no podrá contener números mayores que $|z_1|$, por lo cual S está acotado superiormente. Por otra parte, $|z_0|$ pertenece a S, y así pues, S no es vacío. (En efecto, la convergencia en z_0 garantiza la convergencia para todo $|z| < |z_0|$.) Como se sabe del Análisis de variable real, el conjunto S tiene un extremo superior [1] que llamaremos R. Se comprueba sin dificultad que la serie diverge cuando $|z| > R$ y converge cuando $|z| < R$. En efecto, si la serie convergiera en algún punto z_2, con $|z_2| > R$, entonces, por el Teorema 3.1, habría de ser convergente para $|z| < |z_2|$, y R no sería el extremo superior del conjunto S. Por otra parte, si $|z_3| < R$, por definición de extremo superior podemos hallar un número ρ perteneciente a S tal que $|z_3| < \rho < R$. lo que prueba que la serie converge en z_3. Como se quería demostrar.

Si se deriva término a término una serie de potencias, la serie derivada tiene el mismo radio de convergencia que la serie primitiva. Para verlo, supongamos que (3.2) converge en $z \neq 0$. Entonces (3.3) da

$$|na_n z^{n-1}| \leq nR^{n-1}$$

siendo $R = |z/z_0| < 1$. La serie de término general $M_n = nR^{n-1}$ es convergente, como muestra el criterio del cociente, y por lo tanto, el radio de convergencia no disminuye al derivar la serie. El Teorema (3.2) muestra que el radio tampoco aumenta.

El siguiente teorema afirma que la serie derivada no solo es convergente sino que además su suma es la derivada de la función original:

TEOREMA 3.4. *Si la serie de potencias (3.1) tiene radio de convergencia $R > 0$, entonces su suma es una función analítica en el disco $|z - \alpha| < R$ y para calcular $f'(z)$, $f''(z)$, . . es suficiente derivar la serie término a término.*

Demostración. Supongamos $\alpha = 0$. Si $|z_1| < R$, la serie converge en z_1 y por consiguiente, converge uniformemente en el disco $|z| < |z_0|$ para todo $|z_0| < |z_1|$. Los términos $a_j(z) = a_j z^j$ son, evidentemente, analíticos para todo z, y por tanto, la derivación término a término de la serie está justificada por la fórmula (2.4). Como $|z_0|$ puede tomarse tan próximo a R como se desee, el teorema queda demostrado.

[1] Capítulo 3, Sección 7.

Se deduce del Teorema 3.4 que toda serie de potencias con radio de convergencia no nulo es una serie de Taylor, más concretamente, es la serie de Taylor de su suma. En efecto, derivando n veces la serie (3.1) se tiene

$$f^{(n)}(z) = n!a_n + \cdots$$

en la que todos los términos no representados contienen el binomio $z - \alpha$ y sus potencias. Al hacer $z = \alpha$, todos estos términos se anulan, y por tanto

$$a_n = \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}. \tag{3.5}$$

La igualdad (3.5) muestra que una serie de potencias está unívocamente determinada por su suma en cualquier disco $|z - \alpha| < \epsilon$. Es decir, si la función $f(z)$ de la fórmula (3.1) verifica

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - \alpha)^n$$

en un disco $|z - \alpha| < \epsilon$, entonces $b_n = f^{(n)}(\alpha)/n!$, y por consiguiente, $b_n = a_n$. Otra consecuencia importante de (3.5) es que una serie de potencias converge "hasta la singularidad más próxima", en el sentido que se precisa en el siguiente teorema:

TEOREMA 3.5. *Supongamos que $f(z)$ esté representada por una serie de potencias (3.1) con radio de convergencia $R > 0$. Entonces, si $R_0 > R$ es imposible que $f(z)$ sea analítica en todo el disco $|z - \alpha| < R_0$.*

Demostración. Si $f(z)$ es analítica para $|z - \alpha| < R_0$, entonces la Sección 6 del Capítulo 3 muestra que la serie de Taylor de f converge para $|z - \alpha| < R_0$. Como acabamos de ver, la serie de Taylor coincide con la serie (3.1), y por tanto, (3.1) habría de ser convergente para $|z - \alpha| < R_0$. en contradicción la hipótesis $R < R_0$.

El Teorema 3.5 muestra que dada una función analítica f se puede determinar el radio de convergencia de su serie de Taylor en torno al punto α hallando el círculo más grande de centro α en cuyo interior f sea analítica. Por ejemplo, la serie

$$\frac{1}{1 + x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$

es divergente para $|x| \geq 1$, pues entonces su término general no tiende hacia 0. Si se considera $1/(1 + x^2)$ como función de la variable real x, aparentemente no hay razón para que la serie sea divergente, pues $1/(1 + x^2)$ tiene derivadas de todos los órdenes para todo valor real de x. Pero considerando x como una variable compleja, la situación es diferente, y la divergencia se explica por el hecho de anularse el denominador en $\pm i$. Obviamente, si el círculo de convergencia no puede contener los puntos $\pm i$, el radio de convergencia no

puede ser mayor que 1. En efecto, por el criterio del cociente se tiene, $R = 1$ que es la distancia desde $\alpha = 0$ hasta los puntos $\pm i$.

En el Problema 3.7 se dará otra demostración del Teorema 3.4 que no hace uso de propiedades de la integración, lo que posibilita un nuevo enfoque del Análisis de variable compleja, iniciado ya por Lagrange, pero cuyo desarrollo principal es debido a Weierstrass. Desde el punto de vista de Weierstrass la serie de potencias juega el papel fundamental, y la aplicación principal de la teoría de Cauchy es mostrar que las funciones analíticas poseen efectivamente desarrollos en series de potencias.

Por ejemplo, si $f(z)$ es analítica en el disco $|z - \alpha| < R_0$ y si C es la circunferencia $|\zeta - \alpha| = R < R_0$, la fórmula integral de Cauchy es

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \qquad |z - \alpha| < R.$$

Desarrollando $(\zeta - z)^{-1}$ en serie geométrica se vio en la Sección 6 del Capítulo 3 que se verifica (3.1) siendo

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - \alpha)^{n+1}}\, d\zeta.$$

Se deduce directamente del Teorema 3.4 que $f'(z), f''(z)$ etc, son analíticas, y del hecho de que la fórmula anterior ha de dar el mismo valor que la (3.5), resulta

$$f^{(n)}(\alpha) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - \alpha)^{n+1}}\, d\zeta.$$

Se darán en la Sección 4 otros ejemplos en los que se adopta el método de las series de potencias.

Ejemplo 3.1. Siendo $f(t)$ continua a trozos en el intervalo $0 \leq t \leq a$, demostrar que

$$F(z) = \int_0^a e^{-zt} f(t)\, dt \tag{3.6}$$

es una función entera de z, y hallar su desarrollo en serie de potencias.

Dado un valor fijo arbitrario de z la serie

$$e^{-zt} = 1 - zt + \frac{(-zt)^2}{2!} + \cdots + \frac{(-zt)^n}{n!} + \cdots$$

converge uniformemente en $0 \leq t \leq a$. Por consiguiente, podemos multiplicarla por la función acotada $f(t)$ e integrarla término a término. El resultado es

$$F(z) = \int_0^a f(t)\,dt - z\int_0^a tf(t)\,dt + \cdots + \frac{(-z)^n}{n!}\int_0^a t^n f(t)\,dt + \cdots$$

que es la serie requerida. Si $|f(t)| \leq M$, siendo M constante, entonces

$$\left|\int_0^a t^n f(t)\,dt\right| \leq \int_0^a t^n M\,dt = \frac{a^{n+1}}{n+1}M.$$

Tomando $M_n = Ma(aR)^n/(n+1)!$ en el criterio M de Weierstrass se ve que la serie anterior converge para todo z que verifique $|z| \leq R$. Como R es arbitrario, $F(z)$ es entera.

Ejemplo 3.2. Demostrar que la función

$$g(z) = \int_0^1 e^{-t}t^{z-1}\,dt, \qquad \text{Re}\, z > 1, \quad (3.7)$$

puede prolongarse analíticamente de forma que su prolongación sea meromorfa en todo el plano. Más exactamente, demostrar que existe una función meromorfa $G(z)$ que coincide con $g(z)$ en $\text{Re}\, z > 1$. Se dice entonces que la función $G(z)$ constituye una prolongación analítica de $g(z)$.

Sustituyendo en la integral e^{-t} por su desarrollo en serie de potencias e integrando se obtiene

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 \frac{(-t)^n}{n!}t^{z-1}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n+z)} \quad (3.8)$$

para $\text{Re}\, z > 1$. La integración término a término está justificada porque la serie de e^{-t} converge uniformemente y porque

$$|t^{z-1}| = e^{(x-1)\,\text{Log}\,t} \leq 1.$$

Se demuestra sin dificultad que la función del segundo miembro de (3.8) es meromorfa, por lo que, es la prolongación analítica $G(z)$ pedida.

La integral (3.7) es divergente cuando $z = x < 0$. Por consiguiente, la fórmula (3.8) no solamente da la función G de modo explícito, sino que realmente amplía el dominio donde se conocía la analiticidad de g de una manera que no es evidente a partir de (3.7). La prolongación es única, pues si G_0 fuese otra prolongación, por ser $G(z) = G_0(z)$ para $\text{Re}\, z > 1$ se tiene $G(z) = G_0(z)$ en todo el dominio de analiticidad.

Ejemplo 3.3. La ecuación de Bessel de orden 0 es

$$z^2Y'' + zY' + z^2Y = 0$$

denotando las comillas derivación respecto de z. Obtener una solución de esta ecuación en serie de potencias que verifique $Y(0) = 1$, $Y'(0) = 0$.

Definamos $a_n = 0$ para $n < 0$. Si se pone

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \qquad Y'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}, \qquad Y''(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2}$$

para $|z| < \epsilon$, sustituyendo en la ecuación diferencial se tiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} [n(n-1)a_n + n a_n + a_{n-2}] z^n = 0, \qquad |z| < \epsilon.$$

Por la unicidad de los desarrollos en serie de potencias, el coeficiente de z^n ha de ser 0. Por tanto, a_n verifica la relación recurrente $n^2 a_n = -a_{n-2}$, o sea,

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n^2}, \qquad n = 2,3,4,\ldots. \quad (3.9)$$

La condición $Y'(0) = 0$ da $a_1 = 0$ y de (3.9) se sigue, entonces, $a_3 = 0$, $a_5 = 0$, y así sucesivamente. De forma análoga $Y(0) = 1$ da $a_0 = 1$ y por tanto,

$$a_0 = 1, \quad a_2 = -\frac{1}{2^2}, \quad a_4 = \frac{1}{4^2 2^2}, \quad a_6 = -\frac{1}{6^2 4^2 2^2}$$

y así sucesivamente. La solución es $Y = J_0(z)$ siendo

$$J_0(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n)^2}.$$

Por el criterio del cociente, esta serie converge en todo el plano $|z| < \infty$ y representa una función entera. La derivación término a término está, pues, justificada por el Teorema 3.4, y la función $Y = J_0(z)$ es verdaderamente una solución de la ecuación diferencial.

La función $J_0(z)$ se denomina función de Bessel de orden 0.

Problemas

1. Demostrar que el desarrollo de Taylor en torno a $z = 0$, de una función par $f(z)$ solamente puede contener potencias pares. Análogamente ocurre con las funciones impares. (Se usa que $f(z) - f(-z) = 0$ y se tiene en cuenta la unicidad del desarrollo.)
2. Se define la función de Bessel de orden m:

$$J_m(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z/2)^{2n+m}}{n!(m+n)!}, \qquad m = 0,1,2,3,\ldots.$$

Aplicando el criterio del cociente, mostrar que $J_m(z)$ es una función entera. Demostrar también que $J_0(z)$ coincide con la función que se obtuvo en el Ejemplo 3.3.

3. Supongamos que $f(t)$ sea continua, y tomemos $t^z = e^{z \operatorname{Log} t}$. Demostrar que las dos primeras integrales siguientes representan funciones enteras, y que la tercera representa una función analítica, por lo menos, en el disco $|z| < 1$:

$$\int_{-n}^{n} f(t) \cos zt \, dt, \quad \int_1^2 t^z f(t) \, dt, \quad \int_0^1 \frac{f(t)}{1 - zt} \, dt.$$

4. (a) Si $f(z)$ tiene un desarrollo en serie de potencias de la forma (3.2), con $a_n \geq 0$, demostrar que $|f(w)| \leqslant f(|w|)$ cuando $|w| < R$. (b) Demostrar que $|e^w - 1| \leq e^{|w|} - 1$.
5. Siendo $|w| \leq \frac{1}{2}$, demostrar que $|\operatorname{Log}(1 - w)| \leq 2|w|$ y $|\operatorname{Log}(1 - w) + w| \leq |w|^2$. (Por la serie de Taylor,

$$|\operatorname{Log}(1 - w)| = \left| -w - \frac{w^2}{2} - \frac{w^3}{3} - \cdots \right| \leq |w| \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots \right).$$

El segundo caso es parecido.)

6. Si $P(n) \not\equiv 0$ es un polinomio en n, mostrar que $P(n + 1)/P(n) \to 1$ cuando $n \to \infty$. Se concluye que una serie de potencias con coeficientes $a_n = P(n)$ tiene radio de convergencia $R = 1$.

Definición mediante series de potencias de las funciones elementales.

7. *Función exponencial.* Sea $E(z) = 1 + z + z^2/2! + z^3/3! + \cdots$, no dándose ninguna otra propiedad de $E(z)$. Demostrar que $E(z)$ es una función entera de z que verifica $E'(z) = E(z), E(0) = 1$. Demostrar que $f(z) = E(-z)E(z)$ verifica $f'(z) = 0$, y que, por tanto $f(z) = f(0) = 1$. De donde $E(-z)E(z) = 1$, por lo que $E(z)$ nunca se anula. Si a es una constante compleja arbitraria, $f_a(z) = E(-z)E(z + a)$ verifica $f_a'(z) = 0$, y de aquí, $f_a(z) = f_a(0) = E(a)$. Multiplicando por $E(z)$ se obtiene

$$E(z + a) = E(z)E(a). \qquad (*)$$

8. *Gráfica de $E(x)$.* Deducir de $E'(x) = E(x)$ que $E'(x) > 0$ para $x > 0$ por lo que $E(x)$ es estrictamente creciente. De la propiedad $E(-x)E(x) = 1$ deducir que $E(x)$ es estrictamente creciente para todo x y de aquí, $E(x) > 1$ para $x > 0$, $E(x) < 1$ para $x < 0$.
9. *Funciones seno y coseno.* Definamos $2C(z) = E(iz) + E(-iz), 2iS(z) = E(iz) - E(-iz)$. Deducir de la serie de Taylor de $E(w)$ las de $C(z)$ y $S(z)$. Aplicando la regla de la cadena, demostrar también que

$$C'(z) = -S(z), \qquad S'(z) = C(z).$$

Demostrar que la función $g(z) = [C(z)]^2 + [S(z)]^2$ verifica $g'(z) = 0$, y de aquí, $g(z) = g(0) = 1$. De donde,

$$[C(z)]^2 + [S(z)]^2 = 1. \qquad (**)$$

Deducir, también, de $E(iz) = C(z) + iS(z)$ que $|E(ix)| = 1$, $-\infty < x < \infty$.

10. *Periodos.* Un período de $E(z)$ es un número $T \neq 0$ tal que $E(z + T) = E(z)$ para todo z En virtud de (*), tomando $a = T$, mostrar que T es un periodo si y solamente si $E(T) = 1$. Si se escribe $T = \sigma + i\tau$, mostrar que $|E(T)| = |E(\sigma)||E(i\tau)| = E(\sigma)$ y deducir del Problema 8 que $\sigma = 0$. Por consiguiente, $T = i\tau$, y todo periodo ha de ser imaginario puro. En virtud de $E(i\tau) = C(\tau) + iS(\tau)$, demostrar que $T = i\tau$ es un periodo si y solamente si $\tau \neq 0$, $C(\tau) = 1$, $S(\tau) = 0$.
11. *Existencia de periodos.* Demostrar mediante la serie de Taylor que

$$C(1) > 1 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{8} \cdots = 0,$$
$$C(2) < 1 - 2 + \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{4} + (\tfrac{1}{4})^2 + (\tfrac{1}{4})^3 + \cdots = 0.$$

Por tanto, la función continua $C(x)$ tiene un cero en un punto x_0 comprendido entre 1 y 2. Deducir de (**) que $S(x_0) = \pm 1$ y de aquí,

$$E(4ix_0) = [E(ix_0)]^4 = (\pm i)^4 = 1.$$

Por tanto, si se toma $\tau = 4x_0$, $i\tau$ es un periodo. El mínimo valor de $\tau > 0$ para el cual $i\tau$ es un periodo que se denota 2π. (En realidad, $2\pi = 4x_0$). Deducir de $E(z + 2\pi i) = E(z)$ que $C(z + 2\pi) = C(z)$, $S(z + 2\pi) = S(z)$.

12. La circunferencia unidad es por definición $z = E(it)$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Utilizando el hecho de ser 2π el periodo mínimo, deducir que la circunferencia unidad es una curva cerrada simple. Demostrar también que sobre la circunferencia unidad se verifica $|z| = 1$, y mostrar que el arco de círculo desde $t = 0$ hasta θ es

$$s = \int_0^\theta |iE(it)|\,dt = \int_0^\theta dt = \theta, \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

13. Si e^z es la función estudiada en el Capítulo 2, comprobar que $h(z) = E(-z)e^z$ verifica $h'(z) = 0$, de aquí, que $h(z) = h(0) = 1$, y por tanto $e^z = E(z)$. En los problemas de la Sección 2 del Capítulo 2 se dedujeron de (*) las principales propiedades de cos z y sen z.

4. Fórmulas de Parseval, Schwarz y Poisson. El teorema siguiente permite obtener demostraciones más sencillas y enunciados más precisos de algunos resultados que se dedujeron de la fórmula integral de Cauchy en el Capítulo 3.

TEOREMA 4.1. *Sea $R > 0$, y para $|z| < R$ sea*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \qquad (4.1)$$

Entonces, para todo r, $0 \leq r < R$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \, d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}. \tag{4.2}$$

Demostración. Denotemos por $s_n(z)$ la n-ésima suma parcial de (4.1), con lo cual,

$$|s_n(re^{i\theta})|^2 = s_n(re^{i\theta})\overline{s_n(re^{i\theta})} =$$
$$= (a_0 + a_1 re^{i\theta} + \cdots + a_n r^n e^{in\theta})(\bar{a}_0 + \bar{a}_1 re^{-i\theta} + \cdots + \bar{a}_n re^{-in\theta}).$$

Si se efectúa el producto y se integra desde 0 hasta 2π, la mayor parte de los términos resultantes dan 0 como valor de la integral, pues

$$\int_0^{2\pi} e^{ij\theta} e^{-ik\theta} \, d\theta = \begin{cases} 0 & (j \neq k) \\ 2\pi & (j = k) \end{cases} \tag{4.3}$$

Los términos restantes son de la forma $a_k r^k \bar{a}_k r^k$, y dan

$$\int_0^{2\pi} |s_n(re^{i\theta})|^2 \, d\theta = 2\pi \sum_{k=0}^{n} |a_k|^2 r^{2k}. \tag{4.4}$$

Como $s_n(z) \to f(z)$ uniformemente sobre la circunferencia $|z| = r < R$, y como $f(z)$ es acotada sobre $|z| = r$, se comprueba sin dificultad que $|s_n(z)|^2 \to |f(z)|^2$ uniformemente sobre $|z| = r$. Haciendo ahora tender $n \to \infty$ en (4.4) se obtiene (4.2).

La igualdad (4.2) se llama a veces identidad de Parseval por su gran parecido con una identidad para series de Fourier que fue demostrada por Parseval en 1805. Si se verifica la acotación $|f(z)| \leq M(r)$ sobre la circunferencia $|z| = r$, el primer miembro de (4.2) está mayorado por $[M(r)]^2$ y la identidad de Parseval da

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \leq [M(r)]^2. \tag{4.5}$$

Para ilustrar como puede utilizarse la acotación (4.5), supongamos que $f(z)$ sea una función entera que verifica $|f(z)| < M$, siendo M constante. Entonces el primer miembro de (4.5) no puede contener ningún término $|a_n|r^{2n}$ con $n \geq 1$, y $f(z)$ se reduce a una constante, a_0. Este es el teorema de Liuoville. El mismo razonamiento muestra que $|a_n|r^n \leq M(r)$, siendo estricta la desigualdad excepto cuando $f(z)$ se reduce al término $a_n z^n$.

Como $a_n = f^{(n)}(0)/n!$, se tiene de esta forma la desigualdad de Cauchy

$$|f^{(n)}(0)| \leq n! \frac{M(r)}{r^n}, \qquad 0 < r < R.$$

Como tercera aplicación, si $|f(0)| = M(r)$ para algún valor de r, $0 < r < R$, entonces

$$|a_0|^2 = [M(r)]^2$$

por lo que, el primer miembro de (4.5) no puede contener otros términos que el $|a_0|^2$. Por consiguiente, $a_n = 0$ cuando $n \geq 1$, y $f(z)$ es constante. Hemos obtenido así una sencilla demostración del principio del módulo máximo.

Una técnica parecida a la utilizada para demostrar el Teorema 4.1 proporciona un resultado de gran importancia, comúnmente conocido como fórmula de Schwarz. Supongamos que $f(z)$ sea analítica en el disco $|z| < R$, con $R > 0$, y que la serie de potencias (4.1) sea uniformemente convergente para $|z| = R$. si se define $F(\zeta) = \mathrm{Re}\, f(\zeta)$ para $|\zeta| = R$, entonces

$$2F(\zeta) = f(\zeta) + \overline{f(\zeta)}$$

y de aquí,

$$2F(\zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \zeta^m + \sum_{m=0}^{\infty} \bar{a}_m \zeta^m.$$

Para determinar a_n, se multiplica por $\zeta^{-n}\zeta^{-1}$ y se integra sobre la circunferencia $|\zeta| = R$. Como la convergencia es uniforme se puede integrar término a término. Así se obtiene,

$$\int_C \frac{2F(\zeta)}{\zeta^n}\frac{d\zeta}{\zeta} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \int_C \frac{\zeta^m}{\zeta^n}\frac{d\zeta}{\zeta} + \sum_{m=0}^{\infty} \bar{a}_m \int_C \frac{\overline{\zeta^m}}{\zeta^n}\frac{d\zeta}{\zeta}$$

siendo C la circunferencia $|\zeta| = R$. Los cambios de variable $\zeta = Re^{i\theta}$ y $\overline{\zeta} = Re^{-i\theta}$ reducen las integrales a otras de la forma (4.3) hallándose que los únicos términos con integral no nula son aquéllos con $m = n$. Tras dividir por $2\pi i$ se obtiene

$$\frac{1}{\pi i}\int_C F(\zeta)\frac{1}{\zeta^n}\frac{d\zeta}{\zeta} = \begin{cases} a_0 + \bar{a}_0 & (n = 0) \\ a_n & (n \geq 1) \end{cases} \tag{4.6}$$

Sustituyendo en (4.1) estos resultados se tiene

$$f(z) = \frac{1}{\pi i}\sum_{n=0}^{\infty} \int_C F(\zeta)\left(\frac{z}{\zeta}\right)^n \frac{d\zeta}{\zeta} - \bar{a}_0, \tag{4.7}$$

donde se debe restar el término $\bar{a}_0$ porque el primer término de la serie (4.7) no es a_0 sino $a_0 + \bar{a}_0$. Cuando $|z| < R$, es claro que $|z/\zeta| < 1$ y

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^n = \frac{1}{1 - (z/\zeta)} = \frac{\zeta}{\zeta - z}.$$

Esta serie converge uniformemente cuando $|z| \leq \rho < R$ lo que permite intercambiar los órdenes de sumación e integración de (4.7). Se tiene así

$$f(z) = \frac{1}{\pi i} \int_C \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \bar{a}_0 \tag{4.8}$$

que es una de las formas de la fórmula de Schwarz. En virtud de (4.6),

$$\operatorname{Re} a_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_C F(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta}. \tag{4.9}$$

Como $-\bar{a}_0 = -\operatorname{Re} a_0 + i \operatorname{Im} a_0$, sustituyendo en (4.8) se tiene

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C F(\zeta) \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{\zeta} + i \operatorname{Im} a_0 \tag{4.10}$$

otra de las formas de la fórmula de Schwarz. La igualdad anterior determina $f(z)$ salvo una constante imaginaria sin más que conocer $F(\zeta) = \operatorname{Re} f(\zeta)$ sobre la frontera. Este resultado es más profundo que la fórmula integral de Cauchy, pues esta última exige conocer las partes real e imaginaria de $f(\zeta)$.

Poniendo $f(re^{i\theta}) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$ y $F(Re^{i\theta}) = u(\theta)$, la fórmula (4.10) adopta la forma

$$u(r,\theta) + iv(r,\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{Re^{i\phi} + re^{i\theta}}{Re^{i\phi} - re^{i\theta}} u(\phi)\, d\phi + ic$$

siendo c una constante real. Multiplicando el numerador y el denominador del integrando por $Re^{-i\phi} - re^{-i\theta}$, es sencillo ahora igualar las partes reales, obteniéndose

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \phi) + r^2} u(\phi)\, d\phi \tag{4.11}$$

fórmula que se conoce con el nombre de fórmula de Poisson para un círculo. La fórmula de Poisson se ha obtenido aquí en la hipótesis de que $f(z)$ sea analítica para $|z| < R$ y de que su serie de potencias sea uniformemente convergente sobre la circunferencia $|z| = R$. Por ejemplo, la función $f(z) = 1$ satisface estos requisitos y da

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \phi) + r^2} d\phi. \tag{4.12}$$

Ahora cambiamos nuestro punto de vista. Supongamos que $F(\zeta)$ sea una función continua cualquiera sobre $|\zeta| = R$, y que $f(z)$ venga definida por la integral (4.10).

Entonces, como en la Sección 5 del Capítulo 3, se sigue que la función $f(z)$ es analítica. (Se da otra demostración en la Sección 5 de este capítulo). Como $f(z)$ es analítica, su parte real $u(r,\theta)$ es armónica. Se verá en la Sección 5 que $u(r,\theta) \to u(\theta)$ cuando $r \to R-$, y que si $u(R,\theta) = u(\theta)$, la función resultante es continua en el disco cerrado $|z| \leq R$. Por consiguiente, la fórmula de Poisson resuelve el problema de Dirichlet para un disco. Desde luego, lo mismo ocurre para la fórmula de Schwarz. Debido a las dificultades del cálculo de integrales reales, la fórmula de Schwarz es con frecuencia de mayor utilidad, y posee además, la notable ventaja de que da no sólo u sino la función analítica $u + iv$.

TEOREMA 4.2. *Si $H(x,y)$ es armónica en un dominio D, entonces $H(x, y)$ coincide localmente con la parte real de una función analítica $f(z)$, y por consiguiente H tiene derivadas parciales continuas de todos los órdenes en todo punto de D.*

Demostración. Sea (x_0,y_0) o $z_0 = x_0 + iy_0$ un punto de D. Como z_0 es interior, hay un disco $|z - z_0| \leq R$ contenido en D. Efectuando si es preciso una traslación podemos suponer que $z_0 = 0$, o sea, que el disco es $|z| \leq R$. La función H es continua en D, y por tanto, continua sobre $|z| = R$. Por la fórmula de Poisson podemos construir una función u que sea continua para $|z| \leq R$, armónica para $|z| < R$ y que coincida con H sobre $|z| = R$. Por la unicidad[1] de la solución $H = u$ para $|z| \leq R$ y por consiguiente H coincide con la parte real de una función analítica en el disco $|z| < R$. La existencia de derivadas se deduce del Teorema 5.3 del Capítulo 3.

Ejemplo 4.1. Siendo $0 \leq r < \infty$, demostrar que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(r/2)^{2n}}{(n!)^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{r\cos\theta}\, d\theta. \tag{4.13}$$

Si se escribe $z = x + iy = re^{i\theta}$, entonces $|e^{z/2}|^2 = e^x = e^{r\cos\theta}$. El resultado pedido se obtiene sustituyendo en la identidad de Parseval la serie de Taylor de $e^{z/2}$.

La serie (4.13) es $J_0(ir)$, siendo J_0 la función de Bessel definida en el Ejemplo 3.3. En el Problema 1 se verá que la integral de (4.13) representa una función entera, y que, por el criterio del cociente, lo mismo ocurre con la serie. Como estas dos funciones enteras son iguales para $z = r \geq 0$ real, son iguales para todo valor de z. Así pues,

$$J_0(iz) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{z\cos\theta}\, d\theta, \qquad |z| < \infty.$$

Ejemplo 4.2. Sean α y β dos puntos de la circunferencia $|z| = R$, como se indica en la Figura 4-1. Hallar una función $H(x,y)$ que sea armónica para $|z| < R$, que tome el valor 1

[1] Capítulo 2, Problema 5.4.

sobre el arco $\alpha\beta$, y el valor 0 sobre el arco $\beta\alpha$. La función $H(x,y)$ se llama medida armónica del arco $\alpha\beta$ con respecto al disco $|z| < R$.

La igualdad (4.9) da

$$\operatorname{Re} a_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{F(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_\alpha^\beta \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{1}{2\pi i}\log\zeta\Big|_\alpha^\beta$$

tomándose la integral a lo largo de la circunferencia, desde α hasta β, en sentido positivo. El resultado es independiente de la rama del logaritmo que se considere. Análogamente, en virtud de (4.8),

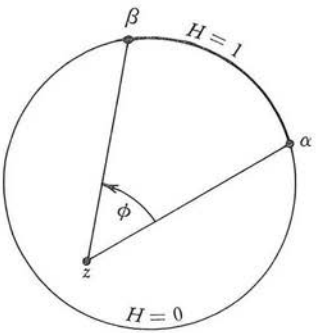


Figura 4-1

$$f(z) = \frac{1}{\pi i}\int_\alpha^\beta \frac{d\zeta}{\zeta - z} - \overline{a_0} = \frac{1}{\pi i}\log(\zeta - z)\Big|_\alpha^\beta - \overline{a_0}.$$

Sustituyendo el valor anterior de $\operatorname{Re} a_0$ y tomando partes reales se obtiene

$$H(x,y) = \frac{1}{\pi}\arg(\zeta - z)\Big|_\alpha^\beta - \frac{1}{2\pi}\arg\zeta\Big|_\alpha^\beta$$

siendo $z = x + i_y$ y denotándose por $\arg z$ la rama de la función $\arg z$ asociada a la rama elegida para la función $\log z$. Geométricamente, el resultado anterior significa que

$$H(x,y) = \frac{1}{\pi}\left(\phi - \frac{1}{2}\phi_0\right)$$

siendo ϕ el ángulo de vértice z subtendido por el arco $\alpha\beta$ y ϕ_0 el ángulo de vértice 0 subtendido por el mismo arco $\alpha\beta$. La comprobación de las condiciones de contorno puede efectuarse rápidamente por consideraciones de Geometría plana.

Problemas

1. (a) Haciendo $w = r\cos\theta$, en la serie de Taylor de e^w, mostrar que la integral del Ejemplo 4.1 verifica

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{r\cos\theta}\,d\theta = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^n}{n!}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\cos\theta)^n\,d\theta$$

y que por consiguiente representa una función entera. (b) ¿Qué fórmula integral se sigue del hecho de que hayan de coincidir la serie anterior y la del Ejemplo 4.1?

2. Haciendo $z = re^{i\theta}$ en la serie geométrica de suma $1/(1-z)$ e igualando las correspondientes partes reales, deducir que

$$\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2} = 1 + r\cos\theta + r^2\cos 2\theta + \cdots, \qquad 0 \le r < 1.$$

¿Sigue siendo válido este resultado cuando $r = w$, $|w| < 1$? sea complejo?

3. Teniendo en cuenta que $2\cos k\theta = e^{ik\theta} + e^{-ik\theta}$ deducir, para $m,n = 1, 2, 3, \ldots$, que

$$\int_0^{2\pi}\cos n\theta\cos m\theta\,d\theta = \begin{cases}\pi & (m=n)\\ 0 & (m\neq n).\end{cases}$$

De este resultado y del desarrollo en serie del Problema 2, deducir que

$$\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}\cos n\theta\,d\theta = \pi r^n, \qquad n = 1,2,3,\ldots.$$

4. Enunciar y resolver problemas análogos a los Problemas 2 y 3 con e^z en lugar de $1/(1-z)$.
5. Aplicar la identidad de Parseval a $1/(1-z)$.
6. Una cierta función $u(x, y)$ es armónica para $|z| < 1$, toma el valor de contorno 1 sobre $z = e^{i\theta}$ cuando $|\theta| < \theta_0$, siendo $\theta_0 < \pi$, y el valor de contorno 0 para $|\theta| > \theta_0$. Teniendo en cuenta (4.6) hallar el desarrollo en serie de potencias de una función analítica $f(z)$ de la cual u sea la parte real.
7. Supongamos que $f(z)$ sea analítica cuando $|z| \le R$ y que $|\mathrm{Re}\,f(z)| \le M$ cuando $|z| = R$, siendo M constante. Deducir de la fórmula de Schwarz que

$$|f(z)| \le |f(0)| + \frac{2RM}{R-r}, \qquad |z| = r < R.$$

8. Supongamos que $f(z)$ sea analítica para $|z| < R$, que $f'(z) \neq 0$, y que sea $g(z)$ una raíz cuadrada analítica de $f'(z)$. Así pues, $f'(z) = [g(z)]^2$ para $|z| < R$. Si $L(r)$ es la longitud de la imagen de la circunferencia $|z| = r < R$ por la aplicación $w = f(z)$, demostrar que

$$L(r) = 2\pi r\sum_{n=0}^{\infty}|b_n|^2 r^{2n} \quad \text{donde} \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n.$$

(Utilícese la fórmula para $L(r)$ dada en el Capítulo 3, Sección 5, Problema 6.)

9. Sea $f(z)$ una función analítica en el disco $|z| < R$, y sea $A(r)$ el área de la imagen del disco $|z| < r < R$ en la aplicación $w = f(z)$, tomándose el área de las regiones recubiertas más de una vez el número de veces correspondiente. Por el Problema 1.6 del Capítulo 5,

$$A(r) = \int_0^r \left(\int_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})|^2 \, d\theta \right) r \, dr$$

Se supondrá aquí que esta fórmula es válida. Calcular en primer lugar la integral entre paréntesis aplicando la identidad de Parseval para $f'(z)$ y tener en cuenta (2.5) para calcular la otra. Mostrar de esta forma que

$$A(r) = \pi r^2 \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2 r^{2n-2} \quad \text{donde} \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

En particular, $A(r)/(\pi r^2) \geq |f'(0)|^2$, siendo estricta la desigualdad excepto cuando $f(z)$ sea una función lineal, $a_0 + a_1 z$.

10. Aplicar los Problemas 8 y 9 con $f(z) = 1/(1 - z)$ y $f(z) = e^z$.

5. Funciones definidas por integrales. Muchas de las funciones que aparecen en Matemática pura y aplicada pueden representarse mediante integrales, así ocurre, por ejemplo, con la función gamma,

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} \, dt \tag{5.1}$$

que está definida para $\mathrm{Re}\, z > 0$; la función de Bessel,

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\theta - z \operatorname{sen} \theta) \, d\theta \tag{5.2}$$

para $|z| < \infty$; Para $\mathrm{Re}\, s > 1$, la función zeta de Riemann verifica

$$\zeta(s)\Gamma(s) = \int_0^{\infty} \frac{1}{e^u - 1} u^{s-1} \, du. \tag{5.3}$$

Entre las fórmulas que contienen una función arbitraria se encuentran la transformación de Laplace,

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) \, dt, \tag{5.4}$$

y la fórmula de Schwarz,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{F(\zeta)}{\zeta}\frac{\zeta + z}{\zeta - z}\,d\zeta, \tag{5.5}$$

en la que C es la circunferencia $|\zeta| = R$.

Todas estas integrales tienen la forma general

$$f(z) = \int_a^b F(z,t)\,dt, \tag{5.6}$$

siendo $F(z, t)$ analítica para todo z perteneciente a un dominio D y todo t del intervalo (a, b) o $[a,b]$.[1] La integral (5.5), por ejemplo, puede expresarse como una integral sobre $[0, 2\pi]$ haciendo $\zeta = Re^{it}$.

TEOREMA 5.1. *Para t perteneciente a* $[a,b]$, *sea*

$$F(z,t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(t)(z - \alpha)^j \tag{5.7}$$

donde cada $a_j(t)$ *es continua. Supongamos que* $|a_j(t)| \leq A_j$ *siendo las* A_j *constantes tales que la serie "M"*

$$\sum_{j=0}^{\infty} M_j = \sum_{j=0}^{\infty} A_j r^j$$

tenga un radio de convergencia $R > 0$. *Entonces la función* $f(z)$ *de (5.6) es analítica en el disco* $|z - \alpha| < R$. *y su desarrollo en serie de potencias es*

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty}(z - \alpha)^j \int_a^b a_j(t)\,dt. \tag{5.8}$$

Demostración. Tomemos un z fijo tal que $|z-\alpha| = r < R$. Por el criterio M de Weierstrass, la serie (5.7) converge uniformemente para t perteneciente a $[a,b]$, y puede integrarse término a término, como indica la fórmula (2.5). Resulta así (5.8). Como z puede ser cualquier número que verifique $|z - \alpha| < R$, la serie de potencias (5.8) ha de ser convergente en el disco $|z - \alpha| < R$ y se define en él, por consiguiente, una función analítica. Como se quería demostrar.

No es preciso modificar la demostración si las $a_j(t)$ son tan sólo continuas a trozos, con tal de que $F(z, t)$ sea integrable como función de t.

[1] Se usa (a, b) para denotar el intervalo abierto $a < t < b$ y $[a,b]$ para el intervalo cerrado $a \leq t \leq b$. Análogamente $[a,b)$ significa $a \leq t < b$.

Ejemplo 5.1. Si $F(\zeta)$es continua a trozos, demostrar que la fórmula de Schwarz define una función analítica en el disco $|z| < R$. Desarrollando el integrando en serie geométrica, con $|z|<|\zeta|=R$, resulta

$$F(\zeta)\frac{\zeta + z}{\zeta - z} = F(\zeta)\left(1 + 2\frac{z}{\zeta} + 2\frac{z^2}{\zeta^2} + 2\frac{z^3}{\zeta^3} + \cdots\right).$$

Como de $\zeta = Re^{it}$ resulta$d\zeta/\zeta = i\,dt$, podemos tomar como A_n cualquier número tal que $2|F(\zeta)/\zeta^n| \leq A_n$ sobre C. Evidentemente, un valor apropiado es$A_n = 2M/R^n$, siendo M una cota superior de $|F(\zeta)|$ sobre C; entonces el radio de convergencia de la serie M es igual a R. La conclusión se sigue del Teorema 5.1.

TEOREMA 5.2. *En las hipótesis del Teorema 5.1,*

$$f'(z) = \int_a^b \frac{\partial F(z,t)}{\partial z}\,dt, \qquad |z - \alpha| < R$$

Resultados análogos son válidos para todas las derivadas sucesivas.

Demostración. Como la serie (5.7) es una serie de potencias podemos derivarla término a término, con lo que se obtiene

$$\frac{\partial F}{\partial z}(z,t) = \sum_{j=0}^{\infty} ja_j(t)(z - \alpha)^{j-1}.$$

Como $|ja_j(t)| \leq jA_j$, podemos formar una nueva serie M cuyos términos sean jA_jr^{j-1}. Esta serie se deduce de la serie primitiva por derivación, y ambas tienen el mismo radio de convergencia R. Entonces, es aplicable el Teorema 5.1 a la derivada parcial $\partial F/\partial z$, y resulta

$$\int_a^b \frac{\partial F(z,t)}{\partial z}\,dt = \sum_{j=0}^{\infty} j(z - \alpha)^{j-1}\int_a^b a_j(t)\,dt.$$

En virtud de (5.8), el segundo miembro es $f'(z)$. Como es evidente, el proceso puede repetirse indefinidamente, lo que demuestra el Teorema 5.2.

También en este caso es inmediata la generalización a funciones con un número finito de discontinuidades. Sin embargo, ni el Teorema 5.1 ni en el Teorema 5.2 son directamente utilizables con integrales como las (5.1) ó (5.3), en las que el intervalo de integración es infinito. Estudiaremos ahora la extensión a estos casos.

Seas $F(z,t)$ una función continua a trozos en la semirecta $a \leq t < \infty$. Se dice que la igualdad

$$f(z) = \int_a^\infty F(z,t)\, dt$$

se verifica uniformemente en una región G, y también, que la integral verifica el criterio de convergencia uniforme de Cauchy en la región G, cuando es cierta la siguiente propiedad: Para todo $\epsilon > 0$ existe un N tal que, para todo z perteneciente a G,

$$p > N \quad \text{y} \quad q > N \quad \text{implica} \quad \left| \int_p^q F(z,t)\, dt \right| < \epsilon.$$

El valor de N depende de ϵ, pero no de z, en tanto que z se mantenga en G.

Si se satisface la condición de Cauchy, la sucesión de funciones definida por

$$f_n(z) = \int_a^n F(z,t)\, dt \tag{5.9}$$

es uniformemente de Cauchy en G, y tiene por tanto, un límite $f(z)$ cuando $n \to \infty$. En efecto, si el entero n y el número real b son ambos suficientemente grandes, el criterio de Cauchy da

$$\left| \int_a^b F(z,t)\, dt - \int_a^n F(z,t)\, dt \right| = \left| \int_b^n F(z,t)\, dt \right| < \epsilon. \tag{5.10}$$

Tomando $b = m$, entero, se ve que $|f_n(z) - f_m(z)| < \epsilon$, y por tanto, que $\{f_n(z)\}$ es una sucesión uniformemente de Cauchy.

Haciendo tender $n \to \infty$ en (5.10), n entero, se obtiene una desigualdad que muestra que al hacer tender $b \to \infty$ sin restricción se obtiene el mismo límite $f(z)$. Es decir,

$$f(z) = \int_a^\infty F(z,t)\, dt \tag{5.11}$$

siendo la integral impropia convergente en el sentido de la Sección 4 del Capítulo 4.

TEOREMA 5.3. *El Teorema 5.2 sigue siendo válido para $b = \infty$, si se dan estas dos condiciones: (1) La hipótesis es válida en $[a,b]$ para todo $b > a$ (2) la igualdad (5.11) se verifica uniformemente en todo el disco $|z - \alpha| < R$.*

Demostración. La discusión anterior muestra que podemos limitarnos a considerar valores enteros n de $b \to \infty$. Daremos la demostración en este caso. (Ver también el Problema 5.6.) Por el Teorema 5.2, la función $f_n(z)$ definida en (5.9) es analítica, y verifica

$$f_n'(z) = \int_a^n \frac{\partial F}{\partial z}(z,t)\, dt, \qquad |z - \alpha| < R$$

así como otras ecuaciones análogas para las derivadas de orden superior. Como la sucesión $\{f_n(z)\}$converge uniformemente, el Teorema 1.3 muestra que la función límite $f(z)$ de la fórmula (5.11) verifica

$$f'(z) = \lim_{n\to\infty} f_n'(z), \qquad f''(z) = \lim_{n\to\infty} f_n''(z), \tag{5.12}$$

y así sucesivamente. La primera de estas ecuaciones da

$$\frac{d}{dz}\int_a^\infty F(z,t)\, dt = \int_a^\infty \frac{\partial F}{\partial z}(z,t)\, dt$$

y las restantes dan resultados análogos para las derivadas sucesivas, lo que completa la demostración.

Es preciso señalar que en la demostración del Teorema 5.3 se pueden utilizar como valores de b otras sucesiones $\{A_j\}$ en lugar de la sucesión de números naturales, por lo que el teorema implica que el desarrollo en serie del Teorema 5.1 sigue siendo válido cuando $b = \infty$.

Para utilizar el Teorema 5.3 conviene disponer de un criterio de convergencia uniforme. Supongamos que $F(z, t)$ sea continua a trozos en el intervalo $a \leq t \leq b$ para todo $b > a$ y supongamos que

$$|F(z,t)| \leq M(t) \quad \text{donde} \quad \int_a^\infty M(t)\, dt < \infty.$$

Entonces demostraremos que la integral (5.11) verifica el criterio de convergencia uniforme de Cauchy. El criterio que acabamos de enunciar es análogo al criterio M de Weierstrass. Para demostrarlo, basta observar que si $q > p$entonces

$$\left|\int_p^q F(z,t)\, dt\right| \leq \int_p^q |F(z,t)|\, dt \leq \int_p^q M(t)\, dt \leq \int_p^\infty M(t)\, dt.$$

Tomando p suficientemente grande el segundo miembro es $< \epsilon$, como se quería demostrar.

Ejemplo 5.2. Supongamos que $f(t)$ sea continua a trozos en el intervalo $0 \leq t \leq b$, para todo $b > 0$ y que $|f(t)| \leq Me^{ct}$ para unas ciertas constantes M y c. Demostrar que la transformación de Laplace (5.4) define una función analítica en el semiplano $\operatorname{Re} s > c$ y que sus derivadas vienen dadas por

$$F^{(n)}(s) = \int_0^\infty (-t)^n e^{-st} f(t)\, dt, \qquad \operatorname{Re} s > c.$$

Obsérvese que hemos invertido aquí los papeles de las letras f y F.

Si el límite superior ∞ se sustituye por un número $b > 0$, cualquiera, la función resultante $F_b(s)$ es entera y verifica las hipótesis del Teorema 5.1 en el disco $|s| < R$ para todo R. (Este aserto ya se demostró en el Ejemplo 3.1.) Tomemos $\operatorname{Re} s \geq c + \delta$, siendo $\delta > 0$ constante. Entonces

$$|e^{-st} f(t)| \leq e^{-(c+\delta)t} Me^{ct} = Me^{-\delta t}.$$

Finalmente, haciendo $M(t) = Me^{-\delta t}$ en el criterio M de Weierstrass se ve que la convergencia es uniforme, y la conclusión se sigue del Teorema 5.3.

TEOREMA 5.4. *Supongamos que $F(z,t)$ sea una función continua de (z, t) cuando z pertenece al dominio D y t al intervalo $[a,b]$. Supongamos que para todo t perteneciente a $[a,b]$ fijo, la función de z correspondiente, $F(z,t)$, sea analítica en D. Entonces la función $f(z)$ definida por la primera de las dos fórmulas es analítica en D, y su derivada es la dada por la segunda fórmula:*

$$f(z) = \int_a^b F(z,t)\, dt, \qquad f'(z) = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial z}(z,t)\, dt.$$

Se verá también que las derivadas sucesivas se obtienen por derivación bajo el signo integral.

La hipótesis de que $F(z, t)$ es continua, significa lo siguiente: Dados cualquier punto t_0 de $[a,b]$, cualquier punto z_0 de D, y cualquier $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$|t - t_0| + |z - z_0| < \delta \quad \text{implica} \quad |F(z,t) - F(z_0,t_0)| < \epsilon$$

siempre que t pertenezca a $[a,b]$ y z a D. El valor de δ dependerá en general de z_0 y de t_0, así como de ϵ. Sin embargo, si $|z - \alpha| \leq R$ es un disco cerrado contenido en D se sabe

del Análisis de variable real que $F(z, t)$ es acotada y uniformemente continua cuando z pertenece a este disco y t a $[a,b]$. Este resultado se utilizará aquí.

Demostración. Sea α un punto de D y sea C una circunferencia $|z - \alpha| = R$ lo suficientemente pequeña como para que C y su interior estén contenidos en D. Entonces, para $|z - \alpha| < R$, la serie de Taylor de $F(z,t)$ es (5.7), con

$$a_j(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{F(\zeta,t)}{(\zeta - \alpha)^j} \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Como es obvio, $|a_j(t)| \leq M/R^j$, siendo M una cota superior de $|F(\zeta,t)|$ cuando ζ pertenece a C y t a $[a,b]$. Para demostrar que $a_j(t)$ es continua, sean t_0 y t en $[a,b]$, y sea $\epsilon > 0$. Por la continuidad uniforme existe un $\delta > 0$, independiente de ζ tal que

$$|t - t_0| < \delta \quad \text{implica} \quad |F(\zeta,t) - F(\zeta,t_0)| < \epsilon$$

para todo ζ perteneciente a C. Como sobre C se verifica $|\zeta - \alpha| = R$, es

$$|a_j(t) - a_j(t_0)| \leq \epsilon R^{-j}$$

lo que muestra que $a_j(t)$ es continua. Así pues, los Teoremas 5.1 y 5.2 son aplicables, y dan la condición pedida en el disco $|z - \alpha| < R$. Como α es un punto arbitrario de D, la demostración está completa.

TEOREMA 5.5. *El Teorema 5.4 continúa siendo válido para $b = \infty$ cuando: la hipótesis es válida en $[a,b]$ para todo $b > a$, y (5.11) se cumple uniformemente en D.*

Este resultado se deduce del Teorema 5.4 exactamente de la misma forma que el Teorema 5.3 se sigue del Teorema 5.2.

Ejemplo 5.3. Demostrar que la función de Bessel $J_n(z)$ es entera, y que su derivada puede calcularse derivando bajo el signo integral.

Con la notación $\theta = t$, el integrando de (5.2) es

$$\cos(nt - z \operatorname{sen} t). \tag{5.13}$$

Esta función es entera como función de z, y continua como función de (z, t). Las dos conclusiones pedidas se siguen del Teorema 5.4.

La continuidad de (5.13) puede deducirse del hecho de que (5.13) tiene derivadas parciales acotadas con respecto a z y a t. Sin embargo, es más sencillo tener en cuenta que

$-z$, sen t, nt, y $\cos \zeta$ son continuas, y utilizar los resultados familiares acerca de la continuidad de sumas, productos y funciones compuestas, que se demuestran para (z,t) exactamente del mismo modo que para las funciones reales de una variable real t.

Problemas

1. (a) Haciendo $\zeta = Re^{it}$, la fórmula de Schwarz puede escribirse

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(Re^{it}) \frac{Re^{it} + z}{Re^{it} - z}\, dt.$$

   Si $F(\zeta)$ es continua para $|\zeta| = R$, deducir del Teorema 5.4 que $f(z)$ es analítica en el disco $|z| < R$. (b) Extender este resultado para funciones continuas a trozos, escribiendo la integral como una suma de integrales sobre intervalos $a_k < t < b_k$, en cada uno de los cuales $F(Re^{it})$ es continua.
2. Demostrar que las funciones siguientes son enteras, y hallar $f'(z)$:

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \cos zt\, dt, \qquad f(z) = \int_1^{\infty} \frac{t^z}{\cosh t}\, dt.$$

3. (a). Demostrar que la integral (5.1) representa una función analítica al menos en el semiplano $\operatorname{Re} z > 1$. (b) Integrando por partes,

$$\int_0^b e^{-t} t^x\, dt = -e^{-t} t^x \Big|_0^b + \int_0^b e^{-t} x t^{x-1}\, dt$$

   cuando $x > 1$. Haciendo tender $b \to \infty$, demostrar $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$. (c) Demostrar que $\Gamma(1) = 1$, y deducir sucesivamente que $\Gamma(2) = 1$, $\Gamma(3) = 2 \cdot 1, \ldots, \Gamma(n + 1) = n!$
4. Demostrar que $\Gamma(z)$, definida en (5.1) difiere tan sólo en una función entera de la integral considerada en el Ejemplo 3.2. Por consiguiente, $\Gamma(z)$ puede prolongarse a una función meromorfa cuyos únicos polos son los puntos $0, -1, -2, \ldots$ La función así obtenida sigue denotándose $\Gamma(z)$. Demostrar que $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$ en todo punto en el que los dos miembros de la igualdad son analíticos. (Por el Problma 3, la función $f(z) = \Gamma(z + 1) - z\Gamma(z)$ se anula para $z = x > 1$. Por consiguiente, se anula en todo su dominio de analiticidad.)
5. *Otra forma del criterio M.* Supongamos que $F(z,t)$ sea continua a trozos en el intervalo $\epsilon \leq t \leq 1$ cuando z varía en un dominio D, para todo $\epsilon > 0$ arbitrariamente pequeño. Supongamos que

$$|F(z,t)| \leq M(t) \quad \text{donde} \quad \int_0^1 M(t)\, dt < \infty.$$

   Demostrar que la sucesión de funciones definida por

$$f_n(z) = \int_{1/n}^{1} F(z,t)\,dt, \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

es uniformemente de Cauchy en el dominio D y que, por consiguiente, tiene límite $f(z)$. Se concluye que

$$f(z) = \int_0^1 F(z,t)\,dt$$

es analítica en D cuando todas las $f_n(z)$ son analíticas en D.

6. Demostrar, utilizando el Problema 5, que las funciones

$$\int_0^1 t^{z-1}e^{-t}\,dt, \quad \int_0^1 t^z \operatorname{sen} t\,dt, \quad \int_0^1 t^z(1-t)^{1-z}\,dt.$$

son analíticas en $Re\ z > 0, Re\ z > -2$ y $-1 < Re\ z < 2$, respectivamente.

La integral de Poisson.

7. Sean $u(\phi)$ y $|u(\phi)|$ ambas integrables en $0 \leq \phi \leq 2\pi$, supongamos que $u(0) = u(2\pi)$, y sea $\phi = \theta_0$ un punto de continuidad de $(\phi)n$. Definiendo $u(r,\theta)$ mediante la integral de Poisson cuando $r < R$ y mediante $u(R,\theta) = u(\theta)$ cuando $r = R$, deducir de (4.12) que

$$u(r,\theta) - u(R,\theta_0) = \int_0^{2\pi} K(r,\theta - \phi)[u(\phi) - u(\theta_0)]\,d\phi$$

para $r < R$, siendo

$$K(r,\theta - \phi) = \frac{1}{2\pi}\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \phi) + r^2}.$$

8. Sea $\theta_0 \neq 0$, $\theta_0 \neq 2\pi$. (Si $\theta_0 = 0$ o 2π, el intervalo de integración $[0,2\pi]$ puede sustituirse por $[-\pi,\pi]$, pues el integrando es periódico, por lo que el análisis que se da a continuación es virtualmente el mismo.) Dado $\epsilon > 0$, se elige $\delta_0 > 0$ lo suficientemente pequeño para que

$$|u(\phi) - u(\theta_0)| < \epsilon/2$$

cuando $|\phi - \theta_0| < 2\delta_0$. Demostrar entonces, para $r < R$, que

$$\left|\int_{\theta-2\delta_0}^{\theta_0+2\delta_0} K(r,\theta - \phi)[u(\phi) - u(\theta_0)]\,d\phi\right| \leq \frac{\epsilon}{2}\int_0^{2\pi} K(r,\theta - \phi)\,d\phi = \frac{\epsilon}{2}.$$

9. Siendo $|\phi - \theta_0| \geq 2\delta_0$ y $|\theta - \theta_0| \leq \delta_0$, demostrar que $|\theta - \phi| \geq \delta_0$ y de aquí,

$$\left| \int_{|\phi-\theta_0|\geq 2\delta_0} K(r,\theta-\phi)[u(\phi)-u(\theta_0)]\,d\phi \right| \leq K(r,\delta_0)\int_0^{2\pi} |u(\phi)-u(\theta_0)|\,d\phi.$$

10. Demostrar que $K(r,\delta_0)\to 0$ cuando $r\to R-$, y por tanto, existe un $\delta_1>0$ tal que el resultado del Problema 9 es menor o igual que $\epsilon/2$ cuando $|r-R|<\delta_1$. Para $r<R$ y

$$|\theta-\theta_0|+|r-R|<\delta=\min(\delta_0,\delta_1),$$

se concluye que $|u(r,\theta)-u(R,\theta_0)|\leq \epsilon/2+\epsilon/2=\epsilon$. Por la elección de δ_0 efectuada en el Problema 8, este resultado también es válido para $r=R$ y por consiguiente, $u(r,\theta)$ es continua en (R,θ_0).

6. Series asintóticas. La integral

$$\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt$$

aparece con tanta frecuencia que se ha tabulado su valor como función de x. Haciendo $t=x+u$, adopta la forma

$$e^{-x}\int_0^\infty \frac{e^{-u}}{u+x}\,du.$$

Esta última integral se estudiará ahora para valores complejos de x. Definamos la función

$$F(z)=\int_0^\infty \frac{e^{-u}}{u+z}\,du \tag{6.1}$$

en el plano cortado $|\arg z|<\pi$. Por los Teoremas 5.3 ó 5.5, $F(z)$ es una función analítica en este dominio. Se puede obtener un desarrollo en serie asociado a $F(z)$ teniendo en cuenta

$$\frac{1}{1+w}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k w^k, \qquad \int_0^\infty e^{-u}u^k\,du=k!$$

La primera igualdad es la fórmula de la suma de una serie geométrica, y es válida cuando $|w|<1$. La segunda establece que $\Gamma(k+1)=k!$, y fue demostrada para $k=0,1,2,\ldots$ en el Problema 3 de la Sección 5.

Cometamos ahora una sucesión de errores:

$$F(z) = \int_0^\infty e^{-u} \frac{1}{z} \frac{1}{1 + (u/z)}\, du = \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{z} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{u}{z}\right)^k du$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{z^{k+1}} \int_0^\infty e^{-u} u^k\, du = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k k!}{z^{k+1}}. \tag{6.2}$$

Dado que la serie diverge para todo z (por el criterio del cociente) la fórmula anterior es falsa. Sin embargo, de ninguna manera es cierto que carezca de utilidad ni de significado. La serie así obtenida es la representación asintótica de $F(z)$.

Para definir el concepto de serie asintótica es muy conveniente utilizar una notación introducida por Landau en relación con la Teoría analítica de números. El símbolo $O(z^n)$, se lee "Términos del orden de z^n," y representa cualquier función que verifique

$$|O(z^n)| \leq M|z|^n \qquad \text{cuando } |z| \to \infty$$

en una región G especificada, siendo M una constante. Así por ejemplo,

$$(z^2 + z^3)^{-4} = O(z^{-12}), \qquad e^z = O(1)$$

para $|z| < \infty$ y $\mathrm{Re}\, z < 0$, respectivamente.

DEFINICION 6.1. *Sea G una región no acotada (por lo general, un sector) del plano z. Supongamos que $h(z)$ sea analítica en la parte finita de G. Una serie formal $\Sigma a_j/z^j$, no necesariamente convergente, es la serie asintótica de h en G si para todo $n \geq 0$ se verifica*

$$h(z) - \sum_{j=0}^{n} \frac{a_j}{z^j} = O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right) \tag{6.3}$$

cuando $|z| \to \infty$ restringido a G. En este caso se escribe

$$h(z) \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^{-j} \quad \text{en } G.$$

A veces, en las aplicaciones conviene tener una serie de potencias de $(z^\lambda)^{-j}$ en lugar de z^{-j}, siendo λ una constante positiva $z^\lambda = \exp(\lambda \operatorname{Log} z)$. El término de error es entonces $O[(z^\lambda)^{-n-1}]$. Este desarrollo se llama también desarrollo asintótico.

Es imposible que dos series distintas representan asintóticamente la misma función h en la región G. En efecto, se deduce de (6.3) que cuando $|z| \to \infty$ en G,

$$h(z) \to a_0, \quad z[h(z) - a_0] \to a_1, \quad z^2[h(z) - a_0 - a_1 z] \to a_2,$$

y así sucesivamente. Sin embargo, funciones distintas sí pueden tener el mismo desarrollo asintótico en una región. Por ejemplo, en el sector $|\arg z| \leq c$, con $c < \pi/2$, la serie asintótica de la función e^{-z} tiene todos sus coeficientes $a_j = 0$. Este hecho es consecuencia de que para $|\arg z| \leq c, |z| = r$, y cualquier n dado,

$$|e^{-z}| \leq e^{-r\cos c} < |z|^{-n} \tag{6.4}$$

cuando $|z|$ es suficientemente grande. Así pues, las funciones e^{-z} y 0 tienen ambas la misma serie asintótica en este sector.

Para demostrar que la serie divergente (6.2) representa asintóticamente a (6.1) en el sector $|\arg z| \leq \pi - \delta, \delta > 0$, observemos que integrando por partes,

$$\begin{aligned} F(z) &= -\frac{e^{-u}}{u+z}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{(u+z)^2}\,du \\ &= \frac{1}{z} + \frac{e^{-u}}{(u+z)^2}\Big|_0^\infty + 2!\int_0^\infty \frac{e^{-u}}{(u+z)^3}\,du \\ &= \frac{1}{z} - \frac{1!}{z^2} + \frac{2!}{z^3} - 3!\int_0^\infty \frac{e^{-u}}{(u+z)^4}\,du. \end{aligned}$$

En general,

$$F(z) = \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j j!}{z^{j+1}} + R_{n+1}$$

siendo

$$R_{n+1} = (-1)^{n+1}(n+1)!\int_0^\infty \frac{e^{-u}}{(u+z)^{n+2}}\,du.$$

Si $z = re^{i\theta}$ con $r > 0, \delta > 0$, y $\pi/2 \leq |\theta| \leq \pi - \delta$, entonces

$$|u + z| \geq |\mathrm{Im}(u+z)| = |\mathrm{Im}\, z| \geq r|\mathrm{sen}\,\delta|.$$

Cuando $|\theta| \leq \pi/2, \mathrm{Re}\, z \geq 0$, y por tanto $|u+z| \geq |z| = r$. Así pues, la acotación anterior sigue siendo válida cuando sen δ se sustituye por 1. En cualquier caso,

$$|R_{n+1}| \leq (n+1)!\int_0^\infty \frac{e^{-u}}{(r\,\mathrm{sen}\,\delta)^{n+2}}\,du = \frac{(n+1)!}{(r\,\mathrm{sen}\,\delta)^{n+2}}. \tag{6.5}$$

lo que muestra que para $|\arg z| \leq \pi - \delta$,

$$F(z) - \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j j!}{z^{j+1}} = O\left(\frac{1}{z^{n+2}}\right).$$

Por consiguiente, la función $F(z)$ está representada asintóticamente por la serie divergente (6.2) en el sector $|\arg z| \leq \pi - \delta$.

Una serie asintótica puede resultar de enorme utilidad para valores grandes de $|z|$ a pesar de que la serie sea divergente. Por otra parte, dado un valor de $|z|$ carece de sentido considerar más términos de la serie a partir del momento en que el valor absoluto de sus términos comienza a aumentar. Por ejemplo, para calcular $F(6)$ podríamos tomar

$$\frac{1}{6} - \frac{1!}{6^2} + \frac{2!}{6^3} - \frac{3!}{6^4} + \frac{4!}{6^5} - \frac{5!}{6^6}.$$

En este caso el primer término despreciado tiene el mismo valor absoluto que el último considerado. A partir de ahí, el numerador de cada término crece más rápidamente que el denominador, y la serie comienza a ser divergente. En el caso de $F(6)$, el error con $6!/6^7$, en (6.5) es a lo sumo $\delta = \pi/2$que en este ejemplo resulta ser el valor del último término considerado.

En vista de la condición (6.3) es fácil demostrar que si $h_1(z)$ y $h_2(z)$ admiten desarrollo asintóticos en G también los admiten su suma y su producto. El desarrollo de la suma se obtiene sin más que sumar término a término los coeficientes de las dos series. El desarrollo del producto se obtiene multiplicando las dos series y agrupando los términos resultantes según las potencias decrecientes de z.

En un sector G, $\alpha < \arg z < \beta$, la integral y la derivada de $h(z)$ admiten series asintóticas. Con respecto a la integral, (6.3) da

$$\int_z^\infty \left[h(\zeta) - a_0 - \frac{a_1}{\zeta}\right] d\zeta = \sum_{j=2}^{n} \frac{a_j}{(j-1)z^{j-1}} + O\left(\frac{1}{z^n}\right). \tag{6.6}$$

La derivada exige un tratamiento algo más profundo. Demostraremos que una serie sintótica puede derivarse término a término, en el sentido que se enuncia con precisión en el siguiente teorema:

TEOREMA 6.1. *Sea* $0 < \beta - \alpha \leq 2\pi$. *Si* $h(z)$ *es analítica y admite la serie asintótica*

$$h(z) \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^{-j} \qquad \text{en} \alpha < \arg z < \beta,$$

entonces, para todo $\delta > 0$ *suficientemente pequeño,*

$$h'(z) \sim \sum_{j=0}^{\infty} -ja_j z^{-j-1} \text{ en } \alpha + \delta < \arg z < \beta - \delta.$$

Demostración. Tomando $|z|$ suficientemente grande, y siendo C la circunferencia de radio 1 y centro en $\zeta = z$, del plano ζ, entonces,

$$h'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{h(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta.$$

En virtud de (6.3),

$$h'(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\zeta^{-j}}{(\zeta - z)^2} d\zeta + O(z^{-(n+1)}).$$

La fórmula de Cauchy para la derivada de la función analítica z^{-j} da

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\zeta^{-j}}{(\zeta - z)^2} d\zeta = -jz^{-j-1},$$

de donde se deduce que

$$h'(z) = -\sum_{j=1}^{n} a_j j z^{-j-1} + O(z^{-(n+1)}) = -\sum_{j=1}^{n-1} a_j j z^{-j-1} + O(z^{-(n+1)}),$$

lo que demuestra el teorema.

Podemos considerar ahora la función $F(z)$ que se definió en (6.1) bajo otro punto de vista. Sea $x > 0$. Entonces

$$F(x) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{t + x} dt.$$

Hagamos el cambio de variable t por u donde $t = ux$. Entonces

$$F(x) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-ux}}{u + 1} du, \qquad F(z) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-uz}}{u + 1} du \tag{6.7}$$

La segunda expresión se ha obtenido de la primera por prolongación analítica al semiplano $\operatorname{Re} z > 0$. De esta forma $F(z)$ resulta ser la transformada de Laplace de $1/(u + 1)$.

Un teorema debido a Watson muestra que en condiciones muy generales las transformadas de Laplace admiten desarrollos asintóticos. Este teorema, que es válido en particular para (6.7), es el siguiente:

TEOREMA 6.2. *(Lema de Watson.) Sean* λ, δ, a, B y M *constantes positivas. Supongamos que la serie*

$$g(u) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k u^{k\lambda-1}$$

converja para $0 < u < a + \delta$ *hacia una función continua a trozos,* $g(u)$, *en la semirrecta* $u > 0$. *Supongamos también que*

$$|g(u)| \leq Me^{Bu}, \qquad u \geq a. \quad (6.8)$$

Entonces, la transformada de Laplace de g verifica

$$\int_0^{\infty} e^{-zu} g(u)\, du \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k \Gamma(k\lambda) z^{-k\lambda}$$

para todo z tal que $|z|$ *sea suficientemente grande y* $|\arg z| \leq \frac{1}{2}\pi - \delta$.

En el curso de la demostración se verá que la serie obtenida por el procedimiento (no válido) de integrar término a término la serie de g coincide con el desarrollo que se da en el teorema.

Demostración. Sea $n \geq 2$ un entero, que permanecerá fijo durante todo el razonamiento. Después de $n - 1$ términos, el resto de la serie de $g(u)$ es

$$r_n(u) = g(u) - \sum_{k=1}^{n-1} a_k u^{k\lambda-1}. \quad (6.9)$$

Queremos demostrar que existe una constante c tal que, poniendo $b = B + 1$

$$|r_n(u)| \leq cu^{n\lambda-1}e^{bu}, \qquad 0 < u < \infty. \quad (6.10)$$

Si se verifica $u \geq 1$ y $u \geq a$, entonces, por (6.8) y (6.9)

$$|r_n(u)| \leq Me^{Bu} + \sum_{k=1}^{n-1} |a_k| u^{K\lambda-1}.$$

Cada uno de los términos del segundo miembro puede acotarse en la forma (6.10) cuando $u \geq 1$ y por consiguiente, la misma propiedad tiene la suma. Así pues, se puede tomar un $c = c_1$ tal que se verifique (6.10) cuando $u \geq \max(1, a)$.

Si $u \leq a$, la serie infinita de $g(u)$ da

$$|r_n(u)| = \left| \sum_{k=n}^{\infty} a_k u^{k\lambda - 1} \right| = u^{n\lambda - 1} \left| \sum_{k=n}^{\infty} a_k u^{(k-n)\lambda} \right|.$$

La serie del segundo miembro es una serie de potencias de u^λ que converge para $u < a + \delta$, por consiguiente, esta serie está acotada para $u \leqslant a$. Podemos entonces tomar un $c = c_2$ tal que (6.10) se verifique cuando $u \leqslant a$.

En el caso de que $a < 1$, observemos que en virtud de (6.9), $|r_n(u)|$ está acotado para $a \leq u \leq 1$, y por lo tanto, podemos tomar un $c = c_3$ tal que (6.10) se verifique cuando $a \leq u \leq 1$. La constante c que aparece en la acotación (6.10) es, sencillamente, la mayor de las tres constantes c_1, c_2, c_3

En virtud de (6.8) la transformada de Laplace de g existe para $\operatorname{Re} z > b$. Teniendo en cuenta (6.9) y (6.10) se obtiene

$$\left| \int_0^\infty e^{-zu} g(u)\, du - \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^\infty a_k e^{-zu} u^{k\lambda - 1}\, du \right| \leq c \int_0^\infty u^{n\lambda - 1} e^{bu} e^{-xu}\, du.$$

Haciendo los cambios de variable $t = ux$ y $t = u(x - b)$, respectivamente,

$$\int_0^\infty e^{-xu} u^{k\lambda - 1}\, du = \Gamma(k\lambda) x^{-k\lambda}, \quad \int_0^\infty e^{(b-x)u} u^{n\lambda - 1}\, du = \frac{\Gamma(n\lambda)}{(x - b)^{n\lambda}}.$$

La primera de estas igualdades sigue siendo válida al sustituir x por z, para $\operatorname{Re} z > 0$, pues sus dos miembros son funciones analíticas. Sustituyendo en la desigualdad precedente este resultado se tiene

$$\left| \int_0^\infty e^{-zu} g(u)\, du - \sum_{k=1}^{n-1} a_k \Gamma(k\lambda) z^{-k\lambda} \right| \leq c \frac{\Gamma(n\lambda)}{(x - b)^{n\lambda}} \tag{6.11}$$

para $\operatorname{Re} z = x > b$. Como $|\arg z| < \pi/2 - \delta$, se sigue $x > |z| \operatorname{sen} \delta$. Por lo tanto, el segundo miembro de (6.11) es $O(|z|^{-n\lambda})$ cuando $|z| \to \infty$ lo que demuestra el Teorema 6.2.

Ejemplo 6.1. Fórmula de Stirling. Se obtendrá en el Problema 13 de la Sección 8 la ecuación

$$\frac{d}{dz}\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \int_0^\infty e^{-uz}\frac{u}{1-e^{-u}}\,du$$

que supondremos válida. Si $|u|$ es suficientemente pequeño,

$$\frac{u}{1-e^{-u}} = 1 + \frac{u}{2} + \frac{u^2}{12} + \cdots$$

y por lo tanto el Lema de Watson da

$$\frac{d}{dz}\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} \sim \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{6z^3} + \cdots, \qquad |\arg z| < \frac{\pi}{2} - \delta.$$

En virtud de (6.6) está justificada la integración término a término. Se obtiene

$$\int_z^\infty \left(\frac{d}{dz}\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} - \frac{1}{z}\right)dz \sim \frac{1}{2z} + \frac{1}{12z^2} + \cdots.$$

Como la derivada de $\Gamma'(z)/\Gamma(z) - \operatorname{Log} z$ coincide con la derivada del primer miembro de la expresión anterior cambiado de signo,

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} - \operatorname{Log} z + \alpha \sim -\frac{1}{2z} - \frac{1}{12z^2} - \cdots$$

siendo α una cierta constante. Repitiendo todo el proceso anterior,

$$\operatorname{Log}\Gamma(z) - (z\operatorname{Log} z - z) + \alpha z + \frac{1}{2}\operatorname{Log} z + \beta \sim \frac{1}{12z} + \cdots$$

siendo β una cierta constante. Cuando $|z|\to\infty$ el límite del segundo miembro es igual a 0, por consiguiente la exponencial del primer miembro tiene límite 1. Se tiene así

$$\lim_{|z|\to\infty} \Gamma(z) z^{-z} e^{z} z^{1/2} e^{\alpha z + \beta} = 1 \tag{6.12}$$

expresión en la que se han tomado para las funciones multiformes las ramas definidas por

$$z^{-z} = e^{-z\operatorname{Log} z}, \qquad z^{1/2} = e^{(1/2)\operatorname{Log} z}.$$

Se verá en los Problemas 7 y 8 que $\alpha = 0$ y $e^{-\beta} = (2\pi)^{1/2}$. Se sigue de aquí la llamada fórmula de Stirling,

$$\lim_{|z|\to\infty} \Gamma(z) z^{-z} e^{z} z^{1/2} = (2\pi)^{1/2} \tag{6.13}$$

Aunque aquí la fórmula se ha deducido tan sólo para $|\arg z| < \pi/2 - \delta$, se puede extender al sector $|\arg z| < \pi - \delta$ por el método de los Problemas 10-13.

Problemas

1. Hallar el mínimo valor de n para el cual las siguientes funciones son $O(z^n)$ cuando $z \to \infty$. (a) en todo el plano, (b) en el semiplano $\operatorname{Re} z > 0$, y (c) en el sector $|\arg z| < \pi/4$:

$$3z, \quad \frac{5z^2}{1+z^4}, \quad z^2 e^{-z}, \quad \frac{\operatorname{sen} z}{1+z^4}, \quad e^{z^2}.$$

2. Demostrar, integrando por partes, que la función $F(z)$ definida en (6.7) verifica

$$F(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z}\int_0^\infty \frac{e^{-uz}}{(1+u)^2}\,du = \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{2}{z^2}\int_0^\infty \frac{e^{-uz}}{(1+u)^3}\,du$$

en el semiplano $\operatorname{Re} z > 0$. Siendo $|\arg z| < \theta_0 < \pi/2$, teniendo en cuenta $(1+u)^3 \geq 1$ se demuestra que la integral del segundo miembro es, en valor absoluto, menor o igual que $|x\Gamma^{-1} = |z\Gamma^{-1} \sec\theta_0$. Por consiguiente, en el sector $|\arg z| < \theta_0$ se verifica $F(z) - z^{-1} + z^{-2} = O(z^{-3})$.

3. Continuar integrando por partes en el Problema 2 y obtener un desarrollo asintótico en el sector $|\arg z| < \theta_0$.
4. Aplicando que $\Gamma(k+1) = k!$, y usando una serie geométrica, comprobar que la serie asintótica del Problema 3 concuerda con el Lema de Watson.
5. Demostrar que si $\delta > 0$ y $|\arg z| \leq \pi - \delta$,

$$\int_0^\infty \frac{\cos t}{t+z}\,dt \sim \frac{1!}{z^2} - \frac{3!}{z^4} + \frac{5!}{z^6} - \cdots, \quad \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} t}{t+z}\,dt \sim \frac{0!}{z} - \frac{2!}{z^3} + \cdots.$$

6. A partir de qué valor del índice n comienza a crecer el valor absoluto de los términos de las series anteriores?
7. Como se vio en el Problema 3 de la Sección 5, 3, $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ para todo entero positivo n. Escribiendo la fórmula (6.12) para $z = n$ y para $z = n+1$, mostrar que dividiendo las dos igualdades resultantes se obtiene

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1/2} = e^{1+\alpha}.$$

Como $(1 + 1/n)^n \to e$, se deduce que $\alpha = 0$.

8. Haciendo $\alpha = 0$ y $e^{-\beta} = c$ en (6.12), mostrar que (6.12) da

$$c^2 = \lim_{n\to\infty} [\Gamma(n)]^2 n^{-2n} e^{2n} n, \quad c = \lim_{n\to\infty} \Gamma(2n)(2n)^{-2n} e^{2n} (2n)^{1/2}.$$

Como $\Gamma(n) = (n-1)!$, dividiendo estas dos igualdades se obtiene

$$c = \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n-2)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)} 4\left(\frac{n}{2}\right)^{1/2}.$$

En virtud de una conocida fórmula de Wallis,[1]

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{4}{3}\frac{4}{5}\frac{6}{5}\frac{6}{7}\cdots = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{4}{3}\cdots\frac{2n-2}{2n-1}\frac{2n}{2n-1}$$

viniendo definida la segunda de las expresiones anteriores por la tercera de ellas. Deducir de ella que $c^2 = 2\pi$.

9. Siendo $F(z) = a/z + O(1/z^2)$, a constante, demostrar que

$$\exp F(z) = 1 + \frac{a}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right).$$

Por consiguiente se puede mejorar el resultado del Ejemplo 6.1, que adopta la forma

$$\Gamma(z) z^{-z} e^{z} z^{1/2} = \sqrt{2\pi}\left[1 + \frac{1}{12z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right].$$

Utilizar esta fórmula con $z = 2$, despreciando el término de error, O.

* Extensión del dominio de un desarrollo asintótico

10. La integral (6.7) solamente es válida para $x > 0$, mientras que, por otra parte, se ha visto ya que $F(z)$ es analítica para $|\arg z| < \pi$. Utilizando la integración a lo largo de un contorno, mostrar que si β es real y $|\beta| < \pi/2$, entonces, para $x > 0$,

$$F(x) = \int_0^\infty \frac{\exp(-\rho x e^{-i\beta})}{\rho e^{-i\beta} + 1} e^{-i\beta}\, d\rho.$$

[1] Se demuestra en el Problema 10 de la Sección 7. También es posible utilizar la fórmula de duplicación (Sección 8, Problema 14) y utilizar después el Problema 8, si se desea, para calcular el producto de Wallis.

Demostrar que sustituyendo x por z la integral resultante representa una función analítica para $|\arg z - \beta| < \pi/2$, dando por consiguiente una prolongación analítica de $F(x)$ a la región $|\arg z - \beta| < \pi/2$.

11. Mediante el Lema de Watson, mostrar que la función

$$F_1(\zeta) = \int_0^\infty \frac{e^{-\rho\zeta}}{\rho + e^{i\beta}}\, d\rho$$

admite un desarrollo asintótico en el sector $|\arg \zeta| < \pi/2 - \delta$, $\delta > 0$. Sea $z = \zeta e^{i\beta}$, con $|\beta|$ real y $|\beta| < \pi/2 - \delta$. Demostrar que la función $F(z)$ del Problema 10 tiene un desarrollo asintótico en el sector $|\arg z - \beta| \leq \pi/2 - \delta$, puesto que este sector se solapa con el $|\arg z| < \pi/2 - \delta$, la serie asintótica ha de ser la misma que se halló para $F(x)$ en el texto.

12. Comprobar el último aserto del Problema 11 utilizando directamente el Lema de Watson para calcular las series asintóticas de (6.7) y de $F_1(\zeta)$.

13. Demostrar que el proceso del Problema 10 puede aplicarse a la función $F_1(\zeta)$ del Problema 11, obteniéndose finalmente

$$F(z) = \int_0^\infty \frac{\exp(-uze^{-2i\beta})}{u + e^{2i\beta}}\, du, \qquad |\arg z - 2\beta| < \frac{\pi}{2}.$$

En consecuencia, probar que sobre la superficie de Riemann de $\log z$, $F(z)$ admite una prolongación analítica al sector $|\arg z| < 3\pi/2$. (Si β está cercano a $\pi/2$ y se repite el proceso, intervendrá un nuevo término, pues se cruza un polo.)

7. **Productos infinitos.** Siendo $\{a_k\}$ una sucesión de números complejos, el producto de n factores $1 + a_k$ se denota

$$p_n = \prod_{k=1}^{n} (1 + a_k) = (1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n). \tag{7.1}$$

Por el momento, se supondrá que $a_k \neq -1$ para todo k. En esta hipótesis, la sucesión de productos converge si $p_n \to p \neq 0$. La condición $p \neq 0$ se impone, en parte, para asegurar la existencia de $\operatorname{Log} p$. El hecho de ser convergente $p_n \to p$ se representa también

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + a_k) = p,$$

y se dice que (7.1) es la sucesión de productos parciales de este producto infinito.

Se sigue de (7.1) que $p_n = (1 + a_n)p_{n-1}$, o lo que es igual, $a_n p_{n-1} = p_n - p_{n-1}$, por consiguiente, la convergencia del producto implica

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{p_n - p_{n-1}}{p_{n-1}} = \frac{p-p}{p} = 0.$$

Esta condición es la análoga de $a_n \to 0$ para las series convergentes. Como ocurre con las series, la condición $a_n \to 0$ es necesaria para la convergencia, pero no es suficiente. Demostraremos el siguiente teorema:

TEOREMA 7.1. *Un producto infinito, con $a_k \neq -1$ es convergente cuando y solamente cuando la serie*

Converge. $$\sum_{k=1}^{\infty} \text{Log}(1 + a_k) \tag{7.2}$$

Demostración de la condición suficiente. Si se denota mediante s_n la n-ésima suma parcial de la serie (7.2), entonces

$$e^{s_n} = e^{\text{Log}(1+a_1)} e^{\text{Log}(1+a_2)} \cdots e^{\text{Log}(1+a_n)} = p_n.$$

Por lo tanto, de $s_n \to s$ se sigue $p_n \to e^s \neq 0$ lo que demuestra que la condición es suficiente; la necesidad es menos importante para las aplicaciones y se demuestra en el Problema 9 de esta sección.

La demostración precedente proporciona también un resultado que frecuentemente es de utilidad. Para cada j denotemos mediante $\log_j$ una rama bien definida del logaritmo, rama que, sin embargo, puede ser diferente para valores de j diferentes. Supongamos que la serie

$$s = \sum_{j=1}^{\infty} \log_j(1 + a_j)$$

sea convergente. Entonces, al igual que antes, $e^{s_n} = p_n$, y de aquí

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + a_j) = e^s.$$

Hasta el momento se ha excluido el caso $a_j = -1$. Si algunos de los $a_j = -1$, se dice que el producto es convergente cuando al suprimir los factores iguales a 0 converge en el sentido definido arriba. Solamente se admitirá que número finito de tales factores.

Las definiciones anteriores se amplían de manera natural a productos en los que el índice k recorra conjuntos distintos del $\{1,2,\ldots,n\}$ o $\{1,2,3,\ldots\}$, así como cuando las constantes a_k se sustituyen por funciones $a_k(z)$. En particular, cuando un producto de funciones es convergente en todo punto de una región G, se dice que el producto es convergente en dicha región. La convergencia es uniforme cuando los productos parciales verifican $p_n(z) \to p(z)$ uniformemente en G.

TEOREMA 7.2. (Criterio M de Weierstrass para productos.) Supongamos que para $k = 1, 2, 3, \ldots$ *la función* $a_k(z)$ *sea analítica en un dominio D, y sea* $M_k \geqslant 0$ *una sucesión de constantes tales que*

$$\sum_{k=1}^{\infty} M_k < \infty.$$

Supongamos también que exista un N, independiente de z, tal que

$$|\mathrm{Log}[1 + a_k(z)]| \leq M_k, \qquad k \geq N. \tag{7.3}$$

Entonces el producto

$$p(z) = \prod_{k=1}^{\infty} [1 + a_k(z)]$$

converge hacia una función p(z) analítica en D, y p(z) es 0 solamente en los puntos de D donde uno o varios de sus factores $1 + a_k(z)$ *sean 0.*

Demostración. Definamos, para $n \geq N$

$$P_n(z) = \prod_{k=N}^{n} [1 + a_k(z)], \quad S_n(z) = \sum_{k=N}^{n} \mathrm{Log}[(1 + a_k(z)].$$

Se sigue de la hipótesis que

$$|S_m(z)| \leq \sum_{k=N}^{m} M_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} M_k = M \tag{7.4}$$

siendo $m \geq N$, y quedando M definido por esta expresión. Análogamente, $n > m \geq N$ implica

$$|S_n(z) - S_m(z)| \leq \sum_{k=m+1}^{n} M_k \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} M_k = \epsilon_m \tag{7.5}$$

definiéndose ϵ_m mediante la última igualdad.

De $P_n(z) = \exp S_n(z)$ y $P_m(z) = \exp S_m(z)$, se deduce

$$P_n(z) - P_m(z) = e^{S_m(z)}[e^{S_n(z) - S_m(z)} - 1] \tag{7.6}$$

para $n > m \geq N$. Por la serie de Taylor de e^w, se tiene también

$$|e^w| \leq e^{|w|}, \qquad |e^w - 1| \leq e^{|w|} - 1$$

y así pues, en virtud de (7.6), (7.5) y (7.4),

$$|P_n(z) - P_m(z)| \leq e^M(e^{\epsilon_m} - 1).$$

Lo que muestra que la sucesión $\{P_n(z)\}$ es uniformemente de Cauchy. Por consiguiente $P_n(z) \to P(z)$ uniformemente sobre D, y la función $P(z)$ es analítica. De (7.4) se sigue

$$|P_m(z)| = \exp \operatorname{Re} S_m(z) \geq e^{-M}$$

y por consiguiente, $|P(z)| \geq e^{-M}$ lo que demuestra que $P(z) \neq 0$ en todo punto de D.

El producto infinito primitivo es de la forma $p(z) = Q(z)P(z)$ donde $Q(z)$ representa el producto de sus $N-1$ primeros factores,

$$Q(z) = \prod_{k=1}^{N-1} [1 + a_k(z)]. \tag{7.7}$$

Así pues, los ceros de $p(z)$ provienen necesariamente de los ceros de $Q(z)$, lo que termina la demostración.

El siguiente suplemento al Teorema 7.2 es con frecuencia de utilidad:

TEOREMA 7.3. *La convergencia del producto del Teorema 7.2 es uniforme cuando la función $Q(z)$ de la fórmula (7.7) es acotada en D. Asimismo, la conclusión sigue siendo válida cuando la condición (7.3) se sustituye por la condición $|a_k(z)| \leq M_k$.*

Demostración. El primer aserto se sigue de la igualdad

$$p(z) - p_n(z) = Q(z)[P(z) - P_n(z)]$$

y de la convergencia uniforme de $P_n(z) \to P(z)$. El segundo es consecuencia[1] de

$$|\operatorname{Log}(1 + w)| \leq 2|w|, \qquad |w| \leq \tfrac{1}{2}, \tag{7.8}$$

[1] Esta desigualdad y otras del mismo tipo que se dan a continuación, se demostraron ya en el Problema 5 de la Sección 3.

el cual, a su vez, se sigue de la serie de Taylor de $\text{Log}(1 + w)$. Como el término general de una serie convergente tiende hacia 0, existe un N tal que $M_k < \frac{1}{2}$ para todo $k \geq N$. Entonces, se deduce de (7.8) que

$$|\text{Log}[1 + a_k(z)]| \leq 2M_k, \qquad k \geq N.$$

lo que muestra que se satisface la hipótesis del Teorema 7.2, con $2M_k$ en lugar de M_k, quedando establecido el Teorema 7.3.

Ejemplo 7.1. Demostrar que el producto

$$F(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right)$$

representa una función entera cuyos polos son todos simples y se encuentran en los puntos $z = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ Demostrar también que la convergencia es uniforme en el disco $|z| < R$ para todo $R > 0$.

Es evidente que en todo disco $|z| < R$, se verifica $|z^2/k^2| < R^2/k^2$, lo que permite aplicar el Teorema 7.3 con $M_k = R^2/k^2$. Se obtiene así la uniformidad de la convergencia, así como las otras propiedades de $F(z)$ en el disco $|z| < R$. Como R es arbitrario, la demostración está completa.

Ejemplo 7.2. Se pide construir una función cuyos únicos ceros se encuentren en los puntos $z = 1,2,3, \ldots$ y sean todos simples. El intento de representar esta función por el producto

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{k}\right)$$

resulta fallido, pues como se muestra en el Problema 2, este producto diverge para todo $z \neq 0$. Se obtiene una representación satisfactoria considerando

$$G(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{k}\right) e^{z/k}. \tag{7.9}$$

El motivo de introducir el factor exponencial $e^{z/k}$ es que su logaritmo da un término z/k que se reduce exactamente con el primer término de la serie de $\text{Log}(1 - z/k)$.

Para ver que (7.9) posee las propiedades pedidas, observemos que la serie de Taylor de $\text{Log}(1-w)$ permite obtener

$$|\text{Log}[(1-w)e^w]| \leq |w|^2, \qquad |w| \leq \tfrac{1}{2}.$$

Supongamos que $|z| < R$, donde R es fijo. Entonces, para $k > 2R$ la desigualdad anterior da

$$\left|\text{Log}\left[\left(1-\frac{z}{k}\right)e^{z/k}\right]\right| \leq \left|\frac{z}{k}\right|^2 \leq \frac{R^2}{k^2}.$$

La conclusión se sigue del Teorema 7.2 con

$$M_k = \frac{R^2}{k^2}, \qquad 1 + a_k(z) = \left(1-\frac{z}{k}\right)e^{z/k}.$$

Como acabamos de ver, la función $G(z)$ definida por (7.9) es una función entera cuyos únicos ceros se encuentran en $z=1,2,3,\ldots$, y son todos simples. Se obtendría otra función con estas propiedades si se multiplicara $G(z)$ por e^z, o más generalmente, por cualquier función entera que carezca de ceros. Vemos de esta forma que una función entera no está determinada de modo único por el conjunto de sus ceros. Demostraremos sin embargo el siguiente teorema:

TEOREMA 7.4. *Sean $F(z)$ y $G(z)$ dos funciones enteras que tengan los mismos ceros con las mismas multiplicidades. Entonces existe una función entera $g(z)$ tal que*

$$F(z) = e^{g(z)}G(z).$$

Demostración. La función $H(z) = F(z)/G(z)$ es entera si se exceptúan las singularidades correspondientes a los ceros comunes α_k de F y G. Por el Teorema 7.2 del Capítulo 3, las singularidades en los puntos α_k son evitables, y una vez eliminadas, $H(\alpha_k) \neq 0$. La función $H(z)$ obtenida de este modo es entera y carece de ceros. Por el Ejemplo 1.2 del Capítulo 4, esta función posee un logaritmo analítico. Es decir, $H(z) = e^{g(z)}$ siendo entera la función $g(z)$. Multiplicando por $G(z)$ se obtiene el Teorema 7.4.

Ejemplo 7.3. Si se toma por definición que el valor del primer miembro en $z = 0$, sea igual a 1, probar que

$$\frac{\operatorname{sen} \pi z}{\pi z} = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right), \qquad |z| < \infty.$$

Por lo demostrado en el Ejemplo 7.1, el producto que aparece en el segundo miembro es una función entera que tiene los mismos ceros que la función del primero. Entonces, por el Teorema 7.4,

$$\frac{\operatorname{sen} \pi z}{\pi z} = e^{g(z)}G(z)$$

siendo G el producto infinito y g una función entera. Como los tres factores toman el valor 1 para $z = 0$, podemos poner $g(0) = 0$. Tomando logaritmos se obtiene

$$\operatorname{Log}\frac{\operatorname{sen} \pi z}{\pi z} = g(z) + \operatorname{Log} G(z) = g(z) + \sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{Log}\left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right)$$

para $|z|$. suficientemente pequeño. La acotación $|\operatorname{Log}(1 - w)| \leq 2|w|$ muestra que la serie converge uniformemente para $|z|$ suficientemente pequeño, luego por el Teorema 1.3, la serie puede derivarse término a término. Resulta así

$$\pi \cot \pi z - \frac{1}{z} = g'(z) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2z}{k^2 - z^2}.$$

La serie que aparece en el segundo miembro de la igualdad anterior es la serie que en el Ejemplo 2.3 se obtuvo para $\pi \cot \pi z$. (Ver también el Ejemplo 2.2). Sustituyendo en la expresión anterior se ve que $g'(z) = 0$ para $|z|$ suficientemente pequeño. Puesto que g es entera, lo mismo ocurre para todo valor de z, y por consiguiente, g es constante. Haciendo $z = 0$ se tiene $g(0) = 0$, de donde se sigue el resultado.

Se da en el Teorema 8.4 de la sección siguiente una técnica más satisfactoria para efectuar cálculos de este tipo, que no requieren utilizar logaritmos. Por este motivo no nos hemos detenido a justificar el empleo de la rama principal Log en cada uno de los términos de las series anteriores.

Problemas

1. Demostrar que $a^{-1}\operatorname{Log}(1 + a) \to 1$ cuando $a \to 0$ y deducir de aquí que

$$\tfrac{1}{2}|a| \leq |\operatorname{Log}(1 + a)| \leq 2|a|$$

para $|a|$ suficientemente pequeño. Utilizando este resultado, demostrar para $a_i > 0$ que si uno cualquiera de los productos o series siguientes es convergente lo son todos los demás:

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1 - a_i), \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_i, \qquad \prod_{k=1}^{\infty}(1 + a_i).$$

2. Si $s(n) = 1 + 1/2 + 1/3 + \cdots + 1/n$, comprobar que

$$P_n(z) = \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{z}{k}\right) = e^{-s(n)z}\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{z}{k}\right)e^{z/k}$$

estando $P_n(z)$ definido por esta última ecuación. Utilizando resultados del texto, demostrar que $|P_n(z)| \to 0$ cuando $n \to \infty$ si $\operatorname{Re} z > 0$, y que $|P_n(z)| \to \infty$ cuando $n \to \infty$ cuando $\operatorname{Re} z < 0$. Deducir también del Problema 1 que el producto infinito correspondiente diverge para todo valor $z \neq 0$. real.

3. Siendo $k^z = e^{z \operatorname{Log} k}$, demostrar que

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1 - e^{kz}), \qquad \prod_{k=1}^{\infty}(1 - k^z)$$

representan funciones analíticas que son siempre $\neq 0$ en los semiplanos $\operatorname{Re} z < 0$ y $\operatorname{Re} z < -1$, respectivamente.

4. Agrupando los factores correspondientes a $k = -n$ y $k = n$, demostrar que

$$\prod_{k=-\infty}^{\infty}{}'\left(1 - \frac{z}{k}\right)e^{z/k} = \frac{\operatorname{sen} \pi z}{\pi z}$$

la comilla en el símbolo de producto significa que se omite el factor correspondiente a $k = 0$

5. Agrupando los términos correspondientes a n y $-n$, y utilizando el resultado del Ejemplo 2.3, demostrar que

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'\left(\frac{1}{z - k} + \frac{1}{k}\right)$$

La comilla del símbolo de sumación significa que el sumando correspondiente a $k = 0$ ha de omitirse.

6. Derivando el resultado del Problema 5 obtener los desarrollos:

$$\left(\frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi z}\right)^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z - k)^2}, \quad \left(\frac{\pi}{\cos \pi z}\right)^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z - k - \tfrac{1}{2})^2}.$$

7. Integrando el desarrollo de $\pi^2 \sec^2 \pi z$ dado por el Problema 6, obtener un desarrollo para $\pi \tan \pi z$. Agrupando los términos de este desarrollo correspondientes a n y a $-n$, mostrar que dicho desarrollo es equivalente al:

$$\pi \tan \pi z = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - (k - \tfrac{1}{2})^2}.$$

8. Integrando el resultado del Problema 7, y tomando exponenciales se obtiene

$$\cos \pi z = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{(k - \tfrac{1}{2})^2}\right).$$

9. No siendo ningún $\alpha_k = -1$, demostrar que la convergencia de (7,2) es condición necesaria para que $p_n \to p \neq 0$ (7.1). (Si Arg $p \neq \pi$, entonces para n suficientemente grande,

$$\operatorname{Log} p_n = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Log}(1 + a_k) + 2m_n \pi i,$$

donde m_n es un entero que depende de n. Como $\operatorname{Log} p_n \to \operatorname{Log} p$, se deduce que para n suficientemente grande, m_n no varía al crecer n. Si Arg $p = \pi$, se considera $\operatorname{Log}(-p_n)$ y se procede como en el caso anterior.)

10. Demostrar la fórmula de Wallis (Sección 6, Problema 8) haciendo $z = \tfrac{1}{2}$ en el Ejemplo 7.3.

* 8. **Desarrollos de Weierstrass y de Mittag-Leffler.** Se vio en el Ejemplo 7.2 que introduciendo factores exponenciales se puede hacer convergente un producto. Esta es la idea que nos guía al definir los factores primarios de Weierstrass

$$E(w,m) = (1 - w) \exp\left(w + \frac{w^2}{2} + \frac{w^3}{3} + \cdots + \frac{w^m}{m}\right)$$

para $m = 1,2,3, \ldots$, También por definición, $E(w,0) = 1 - w$. Mediante el desarrollo de Taylor de $\operatorname{Log}(1 - w)$, se comprueba fácilmente que

$$|\operatorname{Log} E(w,m)| \leq 2|w|^{m+1}, \qquad |w| \leq \tfrac{1}{2}. \tag{8.1}$$

Esta acotación se demuestra de forma independiente en otro lugar de esta misma sección.

TEOREMA 8.1. *(Weierstrass). Para $k = 1,2,3, \ldots$, sea $\{\alpha_k\}$ una sucesión de números complejos, y sea $m \geq 0$ un entero tal que*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\alpha_k|^{m+1}} < \infty. \tag{8.2}$$

Entonces la función

$$P(z) = \prod_{k=1}^{\infty} E(z/\alpha_k, m) \tag{8.3}$$

es una función entera cuyos únicos ceros son los puntos α_k. *El orden del cero correspondiente al punto* α_n *es igual al número de índices* j *tales que* $\alpha_j = \alpha_n$.

Demostración. Sea $R > 0$, y tomemos un entero N de forma que $|\alpha_k| > 2R$ para $k \geq N$. El término general de la serie (8.2) tiende hacia 0, y por consiguiente $|\alpha_k| \to \infty$, lo que demuestra la existencia de un N como el pedido. Cuando $k > N$ y $|z| < R$, es evidente que $|z/\alpha_k| < \frac{1}{2}$. En virtud de (8.1),

$$|\operatorname{Log} E(z/\alpha_k, m)| \leq 2\left|\frac{z}{\alpha_k}\right|^{m+1} \leq \frac{2R^{m+1}}{|\alpha_k|^{m+1}}.$$

La condición (8.2) permite aplicar el Teorema 7.2. En consecuencia, $P(z)$ representa una función analítica en $|z| < R$, y cuyos únicos ceros son los puntos α_k, $k < N$, que están contenidos en el disco $|z| < R$. Como R es arbitrario, el Teorema 8.1 está demostrado.

El producto (8.3) se llama producto de Weierstrass de género m. Cuando la serie (8.2) no converge para ningún valor de m, lo que ocurre, por ejemplo si $\alpha_k = \operatorname{Log}(1 + k)$, puede ser posible utilizar un producto de género infinito, como se expone en el teorema siguiente:

TEOREMA 8.2. *(Weierstrass). Para* $k = 1,2,3,\ldots$ *sea* $\{\alpha_k\}$ *una sucesión de números complejos tales que* $|\alpha_k| \to \infty$. *Entonces la función*

$$P(z) = \prod_{k=1}^{\infty} E(z/\alpha_k, k)$$

es una función entera cuyos únicos ceros se encuentran en los puntos α_k *y solamente en ellos. La multiplicidad del cero correspondiente a* α_n *es igual al número de índices* j *tales que* $\alpha_j = \alpha_n$.

Demostración. Sea $R > 0$ arbitrario. Tomemos N de forma que $|\alpha_k| > 2R$ para todo $k \geq N$. Entonces, para $|z| < R$ y $k \geq N$, se tiene $|z/\alpha_k| \leq \frac{1}{2}$, y de aquí, en virtud de (8.1),

$$|\text{Log } E(z/\alpha_k,\ k)| \leq \left|\frac{z}{\alpha_k}\right|^{k+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$$

Sumando respecto del índice k la serie resultante es convergente, lo que permite aplicar el Teorema 7.2, el cual muestra que $P(z)$ posee las propiedades pedidas en todo disco $|z| < R$. Como R es arbitrario, el teorema ha sido demostrado.

Si $F(z)$ es una función entera, no idénticamente nula. Entonces, o bien la función $F(z)$ *tiene solamente un número finito de ceros* α_k o bien sus ceros verifican la hipótesis $|\alpha_k| \to \infty$ del Teorema 8.2. Para demostrarlo, supongamos que existen infinitos α_k en un disco $|z| \leq R$. En virtud de un teorema de Análisis real que aquí supondremos conocido, existe una subsucesión de $\{\alpha_k\}$ que tiende hacia un punto α del disco $|z| \leq R$. Por la continuidad de $F(z)$ se tiene $F(\alpha) = 0$; pero como este cero no es un cero aislado, $F(z) \equiv 0$, lo que es contrario a la hipótesis.

Para poder considerar también las funciones enteras $F(z)$ que carecen de ceros conviene considerar que 1 es un producto de Weierstrass. Un producto finito de expresiones $E(z/\alpha, m)$ se considera también como un producto de Weierstrass.

TEOREMA 8.3. *(Teorema del producto de Weierstrass.) Toda función entera* $F(z) \not\equiv 0$ *puede escribirse en la forma*

$$F(z) = z^n e^{g(z)} P(z)$$

siendo n *un entero no negativo,* $g(z)$ *una función entera, y* $P(z)$ *un producto de Weierstrass.*

Demostración. Sea n el orden del cero en el punto $z = 0$, y enumeremos los restantes ceros, si existen, en una sucesión $\{\alpha_k\}$. (Para ello podemos, por ejemplo, comenzar enumerando los ceros contenidos en el disco $|\alpha| < 1$ después los contenidos en la corona $1 \leqslant |\alpha| < 2$, y así sucesivamente.) Los ceros múltiples se repiten en la sucesión $\{\alpha_k\}$ un número de veces igual a su multiplicidad. Sea $P(z)$ un producto convergente de Weierstrass formado a partir de la sucesión α_k. La existencia de dicho producto $P(z)$ es trivial cuando solamente existe un número finito de ceros α_k. Si hay una infinidad de α_k, entonces $|\alpha_k| \to \infty$ y podemos utilizar el producto $P(z)$ del Teorema 8.1 (caso de cumplirse la condición (8.2)), o bien el del Teorema 8.2. Como $z^n P(z)$ tiene los mismos ceros que $F(z)$, y los órdenes de sus ceros son los mismos, el Teorema 8.3 se deduce del Teorema 7.4.

Hasta el momento no hemos dado indicación alguna que permita obtener un desarrollo en producto para una función dada. Se puede obtener un método sistemático basándose en la derivación logarítmica. Si

$$F(z) = \prod_{k=1}^{\infty} [1 + a_k(z)] \tag{8.4}$$

un cálculo formal sugiere que

$$\log F(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \log[1 + a_k(z)]$$

y de aquí,

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k'(z)}{1 + a_k(z)}. \tag{8.5}$$

Recíprocamente, podría esperarse que este desarrollo en serie permita obtener el desarrollo en producto (8.4).

TEOREMA 8.4. *Supongamos que todas las funciones $a_j(z)$ sean analíticas en un dominio D, en el cual (8.4) se verifica uniformemente. Entonces se verifica (8.5) en todos los puntos de D en los que $F(z) \neq 0$.*

Demostración. Sea $F(z) = F_n(z)G_n(z)$, donde $F_n(z)$ es el producto de los n primeros factores y $G_n(z)$ el producto residual. Como la convergencia del producto es uniforme, $F(z)$ es analítica en D. Sea z_0 un punto de D en el que $F(z) \neq 0$. Entonces $|F(z)| > \eta$ en un cierto disco $|z - z_0| < \delta$, siendo η y δ constantes positivas. Puesto que $F_n(z) \to F(z)$ uniformemente en D, $G_n(z) \to 1$ uniformemente en $|z - z_0| < \delta$, y de aquí, por el Teorema 1.3, $G_n'(z) \to 0$ uniformemente en $|z - z_0| < \delta/2$. De la identidad

$$F(z) = G_n(z) \prod_{k=1}^{n} [1 + a_k(z)], \qquad F(z) \neq 0,$$

se deduce que

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \frac{G_n'(z)}{G_n(z)} + \sum_{k=1} \frac{a_k'(z)}{1 + a_k(z)}. \tag{8.6}$$

Esta identidad puede obtenerse tomando logaritmos en la precedente, o más fácilmente, utilizando la Identidad (1.4) del Capítulo 2. Puesto que en el disco $G_n'(z) \to 0$ y $G_n(z) \to 1$ se verifica que $|z - z_0| < \delta/2$, es claro que en este disco $G_n'(z)/G(z) \to 0$. La conclusión se sigue haciendo tender $n \to \infty$ en la identidad (8.6).

TEOREMA 8.5. *Si en un dominio D se verifica (8.5) uniformemente, entonces se verifica*

$$\frac{F(z)}{F(z_0)} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1 + a_k(z)}{1 + a_k(z_0)}$$

para todos z_0 y z pertenecientes a D.

Demostración. Por ser la convergencia uniforme, la serie (8.5) puede integrarse término a término desde z_0 hasta z a lo largo de cualquier contorno contenido en D. Resulta así

$$\log_0 \frac{F(z)}{F(z_0)} = \sum_{k=1}^{\infty} \log_j \frac{1 + a_j(z)}{1 + a_j(z_0)}$$

pudiendo depender la rama $\log_j$ tanto de z como del índice j. Tomando exponenciales se obtiene el Teorema 8.5.

En lo que queda de esta sección estudiaremos un importante desarrollo en serie infinita, debido a Mittag-Leffler, que está intimamente relacionado con el producto de Weierstrass. La idea consiste en expresar una función meromorfa $F(z)$ mediante una serie en la que cada uno de sus términos contiene la parte principal (o singular) de F en una singularidad. El conocido desarrollo en fracciones simples de una función racional constituye un caso particular del desarrollo de Mittag-Leffler, de la misma forma que el teorema de factorización para polinomios constituye un ejemplo de desarrollo de Weierstrass.

Supongamos por ejemplo que se trata de construir una función con polos simples de residuo 1 en los puntos $z = 1,2,3,\ldots$ Un primer intento de representar la función por la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z - k}$$

no es satisfactorio, pues la serie es divergente para todo valor de z. Una representación apropiada la da

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - k} + \frac{1}{k} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z}{k(z - k)}. \tag{8.7}$$

Ahora, si $|z| < R$, los términos de la serie convergen hacia 0 casi tan rápidamente como R/k^2, y por consiguiente, la serie es convergente en todos los puntos donde ningún denominador sea nulo. El papel del término $1/k$ es reducirse con el primer sumando del desarrollo de $1/(z-k)$ en serie de potencias de z/k.

Con esta idea, definimos, para $m = 1,2,3,\ldots$, el término primario de Mittag-Leffler

$$L(w,m) = \frac{1}{w - 1} + 1 + w + w^2 + \cdots + w^{m-1} \tag{8.8}$$

y también por definición, $L(w,0) = 1/(w - 1)$. Por el Ejemplo 1.5 del Capítulo 1 se tiene

$$L(w,m) = \frac{w^m}{w - 1}$$

y por tanto,

$$|L(w,m)| \leq 2|w|^m, \qquad |w| \leq \tfrac{1}{2}. \quad (8.9)$$

Existe una importante relación entre $L(w,m)$ y $E(w,m)$. Como el primer sumando de (8.8) es $-1/(1 - w)$

$$\int_0^w L(z,m)\, dz = \operatorname{Log} E(w,m), \qquad |w| < 1,$$

tomando como camino de integración el radio que une 0 con w. La desigualdad (8.9) permite acotar la integral, obteniéndose

$$|\operatorname{Log} E(w,m)| \leq 2\frac{|w|^{m+1}}{m + 1}, \qquad |w| \leq \tfrac{1}{2}$$

que es la desigualdad básica de la teoría de Weierstrass.

TEOREMA 8.6 . *(Mittag-Leffler.) Sean, para* $k = 1,2,3, \ldots$, $\{\alpha_k\}$ *y* $\{\beta_k\}$ *dos sucesiones de números complejos. Supongamos que todos los* α_k *sean distintos, que* $|\alpha_k| \to \infty$ *y que*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\beta_k|}{|\alpha_k|^{m+1}} < \infty. \quad (8.10)$$

Entonces la función

$$G(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{\alpha_k} L(z/\alpha_k,\ m)$$

representa una función meromorfa cuyas únicas singularidades en el plano finito son polos simples en los puntos α_k, *con residuo* β_k.

Demostración. Sea $R > 0$, y tomemos N de forma que $|\alpha_k| > 2R$ cuando $k > N$. Entonces, cuando $|z| < R$ y $k > N$, se tiene $|z/\alpha_k| < \tfrac{1}{2}$, y de aquí, en virtud de (8.9),

$$\left|\frac{\beta_k}{\alpha_k} L(z/\alpha_k,\ m)\right| \leq \frac{|\beta_k|}{|\alpha_k|} 2\left|\frac{z}{\alpha_k}\right|^m \leq 2\frac{|\beta_k| R^m}{|\alpha_k|^{m+1}}.$$

La condición (8.10) asegura la convergencia de la serie obtenida al sumar en respecto de k, y por consiguiente, la serie

$$\sum_{k=N}^{\infty} \frac{\beta_k}{\alpha_k} L(z/\alpha_k,\ m)$$

converge uniformemente en el disco $|z| < R$ y representa una función analítica en él. Los restantes términos de la serie de $G(z)$ difieren tan sólo en un polinomio de

$$\sum_{k=1}^{N-1} \frac{\beta_k}{\alpha_k} \frac{1}{z/\alpha_k - 1} = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\beta_k}{z - \alpha_k}$$

y por lo tanto, la función que definen tiene polos simples en los puntos $z = \alpha_k$ con residuos β_k. Se ve así que la función $G(z)$ posee las propiedades requeridas en el disco $|z| < R$ para todo R, lo que termina la demostración.

El Teorema 8.6 no es la forma más general del teorema de Mittag-Leffler. En su forma general el teorema establece que es posible construir una función meromorfa $f(z)$ cuyos puntos singulares sean los α_k, tal que, en cada singularidad, $f(z)$ tenga una parte principal prescrita de antemano. Además, la construcción anterior no sólo es posible en $|z| < \infty$, sino también en cualquier dominio D, con tal de que los α_k sean puntos aislados de D, es decir, con tal de que $\{\alpha_k\}$ no contenga ninguna subsucesión convergente hacia un punto α perteneciente a D. La demostración de este teorema general es, en principio, parecida a la del Teorema 8.6. No la daremos aquí.

Ejemplo 8.1. Obtener un desarrollo de Mittag-Leffler para la función $\pi \cot \pi z$ considerando para ello la integral

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_C (\pi \cot \pi\zeta)\left(\frac{1}{z - \zeta} + \frac{1}{\zeta}\right) d\zeta.$$

El contorno C que tomaremos será el mostrado en la Figura 2-1, tomando N lo suficientemente grande para que z se encuentre en su interior. Entonces, por el teorema de los residuos,

$$I = -\pi \cot \pi z + \sum_{n=-N}^{N}{}' \left(\frac{1}{z - n} + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{z}$$

denotando la comilla del signo de sumación que se ha de omitir el término correspondiente a $n = 0$. El término $-\pi \cot \pi z$ proviene del polo simple en $\zeta = z$, la suma, de los polos simples correspondientes a $\zeta = n$ con $n \neq 0$ un entero, y el término $1/z$, del polo doble en $\zeta = 0$. Como ya indicó en la Sección 2, sobre C se verifica $|\cot \pi\zeta| \leq |\coth \pi|$, y de aquí se sigue fácilmente que $I \to 0$ cuando $N \to \infty$. Se obtiene de este modo

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right),$$

que es el desarrollo de Mittag-Leffler requerido.

Problemas

1. Aplicando el Teorema 8.1 con $m = 0$, 1 o 2, respectivamente, construir funciones enteras cuyos ceros se encuentren en los puntos $\{k^{3/2}\}$, $\{k^{3/4}\}$, $\{k^{1/2}\}$, $k = 1,2,3,\ldots$, y solamente en ellos.
2. (a) Obtener desarrollos de Mittag-Leffler para las funciones siguientes:

$$\coth \pi z, \quad \csc \pi z, \quad \csc^2 \pi z, \quad \cos \pi z \csc^2 \pi z.$$

   (b) Comprobar la concordancia de los resultados con los de los Problemas 7 y 10 de la Sección 2.
3. Demostrar que si la función $f(z)$ es meromorfa en $|z| < \infty$, entonces $f(z)$ es el cociente de dos funciones enteras. (Construir mediante un producto de Weierstrass una función g tal que $fg = h$ sea entera.)
4. Construir una función entera que tenga ceros de multiplicidad n en $z = n$, $n = 1,2,3,\ldots$, y ya no posea ningún otro cero.

La función gamma.

5. Definamos, para $z \neq 0, -1, -2, \ldots$, la función $H(z)$ mediante

$$\frac{1}{H(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-z/k}$$

   siendo $\gamma \geq 0$ una constante. Demostrar que

$$\frac{H'(z)}{H(z)} = -\frac{1}{z} - \gamma - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+k} - \frac{1}{k} \right), \quad \frac{d}{dz} \frac{H'(z)}{H(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(z+k)^2}.$$

6. Siendo $g(z) = H(z+1)/[zH(z)]$, demostrar que

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{H'(z+1)}{H(z+1)} - \frac{H'(z)}{H(z)} - \frac{1}{z}.$$

Deducir del Problema 5 que $g'(z) = 0$, y de aquí, que $H(z+1) = czH(z)$, siendo c una constante. Haciendo tender $z \to 0$, se obtiene $c = H(1)$.

7. Se elige ahora la constante γ de forma que $H(1) = 1$. Demostrar que para ello es necesario y suficiente que

$$e^{-\gamma} = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{k}\right)e^{-1/k} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{1}\frac{3}{2}\frac{4}{3}\cdots\frac{n+1}{n}e^{-s(n)}$$

siendo $s(n) = 1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/n$. El producto del segundo miembro se reduce a $n + 1$, deducir entonces que

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \operatorname{Log}(n+1)\right].$$

(El límite del segundo miembro existe y es diferente de 0 porque en virtud del Teorema 8.1 el producto es convergente.) La constante γ se llama constante de Euler. En contraste con lo que ocurre para e y π, que se sabe que son trascendentes, no se sabe siquiera si γ es irracional.

8. Deducir de los Problemas 6 y 7 que $H(z+1) = zH(z)$. Como también se verifica $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, demostrar que la función

$$F(z) = \frac{1}{\operatorname{sen}\pi z}\left(1 - \frac{\Gamma(z)}{H(z)}\right)$$

verifica $F(z+1) = -F(z)$. Luego $F(z+2) = F(z)$. Como $F(z)$ es analítica en el semiplano $\operatorname{Re} z > 0$, el resultado anterior muestra que $F(z)$ es entera.

9. Siendo $1 \leq x \leq 2$, demostrar que

$$|\Gamma(z)| \leq \int_0^1 e^{-u}\,du + \int_1^{\infty} e^{-u}u\,du \leq \Gamma(1) + \Gamma(2) = 2.$$

10. Si $z = x + iy$, demostrar que

$$\frac{1}{|H(z)|^2} = |z|^2 e^{2\gamma x}\prod_{k=1}^{\infty}E_k, \quad \text{donde} \quad E_k = \left[\left(1 + \frac{x}{k}\right)^2 + \left(\frac{y}{k}\right)^2\right]e^{-2x/k}.$$

Demostrar, para $x \geq 0$, que $\partial E_k/\partial x \leq 0$, y por lo tanto, el valor de E_k en $x = 0$ acota superiormente al valor en cualquier punto $x > 0$. Por tanto $E_k \leq 1 + (y/k)^2$, y de aquí, para $x \geq 0$

$$\frac{1}{|H(z)|^2} \leq e^{2\gamma x}|z|^2 \frac{\operatorname{sen} \pi i y}{\pi i y} = e^{2\gamma x}|z|^2 \frac{\operatorname{senh} \pi y}{\pi y}.$$

11. Utilizando en el Problema 8 los resultados de los Problemas 9 y 10, demostrar, para $y \geq 1$, $1 \leq x \leq 2$, que

$$|F(z)| \leq \frac{2}{e^{\pi y} - e^{-\pi y}}\left(1 + \frac{e^{\gamma x}|z|e^{\pi y/2}|\Gamma(z)|}{(\pi y)^{1/2}}\right) \leq \frac{4}{e^{\pi y}}[1 + e^{2\gamma}(y + 2)e^{\pi y/2}2].$$

En consecuencia, $|F(z)|$ está acotada en la región $1 \leq x \leq 2, y \geq 1$. Como $F(z)$ es entera, también está acotada en $1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1$. Como $F(\bar{z}) = \overline{F(z)}$, $F(z)$ está acotada para $1 \leq x \leq 2$. Por el problema 8, $|F(z + 1)| = |F(z)|$, $F(z)$ está acotada en todo el plano finito, $|z| < \infty$; por el teorema de Liouville, $F(z)$ es constante. Haciendo ahora $y \to \infty$, demostrar que la constante es 0, y por lo tanto, $\Gamma(z) = H(z)$.

12. Demostrar que en el Problema 5 se verifica $[1/H(z)][1/H(-z)] = -z^2(\operatorname{sen}\pi z)/(\pi z)$. Como $H(z) = \Gamma(z)$ y $\Gamma(1 - z) = -z\Gamma(-z)$, deducir que

$$\Gamma(z)\Gamma(1 - z) = \pi \csc \pi z.$$

Haciendo $z = \frac{1}{2}$, se obtiene $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, y de aquí

$$2\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \int_0^\infty t^{-1/2}e^{-t}\,dt = \sqrt{\pi}.$$

13. Siendo $\operatorname{Re} z > 0$, demostrar, integrando por partes, la primera de las fórmulas siguientes, y deducir de ella la segunda

$$\int_0^\infty e^{-uz}u\,du = \frac{1}{z^2}, \quad \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{(z + k)^2} = \int_0^\infty e^{-uz}\frac{1 - e^{-uN}}{1 - e^{-u}}u\,du.$$

Haciendo tender $N \to \infty$, y teniendo en cuenta que en el Problema 5, $\Gamma(z) = H(z)$, deducir que

$$\frac{d}{dz}\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(z + k)^2} = \int_0^\infty e^{-uz}\frac{u}{1 - e^{-u}}\,du.$$

14. Agrupar en el desarrollo en producto de $\Gamma(2z)$; los factores correspondientes a los valores pares e impares de k, a fin de obtener

$$\frac{1}{\Gamma(2z)} = 2ze^{2\gamma z}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 + \frac{z}{k}\right)e^{-z/k}\prod_{k=0}^{\infty}\left(1 + \frac{z}{k + \frac{1}{2}}\right)e^{-z/(k+1/2)}.$$

Deducir de aquí que la función $R(z) = 2\Gamma(2z)/[\Gamma(z)\Gamma(z + \frac{1}{2})]$ verifica $R(z) = e^{cz}/\Gamma(\frac{1}{2})$, siendo c constante. Haciendo $z = 1$, se obtiene $e^c = 4$, y teniendo en cuenta que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$,

$$\Gamma(2z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z + \tfrac{1}{2}).$$

Esta se conoce como *fórmula de duplicación.*

* 9. **Prolongación analítica.** Supongamos que dos dominios D_1 y D_2 contengan ambos un tercer dominio D, como se muestra en la Figura 9-1. Sea $f_1(z)$ una función analítica en D_1. Entonces, existe a lo sumo una función $f_2(z)$ que sea analítica en D_2 y que coincida con f_1 sobre el dominio común D. En efecto, si $\tilde{f}_2$ es una función analítica en D_2 tal que sobre D $\tilde{f}_2 = f$, entonces $f_2 - \tilde{f}_2 = 0$ en D. Por el Teorema 7.1 del Capítulo 3, lo mismo ocurre, entonces, en todo el dominio D_2. Luego dados f_1, D_1 y D_2, o bien existe exactamente una función f_2 como la descrita arriba, o no existe ninguna en absoluto.

En el caso de que f_2 exista, se dice que f_1 ha sido prolongada analíticamente desde D_1 hasta D_2, y la función f_2 es una prolongación analítica de f_1. Como es evidente, en este caso f_1 es prolongación analítica de f_2

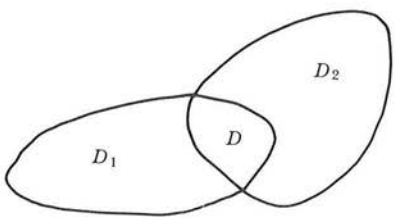


Figura 9-1

Una de las principales aplicaciones de los métodos de prolongación analítica consiste en extender relaciones funcionales establecidas inicialmente sobre un dominio pequeño D_1, a otro mayor, D_2. Conviene elegir el dominio pequeño de forma que las diferentes series e integrales que intervengan en los cálculos sean uniformemente convergentes, y también, de forma que las funciones consideradas carezcan en él de puntos de ramificación. Haciéndolo así, los métodos expuestos a lo largo de este capítulo serán utilizables en el dominio pequeño.

Si se sabe que las funciones consideradas son analíticas, no es preciso comprobar que ambas son idénticas sobre un dominio D contenido en D_1 y en D_2; es suficiente hacerlo sobre un arco de curva o un segmento rectilíneo contenido en dichos dominios. Este hecho se sigue también de resultados obtenidos en el Capítulo 3, y fue ya utilizado en el Capítulo 2 para extender relaciones como la sen $2x = 2$ sen x cos x desde el eje real o todo el plano complejo. Otro ejemplo: la función $\Gamma(x)$ verifica la condición $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ para $x > 1$, como se comprueba integrando por partes en (5.1). Este proceso no es válido cuando $x < 0$, pues la integral resulta ser divergente. Sin embargo, se sigue del Problema 4 de la Sección 5 que $\Gamma(x)$ puede prolongarse a una función meromorfa en todo el plano. Así pues, la condición $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ para $x > 1$ da $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ en todo el dominio de analiticidad.

Los métodos de prolongación analítica requieren una notación más elaborada para poderlos aplicar con éxito a funciones más complicadas que las meromorfas de los ejemplos anteriores. Una función analítica f_1 definida sobre un dominio D_1 se llama elemento de función, y se dirige por (f_1, D_1). En los problemas de prolongación analítica resulta de especial importancia el caso de una sucesión de elementos de función $\{(f_j, D_j)\}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, en la que cada elemento es prolongación analítica del precedente. Una sucesión de este tipo se llama cadena. En una cadena, cada dominio D_j ha de solaparse con el D_{j-1}, para $j = 2,3, \ldots, n$ y la intersección de D_{j-1} con D_j ha de ser un dominio en el cual f_{j-1} y f_j sean idénticas. En la Figura 9-2 se muestran los dominios de una cadena. Siempre es posible, al menos teóricamente, efectuar un proceso de prolongación analítica mediante series de potencias. En este caso, la cadena estará formada por una sucesión de discos solapados.

Si se comienza en un elemento de función (f_1, D_1), entonces, en general, el elemento (f_n, D_n) no está determinado por completo si no se especifica la cadena que lo enlaza con el elemento (f_1, D_1). Por ejemplo, si se considera la función $f(z) = \text{Log } z$ en el dominio D_1 de la Figura 9-3. el valor obtenido en D_4 mediante la cadena D_1, D_2, D_3, D_4 difiere (en $2\pi i$) del obtenido en D_4 por medio de la cadena D_1, D_6, D_5, D_4. Otro modo de expresar lo mismo, en esencia, es decir que la cadena

$$D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6, D_7 = D_1$$

da un elemento de función distinto del primitivo. Los elementos inicial y final son, en este caso, $(\text{Log } z, D_1)$ y $(\text{Log } z + 2\pi i, D_1)$. respectivamente.

Si se obtienen en el entorno de un punto z_0 elementos de función distintos al prolongar analíticamente un mismo elemento de función (f_1, D_1), a lo largo de cadenas apropiadas, se dice que los elementos de función así obtenidos son ramas de la función analítica general definida por el elemento de función (f_1, D_1).

Por ejemplo, $\text{Log } z + 2\pi i$ es una rama en el dominio D_1 de la Figura 9-3, obtenida al prolongar analíticamente el elemento inicial de función $(\text{Log } z, D_1)$, a lo largo de la cadena que se muestra en la figura. Por prolongación a lo largo de otras cadenas se pueden obtener otras ramas diferentes.

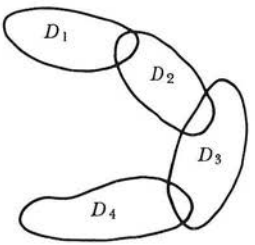


Figura 9-2

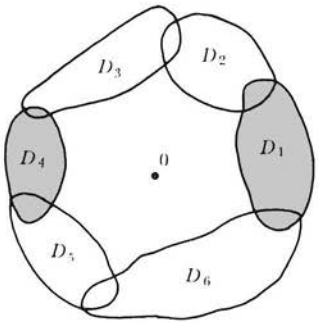


Figura 9-3

El concepto de función analítica general resulta ser el conjunto de todos los elementos de función que pueden obtenerse al prolongar mediante cadenas un elemento dado, de todos los modos posibles. Para determinar cada elemento de función es preciso conocer la cadena que lo enlaza con el elemento original.

El dominio formado por la unión de todos los dominios D_i de la Figura 9-3 rodea al origen, por lo que no es simplemente conexo. En el caso de un dominio simplemente conexo, un importante teorema denominado teorema de monodromía establece que el resultado de efectuar una prolongación es siempre el mismo, independientemente de la cadena utilizada para ello.

Para enunciar el teorema de monodromía es preciso definir qué se entiende por prolongación a lo largo de una línea poligonal. Como se definió en el Capítulo 4, Sección 1, una línea poligonal es una curva $z = \zeta(t)$, $a \leq t \leq b$, en la que el intervalo $[a,b]$ puede dividirse por puntos

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$$

de forma tal que $\zeta(t)$ sea lineal sobre cada intervalo $[t_k, t_{k+1}]$. El recorrido de $z = \zeta(t)$ cuando t recorre un subintervalo $[t_k, t_{k+1}]$ se llama un lado de la línea poligonal, y se denota E_k. Es importante observar que $\zeta(t)$ le asigna un orden bien definido a los lados, lo que da una sucesión $E_1, E_2, \ldots, E_n$. Se muestra en la Figura 9-4 una línea poligonal en la que se especifica la sucesión formada por sus lados, para $n = 8$

Se dice que el elemento de función (f_0, D_0) se ha prolongado analíticamente a lo largo de la línea poligonal, desde $z_0 = \zeta(a)$ a $z_1 = \zeta(b)$, si existe una cadena

$$(f_0, D_0), (f_1, D_1), (f_2, D_2), \ldots, (f_n, D_n)$$

tal que cada dominio D_i contenga al lado E_i, para $i = 0,1,2, \ldots, n$. Se muestra en la Figura 9-5 un ejemplo de prolongación analítica a lo largo de una poligonal, con $n = 8$.

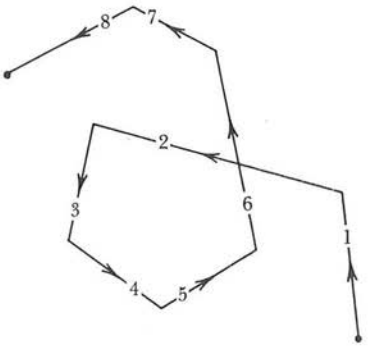


Figura 9-4

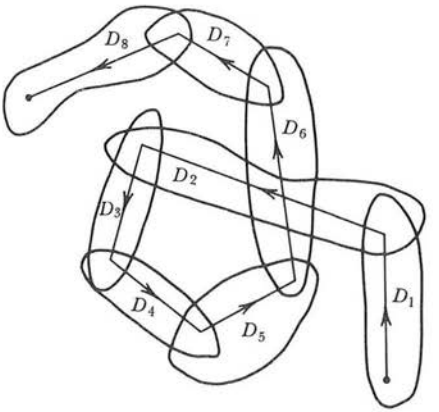


Figura 9-5

TEOREMA 9.1. *(Teorema de monodromía.) Sea D un dominio simplemente conexo, y sea $f_0(z)$ una función analítica en un cierto disco D_0 con centro en un punto z_0 del dominio D. Si es posible prolongar analíticamente el elemento de función (f_0, D_0) a lo largo de toda línea poligonal contenida en D, entonces la prolongación determina una función uniforme en el dominio D.*

Idea de la demostración. El teorema es falso si y solamente si al prolongar (f_0, D_0) desde z_0 hasta un cierto punto z_1 perteneciente a D a lo largo de dos ciertas líneas poligonales P_1 y P_2 se obtienen elementos de función distintos en z_1. Supongamos que ocurra así. Entonces, la prolongación desde z_0 hasta z_1 a lo largo de P_1 seguida por la prolongación del elemento así obtenido desde z_1 hasta z_0, a lo largo de $-P_2$ debe dar en z_0 un elemento de función distinto del $f_0(z)$. De forma muy parecida a la parte de la demostración del teorema de Cauchy (Teorema 1.2 del Capítulo 4) en la que se usa la Figura 1-5 del Capítulo 4, se obtiene entonces que existe un polígono cerrado simple tal que si se prolonga el elemento de función correspondiente a uno de sus vértices a lo largo de todo el polígono hasta regresar al punto de partida, el elemento obtenido es diferente del primitivo. Triangulando este polígono se llega a la conclusión de que al menos para uno de los triángulos que lo componen se tiene esta misma situación. Si este triángulo se descompone en cuatro uniendo los puntos medios de sus lados, como en la demostración del teorema de Cauchy-Goursat (Capítulo 3, Sección 4), la situación prevalece al menos para uno de los cuatro triángulos pequeños. Se repite entonces este proceso indefinidamente, con los que se obtiene una sucesión encajada de triángulos $T_1, T_2, \ldots$ con un punto límite α perteneciente a D, y tales que por prolongación a lo largo de uno cualquiera de ellos se obtiene un elemento de función final distinto del inicial.

Como α pertenece a D, existe un $R > 0$ tal que el disco $|z - \alpha| < R$ está contenido en D. Como es evidente, existe un entero N tal que todos los triángulos $T_n, n \geq N$, están contenidos en el disco $|z - \alpha| < (\frac{1}{4})R$. En uno de los vértices de T_k el elemento de

función tiene una serie de Taylor que ha de ser convergente en un disco de radio $(3/4)R$, el cual contiene con seguridad al disco $|z - \alpha| < (1/4)R$. Así pues, este elemento de función contiene al triángulo T_n por lo que su continuación a lo largo de T_n ha de dar forzosamente el mismo elemento de función. Esta contradicción demuestra el teorema.

Suplemento de problemas al Capítulo 6.

1.1. *Un teorema de Hurwitz.* Supongamos que cada función de la sucesión $\{f_n(z)\}$ sea univalente en el dominio D, y que $f_n(z) \to f(z)$ converja uniformemente en todo disco cerrado $|z - z_0| \leq R$ contenido en D. Entonces $f(z)$, o es constante, o es univalente en D. Idea de la solución: Supongamos que f no sea constante y que $f(\alpha) = f(\beta)$, siendo α y β puntos distintos de D. Entonces existe un $\delta > 0$ tal que $f(z) \neq f(\alpha)$ para $0 < |z - \alpha| \leq \delta$, y tal que $f(z) \neq f(\beta)$ para $0 < |z - \beta| \leq \delta$. Tomemos $m > 0$ de forma que se verifique

$$|f(z) - f(\alpha)| \geq m \quad \text{y} \quad |f(z) - f(\beta)| \geq m$$

sobre las circunferencias $|z - \alpha| = \delta$ y $|z - \beta| = \delta$, respectivamente. Si n es suficientemente grande, entonces se verifica

$$|f_n(z) - f(z)| < m$$

sobre dichas circunferencias. Por el Teorema de Rouché (Capítulo 4, Sección 6) $f_n(z) - f(\alpha)$ tiene al menos un cero en el disco $|z - \alpha| < \delta$ y $f_n(z) - f(\beta)$ tiene al menos un cero en el disco $|z - \beta| < \delta$. Como $f(\alpha) = f(\beta)$, se contradice la hipótesis de que $f_n(z)$ es simple.

1.2. *Subconjuntos compactos.* Sea D un dominio y sea G un subconjunto compacto de D. (G es cerrado y acotado y está contenido en D.) Considerando la función $|\zeta - z|$ con z perteneciente a G y ζ a la frontera de D se puede demostrar que la distancia mínima de G a la frontera de D es un número positivo δ. El número δ también es igual a la distancia de G al complemento de D, es decir, al conjunto de puntos que no pertenecen a D. Estos resultados se siguen de la continuidad de la función $|\zeta - z|$, y aquí los supondremos ya demostrados.

Sea $s_n(z)$ una función analítica en D, y supongamos que $s_n(z) \to s(z)$ uniformemente sobre todo subconjunto compacto de D. Demostrar que $s(z)$ es analítica en D, y $s_n'(z) \to s'(z)$ *uniformemente sobre todo subconjunto compacto de* D. Idea de la solución: La analiticidad de $s(z)$ se sigue del teorema de Morera, como en el Teorema 1.2. Para demostrar la convergencia uniforme de las derivadas, sea G un subconjunto compacto de D y llamamos 4δ a la distancia de G a la frontera de D. (El motivo de que se tome la distancia igual a 4δ, es para evitar fracciones.). Las rectas coordenadas

$$x = \ldots -2\delta, -\delta, 0, \delta, 2\delta, \ldots$$
$$y = \ldots -2\delta, -\delta, 0, \delta, 2\delta, \ldots$$

se cortan en puntos de la forma $(j\delta, k\delta)$, siendo j y k números enteros. (Ver la Figura 9-6.) Si z_j es uno de estos puntos, llamemos D_j al disco de centro z_j y radio δ. La familia de todos los discos D_j recubre completamente el plano. Llamemos

$$D_1, D_2, \ldots, D_m$$

a la colección de discos de esta clase que tienen un punto común (al menos) con G, que podrá por tanto, ser recubierto por m de tales discos G. El disco D_1 está contenido en el disco $|z - z_1| \leq 2\delta$, que es un subconjunto compacto de D. Así pues, $s_n(z) \to s(z)$ uniformemente en $|z - z_1| \leq 2\delta$, y el Teorema 1.2 muestra que $s_n'(z) \to s'(z)$ uniformemente en D_1. Análogamente, $s_n'(z) \to s'(z)$ uniformemente en D_2, y así sucesivamente. Por consiguiente, lo mismo ocurre en la unión de los D_j, de donde se sigue la convergencia uniforme de las derivadas en el compacto G.

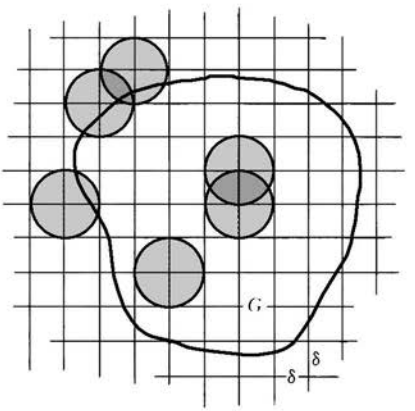


Figura 9-6

2.1. *Repaso.* Sea $P(z)$ un polinomio de grado $n \geq 1$. Demostrar que la ecuación $P(z) = \cot \pi z$ tiene $2N + n + 1$ raíces en el interior del contorno C de la Figura 2-1, para N suficientemente grande. (Denotemos por N_1 y N_2 al número de ceros de $P(z)$ y $P(z) - \cot \pi z$ que son interiores a C, respectivamente, y denotemos por P_1 y P_2 el respectivo número de polos. Si N es suficientemente grande, el Problema 6 de la Sección 2 da $|P(z)| > |\cot \pi z|$ sobre C, y de aquí, como en la demostración del teorema de Rouché, $N_1 - P_1 = N_2 - P_2$.)

2.2. Integrando $(2z + 1)^{-3} \pi \csc \pi z$, demostrar que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

3.1. Demostrar que una serie de potencias puede converger para todos, para algunos, o para ninguno de los puntos de su circunferencia de convergencia. (Considerar los casos $\Sigma z^n/n^2$, $\Sigma z^n/n$, Σz^n.)

3.2. Para este problema es necesario conocer el concepto de límite superior. Demostrar que el radio de convergencia de una serie de potencias con coeficientes a_n viene dado por $1/R = \limsup |a_n|^{1/n}$. Estableciendo convenios apropiados para cubrir los casos

$R = 0$ y $R = \infty$, la fórmula anterior es siempre válida. Deducir de ella el Teorema 3.2, y también, que el radio de convergencia de una serie de potencias es el mismo que el de la serie de sus derivadas o de sus integrales.

3.3. Los números de la sucesión de Fibonacci 1,1,2,3,5,8,... están definidos por la ley de recurrencia $a_0 = a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ para $n \geq 2$. Si

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots + a_n z^n + \cdots$$

demostrar que $f(z) = 1 + zf(z) + z^2 f(z)$. Expresar $f(z) = (1 - z - z^2)^{-1}$ mediante fracciones simples, desarrollar en serie geométrica cada una de estas fracciones simples, y obtener de este modo que

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right].$$

La función $f(z)$ se llama *función generatriz* de la sucesión $\{a_n\}$.

3.4. Las ecuaciones diferenciales de Hermite, Chebyshev y Legendre son, respectivamente,

$$Y'' + 2mY = 2zY', \quad (1 - z^2)Y'' + m^2 Y = zY',$$
$$(1 - z^2)Y'' + m(m + 1)Y = 2zY'$$

donde m es una constante compleja. (a) Obtener soluciones en serie de potencias que verifiquen las condiciones $Y(0) = 1$, $Y'(0) = 0$. (b) Hallar soluciones que verifiquen $Y(0) = 0, Y'(0) = 1$. (c) Demostrar que la ecuación de Laguerre $zY'' + mY = (z - 1)Y'$ no posee ninguna solución que verifique las condiciones anteriores cuando $m \neq 0$, pero que en cambio sí posee una solución desarrollable en serie de potencias que verifica $Y(0) = 1$, $Y'(0) = -m$.

3.5. Mostrar la manera de obtener por recurrencia los coeficientes de la serie

$$\pi z \cot \pi z = a_0 + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \cdots$$

(La igualdad anterior puede escribirse

$$\cos \pi z = \frac{\operatorname{sen} \pi z}{\pi z}(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots)$$

y también, tras utilizar la serie de Taylor de sen πz cos πz,

$$1 - \frac{\pi^2 z^2}{2!} + \cdots = \left(1 - \frac{\pi^2 z^2}{3!} + \frac{\pi^4 z^4}{5!} - \cdots\right)(a_0 + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \cdots).$$

Se igualan los coeficientes de $1, z^2, z^4, \ldots$ en cada miembro; ver el Problema 12 de la Sección 6 del Capítulo 3.)

3.6. Integrando las funciones $z^{-2}\pi \cot \pi z$ o $z^{-4}\pi \cot \pi z$, demostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Obsérvese que los residuos en el punto $z = 0$ pueden hallarse teniendo en cuenta el Problema 3.5.

3.7. Sin recurrir a la integración, demostrar que una serie de potencias puede derivarse término a término dentro de su círculo de convergencia. Solución: Supongamos que $\alpha = 0$, y sea z_0 un punto cualquiera que verifique $|z_0| < R$. Sea $|z_0| < R_0 < R_1 < R$. Si $z \to z_0$, puede suponerse que $|z| < R_0$. Entonces, para $z \neq z_0$,

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z^{n-1} z_0 + \cdots + z z_0^{n-1}).$$

Como $|z_0| < R_0$ y $|z| < R_0$, el término general verifica

$$|a_n(z^{n-1} z_0 + \cdots + z z_0^{n-1})| \leq |a_n|(R_0^n + \cdots + R_0^n) = n|a_n| R_0^n.$$

La convergencia de la serie en R_1, para n suficientemente grande de $|a_n R_1^n| < 1$, y de aquí,

$$n|a_n| R_0^n = n|a_n| R_1^n \left(\frac{R_0}{R_1}\right)^n \leq n\rho^n$$

siendo $\rho = R_0/R_1 < 1$. Por el criterio del cociente, la serie de término general $M_j = j\rho^j$ es convergente, lo que asegura que la serie que representa el cociente de incrementos es uniformemente convergente. Como los términos de esta serie son funciones continuas, el Teorema 1.1 da

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z_0^{n-1}.$$

3.8. *Funciones simples.* Supongamos que $f(z)$ sea analítica en el disco $|z| < R$, que $|f'(0)| = a_1 \neq 0$, y que $0 < R_0 < R$. Al igual que en el Problema 3.7

$$\left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right| \geq |a_1| - \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| R_0^n$$

para $|z| < R_0$, $|z_0| < R_0$, $z \neq z_0$. Demostrar que el segundo miembro es positivo cuando $R_0 < \epsilon$, para ϵ suficientemente pequeño, y que por consiguiente, la aplicación $w = f(z)$ es simple en el disco $|z| < \epsilon$. Se dio otra demostración en la Sección 6 del Capítulo 5.

4.1. *Teorema del valor medio de Gauss.* Supongamos que la función $u(r,\theta)$ sea continua para $r \leq R$ y armónica para $r < R$. Mediante la fórmula de Poisson, demostrar que

$$u(0,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(R,\theta)\, d\theta.$$

Con otras palabras, el valor de una función armónica en el centro de una circunferencia es el valor medio de sus valores sobre la circunferencia.

4.2. *Desigualdad de Harnack.* Si la función $u(r,\theta)$ del Problema 4.1 verifica $u(R,\phi) = u(\phi) \geq 0$, y si $u(r,\theta) \not\equiv 0$, demostrar que

$$\frac{R-r}{R+r} \leq \frac{u(r,\theta)}{u(0,\theta)} \leq \frac{R+r}{R-r}, \qquad 0 \leq r < R.$$

(Obsérvese que el integrando de (4.11) está comprendido entre

$$\frac{R^2-r^2}{(R+r)^2}u(\phi) \quad \text{y} \quad \frac{R^2-r^2}{(R-r)^2}u(\phi).$$

Se multiplica por $1/2\pi$, se integra desde 0 hasta 2π, y se usa el Problema 4.1)

4.3. *Desigualdad de Schwarz.* [1] Sean $a_i \geq 0$, $b_i \geq 0$ y $a > 0$, $b > 0$ tales que

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2, \qquad b^2 = b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2.$$

Sumando las expresiones $(ba_i - ab_i)^2 = b^2a_i^2 - 2aba_ib_i + a^2b_i^2$ desde $i = 1$ hasta n, deducir que

$$b^2a^2 - 2ab\sum_{i=1}^{n} a_ib_i + a^2b^2 \geq 0$$

y dividiendo por $2ab$,

$$\sum_{i=1}^{n} a_ib_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{1/2}.$$

(La desigualdad es trivialmente válida si $a = 0$ o si $b = 0$.) Tomando $a_i = |\alpha_i|$ y $b_i = |\beta_i|$, generalizarla para valores complejos de α_i y β_i.

[1] En realidad, esta desigualdad se debe a Cauchy.

4.4. Supongamos que $f(z)$ sea analítica en el disco $|z| < 1$, y que verifique en él $|f(z)| \leq 1$. Demostrar mediante la identidad de Parseval que $|f(0)|^2 + |f'(0)|^2 \leq 1$, y deducir de aquí que para todo valor real de t,

$$|f(0)| \cos t + |f'(0)| \operatorname{sen} t \leq 1$$

(Usar la desigualdad de Schwarz con $n = 2$.)

4.5. Supongamos que $|f(0)| = 0$ y $|f'(0)| = a > 0$. Si $f(z)$ es analítico en el disco $|z| < 1$ y verifica en él $|f(z)| \leq 1$, demostrar que los coeficientes de su desarrollo en serie de potencias verifican $|a_2|^2 + |a_3|^2 + \cdots \leq 1 - a^2$, y de aquí, por la desigualdad de Schwarz,

$$\left|\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n\right|^2 \leq \left(\sum_{n=2}^{\infty} |a_n|^2\right)\left(\sum_{n=2}^{\infty} r^{2n}\right) \leq (1 - a^2)\frac{r^4}{1 - r^2}$$

para $|z| = r < 1$. Deducir, en consecuencia, que

$$|f(z)| \geq ar - \left(\frac{1 - a^2}{1 - r^2}\right)^{1/2} r^2.$$

4.6. *Teorema de Landau.* Supongamos que $f(z)$ cumpla las condiciones del Problema 4.5. y sea $A = (16 - 12a^2)^{1/2}$, con lo cual $2 \leq A < 4$. Siendo $|w| < a^2/A$, demostrar que la ecuación $f(z) = w$ tiene una y solamente una solución z tal que $|z| < 2a/A$. (Se aplica el teorema de Rouché a $f(z)$ y $f(z) - w$ en el disco $|z| < r_0$, tomándose r_0 de forma que

$$\left(\frac{1 - a^2}{1 - r_0^2}\right)^{1/2} r_0^2 = \frac{1}{2} a r_0.$$

Entonces el Problema 4.5 da $|f(z)| \geq ar_0/2$ sobre la circunferencia $|z| = r_0$.)

5.1. Demostrar que las integrales siguientes representan funciones analíticas en las regiones $|\operatorname{Re} z| < 1$, $\operatorname{Re} z > 1$, y $0 < \operatorname{Re} z < 1$, respectivamente:

$$\int_0^{\pi/2} (\tan t)^z \, dt, \quad \int_0^{\infty} \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} \, dt, \quad \int_0^{\infty} t^{z-1} \cos t \, dt.$$

(En el tercero de estos casos se integra por partes sobre $[1,b]$ antes de hacer tender $b \to \infty$.)

5.2. (a) Sea $\operatorname{Re} s > 0$ y $n = 1,2,3,\ldots$. Haciendo $nu = t$ obtener la primera de las fórmulas siguientes, y deducir de ella la segunda:

$$\int_0^{\infty} e^{-nu} u^{s-1} \, du = \frac{\Gamma(s)}{n^s}, \quad \Gamma(s) \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} = \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-Nu}}{1 - e^{-u}} e^{-u} u^{s-1} \, du.$$

(b) En la región $\operatorname{Re} s = \sigma > 1$ se usa que $e^u - 1 \geq u$ y $|u^{s-1}| = u^{\sigma-1}$ para obtener

$$\left|\int_0^\infty \frac{e^{-Nu}}{1-e^{-u}} e^{-u} u^{s-1}\, du\right| \leq \int_0^\infty \frac{e^{-Nu}}{u} u^{\sigma-1}\, du = \frac{1}{N^{\sigma-1}} \int_0^\infty e^{-v} v^{\sigma-2}\, dv.$$

Cuando $N \to \infty$ la expresión anterior tiende hacia 0. Deducir de aquí la fórmula (5.3).

5.3. Sea, para $n = 1, 2, 3, \ldots$ $u_n(r,\theta)$ una función armónica en el disco $|z| < R_0$ y supongamos que $u_n(r,\theta) \to u(r,\theta)$ uniformemente en todo disco $|z| \leq R$, siendo $R < R_0$. Demostrar que $u(r,\theta)$ es armónica en $|z| < R_0$. Idea de la solución: Puesto que $u_n(r,\theta)$ es armónica para $|z| \leq R$, por el teorema de unicidad, ha de venir dada por la fórmula de Poisson,

$$u_n(r,\theta) = \int_0^{2\pi} K(r,\theta - \phi) u_n(R,\phi)\, d\phi.$$

Cuando $r \leq R_1 < R$, siendo R_1 fijo, $K(r,\theta - \phi)$ es acotada y los integrandos forman una sucesión uniformemente convergente. Por el Teorema 1.1 el límite del segundo miembro cuando $n \to \infty$ es la integral de Poisson de $u(R,\phi)$, y por hipótesis el límite del primer miembro cuando $n \to \infty$ es $u(r,\theta)$ lo cual demuestra que $u(r,\theta)$ viene dada por la fórmula de Poisson para $r < R_1$, y que por consiguiente, es armónica para $r < R_1$.

5.4. Utilizando el resultado del Problema 5.3. demostrar que Si una sucesión de funciones armónicas converge uniformemente sobre un dominio D, entonces su límite es una función armónica en D.

5.5. Para este problema se requiere conocer las integrales dobles y las integrales reiteradas. Sea C como en la demostración del Teorema 5.4., por lo que en virtud de la fórmula integral de Cauchy

$$F(z,t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{F(\zeta,t)}{\zeta - z}\, d\zeta, \qquad |z - \alpha| < R.$$

Obtener entonces una fórmula que dé la función $f(z)$ del Teorema 5.4 como el valor de una integral doble. Considerando el cociente, $[f(z+h) - f(z)]/h$ como en la demostración del Teorema 5.2 del Capítulo 3, establecer el Teorema 5.4.

5.6. Sea $F(z,t)$ función continua de t para $a \leq t < \infty$, y definamos

$$f_n(z) = \int_a^{b_n} F(z,t)\, dt, \qquad f(z) = \int_a^\infty F(z,t)\, dt.$$

Si la integral impropia existe en el sentido que se explicó en el Capítulo 4, demostrar que $f_n(z) \to f(z)$ para toda sucesión de números reales $\{b_n\}$, $b_n \to \infty$, $b_n > a$. Recíprocamente, si $f_n(z) \to f(z)$ para toda sucesión $\{b_n\}$, de esta clase, entonces la integral impropia existe y es igual a $f(z)$.

6.1. (a) Siendo $x > 0$ y $1 > \operatorname{Re} \alpha > 0$, integrar alrededor de un cuadrante con escotaduras apropiadas y demostrar que

$$\int_0^\infty e^{itx}t^{\alpha-1}\,dt = x^{-\alpha}e^{\pi i\alpha/2}\,\Gamma(\alpha).$$

(b) Siendo $x > 0$ y $1 > \operatorname{Re}\alpha > 0$, como antes, definamos

$$f(x) = \int_1^\infty e^{itx}t^{\alpha-1}\,dt, \qquad g(x) = \int_0^1 e^{itx}t^{\alpha-1}\,dt.$$

Integrando por partes, estudiar el comportamiento de $f(x)$ para x suficientemente grande, y hallar de esta forma cuál será el comportamiento de $g(x)$ para valores grandes de x.

7.1. Sea $f(z) \not\equiv 0$ una función analítica en el disco $|z| < 1$, que tenga los ceros $\alpha_k \neq 0$. Si se verifica $|f(z)| < 1$ para $|z| < 1$, aplicar la desigualdad de Jensen (Capítulo 4, Problema 4.2) para demostrar que el producto $|\alpha_1||\alpha_2||\alpha_3|\cdots$ es convergente. Deducir de aquí

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1 - |\alpha_k|) < \infty. \qquad (*)$$

7.2. *Productos de Blaschke.* Sea $\{\alpha_k\}$ una sucesión de números complejos tal que $0 < |\alpha_k| < 1$ y que verifique (*). Demostrar que

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty}\frac{z - \alpha_k}{z - 1/\bar{\alpha}_k}$$

representa una función analítica en el disco $|z| < 1$, cuyos ceros se hallan en los puntos α_k. Demostrar también que $|f(z)| < 1$.

8.1. Aplicando el Teorema 8.5 al resultado del Ejemplo 8.1, obtener la fórmula

$$\frac{\operatorname{sen}\pi z}{\operatorname{sen}\pi z_0} = \frac{z}{z_0}\prod_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{z - n}{z_0 - n}e^{(z-z_0)/n}$$

denotando la comilla que es preciso omitir el término correspondiente a $n = 0$. Multiplicando por sen πz_0 y haciendo tender $z_0 \to 0$, obtener un desarrollo en producto para πz.

8.2. Sea $g(z)$ una función entera con ceros simples en los puntos α_k. Sea $h(z)$ una función meromorfa que tenga polos simples de residuo ρ_k en los puntos α_k y que no tenga ya ninguna otra singularidad finita. Demostrar que $f(z) = g(z)h(z)$ tiene en los puntos α_k singularidades evitables, y que si se define $f(\alpha_k) = g'(\alpha_k)\rho_k$, entonces $f(z)$ es una función entera.

8.3. *Interpolación.* Sea $\{\alpha_k\}$ una sucesión cualquiera de números complejos con la propiedad $|\alpha_k| \to \infty$, y sea $\{\beta_k\}$ una sucesión arbitraria de números complejos. Demostrar que existe una función entera $f(z)$ tal que $f(\alpha_k) = \beta_k$. (Ver el Problema 8.2).

8.4. La descomposición que se da en el Teorema 8.3 no es única. Clasificando los productos de Wierstrass en orden creciente de complejidad, y exigiendo que el producto

$P(z)$ sea el producto convergente más sencillo posible asociado a las α_k, explicar como podría enunciarse un teorema de unicidad para aquélla descomposición. El producto (único) que se obtendría de esta forma se llama *producto canónico.*

9.1. Las funciones siguientes son todas ellas analíticas en el disco $|z| < 1$, y se prolongan después como funciones analíticas generales. ¿Cuáles de entre ellas determinan una sola función entera, cuáles, más de una función entera; y cuáles, una o más funciones analíticas multiformes?

$$(z^{1/2})^2, \quad (z^2)^{1/2}, \quad \cos z^{1/2}, \quad (1 - z)^{1/3}, \quad (e^z)^{1/3}, \quad (\cos z)^{1/2}.$$

9.2. Sea $f(z)$ una función entera de período 2π tal que $|f(z)| \leq Me^{c|z|}$ para ciertas constantes M y c. Demostrar que $f(z)$ es de la forma

$$f(z) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikz}$$

siendo las a_k constantes complejas. (La función $g(w) = f(i \log w)$ es independiente de la rama de $\log w$ que se considere, por ser f periódica de período 2π y por consiguiente es analítica en $0 < |w| < \infty$. Si $n > c$, demostrar que $w^n g(w)$ tiene solamente una singularidad evitable en el punto 0, y que en el ∞ su comportamiento es análogo al de la función $|w|^{2n}$. Por consiguiente, $w^n g(w) = P(w)$, donde P es un polinomio.)

9.3. *Frontera natural de una función analítica.* Si $f(z)$ es analítica en un dominio D, puede darse el caso de que cada punto de la frontera de D sea un punto singular, en cuyo caso es imposible prolongar f a un dominio estrictamente mayor que D. En este caso se dice que la frontera de D es una frontera natural de f. Demostrar que la circunferencia $|z| = 1$ es una frontera natural de las siguientes funciones:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}, \qquad g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n!}}{n!}.$$

Obsérvese que la función g tiene un desarrollo en serie que converge e^z en el disco $|z| \leq 1$, casi tan rápidamente como el desarrollo en serie de $g(z)$, y así pues, $g(z)$ no sólo es analítica en $|z| < 1$, sino que también es continua sobre $|z| \leq 1$. Como $zg'(z) = f(z)$, es suficiente probar que $|z| = 1$ es una frontera natural de f. La ecuación $f(z) = zg'(z)$, o también, el criterio del cociente, permite asegurar que f es analítica para $|z| < 1$. Supongamos que exista un punto α de la circunferencia $|z| = 1$ que no sea un punto singular de $f(z)$. Entonces $f(z)$ puede prolongarse analíticamente a un entorno de α, y por tanto, existe un arco de la circunferencia $|z| = 1$ de longitud $\delta > 0$ sobre el cual $f(z)$ es analítica. Tomemos un entero positivo $q > 2\pi/\delta$. Considerando la sucesión $0, q, 2q, 3q, \ldots$, se halla un punto $\beta = \exp(2\pi i p/q)$, con p entero, que se encuentra en el arco de analiticidad. Entonces $\beta^q = 1$, y por consiguiente, $\beta^{n!} = 1$ para $n \geq q$. Luego, para $r < 1$,

$$f(r\beta) = \sum_{n=1}^{q-1} r^{n!}\beta^n + \sum_{n=q}^{\infty} r^{n!}.$$

La ecuación anterior muestra que

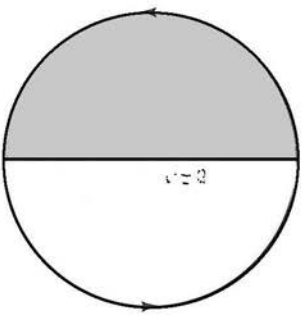
$$|f(r\beta)| \geq \sum_{n=q}^{\infty} r^{n!} - (q-1)$$

y $|f(r\beta)| \to \infty$ cuando $r \to 1-$. Entonces f no puede ser analítica en el punto β.)

9.4. *Principio de simetría para funciones armónicas.* Supongamos que $v(x,y)$ sea armónica en el semidisco $|z| < R$, $y > 0$ y continua en el semidisco cerrado (ver la Figura 9-7). Supongamos que $v(x,0) = 0$, y extendamos v por simetría a $y < 0$. es decir,

$$v(x,y) = -v(x,-y)$$

para $y \leq 0$, $|z| \leq R$. Si se define $\tilde{v}(x,y)$ mediante la fórmula de Poisson utilizando en ella los mismos valores de contorno de v, demostrar que en la frontera de ambos semidiscos $\tilde{v} = v$. Por tanto, $\tilde{v} = v$ en todo el disco $|z| < R$, y por consiguiente v es armónica en el disco $|z| < R$.



El razonamiento anterior demuestra que la hipótesis de continuidad de $f = u + iv$ en el método de prolongación analítica de Schwarz es más restrictiva de lo necesario (Capítulo 5, Sección 7.) Por ejemplo, para prolongar la función dada al otro lado de la recta $y = 0$, es suficiente que v verifique las hipótesis anteriores, siendo innecesaria la hipótesis de continuidad de u. Una vez que se sabe que v es armónica no hay dificultad en construir una conjugada armónica u, ni en reconstruir f a partir de v.

Notas

(1) Capítulo 1, Sección 1. En Análisis se considera que dos polinomios P y Q son iguales cuando $P(z) = Q(z)$ para todo número complejo z. Con frecuencia se escribe solamente $P(z) = Q(z)$, sobrentendiéndose la frase "para todo z". No es difícil demostrar que $P = Q$ en este sentido si y solamente si los coeficientes de ambos polinomios son idénticos, por lo que la definición analítica es constante con la definición algebraica de igualdad de polinomios (ver la Sección 5, Problema 6.) La equivalencia de las dos definiciones depende crucialmente del hecho de que el cuerpo de los números complejos tiene característica 0.

(2) Capítulo 2, Sección 3, Problema 1. La definición de α^z dada aquí no se utiliza cuando $\alpha = e$. Es decir, e^z denota la función que se definió en la Sección 2, y no denota, en cambio, la función multiforme

(3) Capítulo 2, Sección 6. Una base más satisfactoria de la teoría de flujo de fluidos la da la fórmula

$$\int_C f'(z)\,dz = \int_C \mathbf{v}\cdot\mathbf{t}\,ds + i\int_C \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,ds$$

que se establece en el Problema 2.4 del Capítulo 3. La discusión presentada en el texto está parcialmente condicionada por el hecho de que en el Capítulo 2 aún no se dispone de las integrales curvilíneas ni del teorema de Cauchy.

4) Capítulo 2, Sección 6. Se dan otras aplicaciones en Lamb, *Hydrodynamics,* Dover Publications, New York, 1945, y Milne-Thompson, *Theoretical Hydrodynamics,* Macmillan and Company, London, 1955. Un teorema de unicidad de flujos se da en Pennisi, *Elements of Complex Variables,* Holt, Rinehart and Winston, New York, 1966.

(5) Capítulo 3. Sección 1. El "conjunto de puntos ocupados por la curva" $z = \zeta(t)$ es, por definición, $\{\zeta(t) \mid a \leq t \leq b\}$.

(6) Capítulo 3, Sección 2. Los autores han explicado análisis de variable compleja durante muchos años, durante los cuales han utilizado cierto número de excelentes textos. Como es natural, la experiencia adquirida en el proceso ha influido en nuestra presente exposición del tema. Así, por ejemplo, para la deducción de (2.1) nos hemos guiado por Ahlfors, *Análisis de variable compleja,* Editorial Aguilar, Madrid, 1966.

(7) Capítulo 3, Sección 5, Problema 8. Una función $\zeta(t)$ es *continua a trozos* en el intervalo $a \leq t \leq b$ si existe una sucesión finita de puntos $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ tal que $\zeta(t)$ sea continua en cada subintervalo $t_k < t < t_{k+1}$. Se requiere además que

$\zeta(t)$ tenga límite finito cuando $t \to t_k$ y $t \to t_{k+1}$ según valores de este subintervalo. Así pues, las funciones continuas a trozos son integrables y acotadas.

(8) Capítulo 3, Sección 8. Un punto de partida para demostrar el teorema de Picard lo constituye el teorema de Landau, Capítulo 5, Sección 7. Se puede hallar una demostración completa en esta misma línea en Titchmarsh, *The Theory of Functions,* Oxford University Press, Oxford, 1939 (reimpresa en 1960) y también en Hille, *Analytic Function Theory,* Volumen II, Blaisdell Publishing Company, New York, 1962.

(9) Capítulo 3, Sección 10, Problema 1.3. La deducción de las leyes de Kepler y de sus recíprocas utilizando funciones de variable compleja puede verse en Sokolnikoff y Redheffer, *Mathematics of Physics and Modern Engineering,* McGraw-Hill Book Company, New York, 2nd Edition, 1966.

(10) Capítulo 4, Sección 1. La demostración del teorema de la curva de Jordan para polígonos, y la existencia de triangulaciones puede verse en Hille, *Analytic Function Theory,* Volumen I, Blaisdell Publishing Company, New York, 1959.

(11) Capítulo 4, Sección 2. El teorema de la curva de Jordan se establece con generalidad suficiente para las necesidades de este libro en Paderson, "The Jordan Curve Theorem for Piecewise Smooth Curves", *The American Mathematical Monthly, 76 (Junio-Julio de 1969). El caso general se trata en Newmann, Elements of the Topology of Plane Point Sets,* Cambridge University Press, Cambridge, 1954.

(12) Capítulo 4, Sección 7. Las ecuaciones de Bode pueden verse en Guillemin, *The Mathematics of Circuit Analysis,* John Wiley & Sons, New York, 1949. La fórmula de inversión de Bromwich y un teorema de unicidad se demuestran en Widder, *The Laplace Transform,* Princeton University Press, Princeton, 1946.

(13) Capítulo 4, Sección 7. La transformación de Hilbert es un ejemplo de integral singular, pues su integrando se hace infinito en un punto del camino de integración. Se pueden formar integrales singulares cuando el camino de integración sea un contorno simple arbitrario, que no tiene por qué ser el eje y. Una discusión elemental de las integrales singulares se da en Levinson, "Simplified Treatment of Integrals of Cauchy Type, the Hilbert Problem, and Singular Integral Equations", *SIAM Review,* 7 (Oct. 1965).

(14) Capítulo 4, Sección 9. El estudio de integrales sobre curvas cerradas que limitan una región corresponde a una rama de la Topología que se conoce como Teoría de homología. La demostración de la forma fuerte del teorema de Cauchy que se esquematiza en la Sección 9 es en realidad una demostración homológica, y lo mismo puede decirse de la demostración del teorema de Cauchy-Goursat que se da en el Capítulo 3. Un desarrollo general de la Teoría de homología puede verse en Ahlfors (ver la Nota 6.)

(15) Capítulo 4, Sección 10. El estudio de la deformación continua de curvas constituye el objeto de una rama de la Topología que se conoce como Teoría de homotopía. La demostración del principio de deformación que se esquematiza en la Sección 10 es de tipo homotópico. También es posible darle al teorema de mondromía forma homotópica (Capítulo 6, Sección 9.) Para una discusión unificada de estos teoremas, ver Redheffer, "The Homotopy Theorems of Function Theory", *The American mathematical Monthly,* 76 (Ago-Sept. 1969).

(16) Las Secciones 1 a 5 del Capítulo 5 pueden verse antes que los Capítulos 3 y 4, de los cuales tan sólo se precisan el concepto de arco y la regla de la cadena. En el Capítulo 5 un arco es una curva diferenciable, como se indica ya en la Sección 1. La regla de la cadena se demuestra en la Sección 1 del Capítulo 3, Problema 9.

(17) Capítulo 5, Sección 3. La resolución de problemas de contorno por medio de representación conforme se ilustra brevemente en los Problemas 3.1 – 3.6 y 4.1 – 4.4, al final de este capítulo. Se pueden hallar otras aplicaciones en Churchill, *Teoría de funciones de variable compleja,* Ediciones del Castillo, Madrid, 1965.

(18) Capítulo 5, Sección 3, Problema 5. La discusión dada en el Problema 6.1 del Capítulo 2 es en algunos aspectos más completa, pero no pone de manifiesto la relación con la representación conforme.

(19) Capítulo 5, Sección 4. La demostración de la fórmula de Schwarz-Christoffel según las líneas generales expuestas aquí puede verse en Hille, Volumen II (ver la Nota 8). Una demostración ligeramente diferente se da en Ahlfors (ver Nota 6.).

(20) Capítulo 5, Sección 5. La paraconjugación se discute en Belevitch, *Classical Network Theory,* Holden-Day, San Francisco, 1968. Las funciones positivas reales se discuten en Belevitch y Guillemin (ver Nota 12.).

(21) Capítulo 5, Sección 8. Esta Sección, juntamente con los Problemas 8.1 y 8.2 pueden servir de ayuda para dar parte de la demostración del teorema de Riemann. Se dan demostraciones completas de este teorema en casi todas las obras de Análisis de variable compleja de carácter superior, entre las que se encuentran las mencionadas en este texto.

(22) Capítulo 6, Sección 5. La función gamma, así como otras funciones especiales, se estudian desde el punto de vista del Análisis de variable compleja en Copson, *Theory of Functions of a Complex Variable,* Clarendon Press, Oxford, 1935, (reimpresión de Oxford University Press, 1960.).

(23) Capítulo 6, Sección 6. Una desigualdad como la $|\arg z| \leq \pi - \delta$ automáticamente especifica la rama de $\arg z$ utilizada.

(24) Capítulo 6, Sección 5, Problemas 7-10. Debe observarse que en estos tres problemas consecutivos no solamente se establece la existencia del límite $u(r,\theta_0) \to \tilde{u}(\theta_0)$ cuando $r \to R-$, a lo largo de un radio, sino que se puede hacer tender (r,θ) hacia (R,θ_0) en forma totalmente arbitraria sin más que respetar la condición $r \leq R$. Esta consideración es necesaria para poder afirmar la continuidad en el disco $|z| \leq R$. Asimismo es posible refinar los Problemas 6-9 de la Sección 7 del Capítulo 4, para permitir que $(x,y) \to (x_0,y_0)$ a lo largo de cualquier camino contenido en la región $\operatorname{Re} z \geq 0$.

(25) Capítulo 6, Sección 7. Más explícitamente, $\log_j z = \operatorname{Log} z + 2\pi i N_j$, siendo N_j un número entero para cada valor de j. Esta notación no es contradictoria con la introducida en el Capítulo 2, pues allí utilizamos Log_j en lugar de $\log_j$.

(26) Capítulo 6, Sección 8. El desarrollo de Mittag-Leffler es mucho más general que el producto de Weierstrass, el cual puede obtenerse aplicándole aquél a la función $f'(z)/f(z)$(ver el Teorema 8.5.) Análogamente, del teorema de Mittag-Leffler para un dominio general se deduce un teorema de desarrollo en producto de Weierstrass en el dominio D.

(27) Capítulo 6, Sección 9. No hay pérdida de generalidad al asociar cada lado E_k con un solo dominio D_k, pues si se usan varios dominios para efectar la prolongación a lo largo de E_k su unión da un solo dominio.

(28) Capítulo 6, Sección 9, Problema 9.3. Todo dominio D es la región de existencia de una cierta función analítica; es decir, dado D existe una función f que es analítica en D y que no puede prolongarse al exterior de D. Este resultado se demuestra utilizando un producto de Weierstrass para D (ver la Nota 26.).

Respuestas

Capítulo 1

Sección 1, página 6.

1. $1, -2, 3 + 2i, 4 - i, 5 + i.$
4. $2i, -32 + i32, -1 + i2, x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3), x^2 + y^2,$
$$\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + i\frac{-2xy}{x^2 + y^2}, \frac{2x(1 - y)}{x^2 + (1 - y)^2} + i\frac{x^2 - (1 - y)^2}{x^2 + (1 - y)^2}.$$

Sección 2, página 14.

1. $1, (x - 1)^2 + y^2, (x^2 + y^2)^2, \left[\frac{(x + 1)^2 + y^2}{(x - 1)^2 + y^2}\right]^{1/2}, 1.$
3. Solución parcial: (a) recta, semiplano, circunferencia, región exterior a un disco, recta, semiplano, corona circular; (b) circunferencia, disco, recta, contorno de un cuadrado.
4. Solución parcial: traslación, traslación, homotecia, homotecia y traslación, simetría y traslación.
5. $11^2 + 29^2$. 6. $(\text{Re}\,\alpha)/(\text{Im}\,\alpha)$. 7. Circunferencia o un punto. 11. (b) sí.

Sección 3, página 21.

1. (a) $1, (-1 \pm i\sqrt{3})/2; -2, 1 \pm i\sqrt{3}; -i, (i \pm \sqrt{3})/2.$
(b) $z = \pm 2, \pm 2i, (1 \pm i\sqrt{3})/2, -1.$
2. $(\pm 1 \pm i)/\sqrt{2}; \pm\sqrt[4]{2}\,(\cos \pi/8 + i \operatorname{sen} \pi/8)$; (igual a)$/\sqrt{2}$;
$1, -1, (\pm 1 \pm i\sqrt{3})/2; \pm 2 \pm 2i; 2^{4/3}, 2^{1/3}(-1 \pm i\sqrt{3}).$
3. Giro alrededor de $z = 0$ de ángulo $-90°, -45°, 30°.$
5. (a) $\operatorname{sen} 3\theta = 3\cos^2\theta \operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}^3\theta.$

Sección 4, página 29.

1. Solución parcial: $f[f(z)] = z + 2, z^4, z, -1/z$.
2. (i), (iii), (iv), (v).
3. Solución parcial: $\theta = 2\pi/3, \pi/2, \pi/3$.
4. Solución parcial: $g(w) = -w, 1/w, (1 - w)/(1 + w), w^{1/2}, w^{1/3}$, $(w - i)^{1/4} + 1$.

Sección 5, página 36.

1. (b), (c). Singularidades evitables carece; ∞; carece; ∞; -1, ∞; ∞; 0, 1, ∞. Definición apropiada: $-$; 0; $-$; 0; 1, 1; 1; 0, ¼, 0.
2. $1, 4z_0^3, -1/z_0^2, -2/z_0^3$.
4. Solución parcial: Los dominios de definición de las funciones ii, iii, iv no son conjuntos conexos; por consiguiente no son dominios en el sentido de la Sección 4.
7. $(z^2 + 1)(z + 1)(z - 1)(z^2 + z\sqrt{2} + 1)(z^2 - z\sqrt{2} + 1)$.
8. Solución parcial Si $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ son las n raíces de 1, entonces $\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n = 0$, $\omega_1\omega_2 \cdots \omega_n = (-1)^{n+1}$.

Capítulo 2

Sección 1, página 48.

1. Solución parcial: $10(2z + 3)^4, 2i/(z + i)^2$, $(2z + z^2)^3(1 + z^3)(14z^4 + 20z^3 + 8z + 8)$.
2. (a) ninguna de ellas. (b) las dos.

Sección 2, página 56.

1. -1, $\cos 1 + i \operatorname{sen} 1$, $i \operatorname{senh} \pi$, $\sinh 1 \cos 1 + i \cosh 1 \operatorname{sen} 1$.
3. (b) Una circunferencia de radio R y centro en z_0.
10. (a) $\pi/2 + k\pi$, $ik\pi$, $i\pi/2 + ik\pi$, $k\pi$, $ik\pi$; (b) $2k\pi$, $2ik\pi$, $2ik\pi$, $k\pi$, $ik\pi$.
14. $i\pi/2 + 2k\pi i$, $\operatorname{Log} 2 + i\pi/3 + 2k\pi i$, $\pi/2 + 2k\pi \pm i \operatorname{Log}(2 + \sqrt{3})$, $\pi/2 + k\pi \pm i \operatorname{Log}(\sqrt{2} - 1)$.

Sección 3, página 64.

3. 1a fila: $-\pi i/2 + 2ik\pi$, $\frac{1}{2} \operatorname{Log} 2 + i\pi/4 + 2k\pi i$, $3 \operatorname{Log} 2 + i\pi/2 + 6k\pi i$, $3 \operatorname{Log} 2 + i\pi/2 + 2k\pi i$, $(\pi i/2) \operatorname{Log} 2 - \pi^2/4 - 2k\pi^2 + 2n\pi i$.

   2a fila: $e^{-\pi/2}e^{2k\pi} - 1$, $e^{\pi \operatorname{Log} 3}e^{2ik\pi^2}$, $e^{\pi i \operatorname{Log} 2}e^{-2k\pi^2}$, $e^{(1+i)[(\operatorname{Log} 2)/2 + i\pi/4]}e^{-2k\pi}$, $e^{2k\pi}$
4. $(1 + i)/\sqrt{2}$; $1 + 2k\pi i$; $-i \operatorname{Log}(\sqrt{2} - 1) + 2k\pi$, $\pi + i \operatorname{Log}(\sqrt{2} - 1) + 2k\pi$; $\pi/4 + k\pi$; sin solución.
9. Solución parcial: $|z^i| = e^{-2k\pi - \theta}$, $z \neq 0$; $|i^z| = e^{-y(\pi/2 + 2k\pi)}$; $|z^z| = e^{x \operatorname{Log} r - y\theta + 2k\pi y}$, $z \neq 0$.

Section 5, página 76

1. i, iii, iv.

2. (b) Solución parcial : $f(z) = z^2 - iz, -, -i(z^3 + z^2/2), z^4(1 - i/4)$.
3. (b) Ver la parte 2(b) precedente.
6. (a) Ver 2(b). Asimismo, $f(z) = z^2/(z + i)$.
7. $i/z + ic$, c real.

Sección 6, página 87

1. Solución parcial: velocidad $= 1,\ 1,\ \sqrt{2},\ 1/|z|^2,\ 1/|z|^2,\ 2|z|, 2|z|$. Algunos flujos de importancia en relación con este problema y con otros que se darán más adelante están representados en las Secciones 3 y 4 del Capítulo 5.
3. (b) Región exterior a la circunferencia que pasa por los puntos $a, ai/\sqrt{3}, -ai/\sqrt{3}$.

Sección 7, página 88.

1.2. Comprobar sumando.

6.1. (a) La representación gráfica puede verse en la Sección 3 del Capítulo 5.

Capítulo 3

Sección 1, página 100

1. $2\pi i$.
2. (b) $4z^3$: $-5, 0, 0, 0, -8 + 24i$. $\bar{z}$: $\frac{1}{2} + i, -\pi i, 18\pi i, 4\pi i, 2 + 2i/3$.
   $1/z$: $(\text{Log } 2)/2 + i\pi/4, -\pi i, 2\pi i, 4\pi i, (\text{Log } 5)/2 + i\,\text{Tan}^{-1}(\frac{1}{2})$.

Sección 2, página 111.

1. $2\pi i, 0, 0, 0, 0, 0$.
3. (a) $(2^0\!/_3)(2i - 1)$, $(\sqrt{5}/3)(12 + 16i)$; (b) $|I| \leq 20\sqrt{2}$.
5. $\text{Log}[(1 + i\sqrt{3})/(1 - i\sqrt{3})] = 2i\pi/3$.

Sección 6, página 141.

4. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \dfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}, \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^n}{nn!}, \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{z^n}{n^2}$.
6. $a_n = \dfrac{P(1)}{2} - \dfrac{P(2)}{10}\dfrac{1}{2^n} + \dfrac{P(i)}{2 - 6i}(-i)^n + \dfrac{P(-i)}{2 + 6i}(i)^n$.

Sección 7, página 150.

6. $1, \pi i/2, \infty$.

Sección 8, página 158.

1. (i) sing. es. en ∞; (ii) polo orden 1 en 0, sing. es. en ∞; (iii) polo orden 1 en 1, sing. ev. en 0, sing. es. en ∞; (iv) polo orden 1 en i y $-i$. sin. ev. en ∞; (v) sing. ev. en 0, polo orden 1 en i, $-i$, polo orden 2 en ∞; (vi) sing. es. en ∞; (vii) polo orden 1 en 0, sing. ev. en π, polo orden 2 en $n\pi \neq 0$ o π, sing. es. no aislada en ∞.
2. (i) sing. es. en ∞; (ii) polo orden 1 en $z = \pi/2 + n\pi$, sing. no aislada en ∞; (iii) sing. ev. en 0, polo orden 1 en $z = 2\pi in \neq 0$, sing. no aislada en ∞; (iv) polo orden 1 en 1 y en -1, sing. ev. en ∞; (v) polo orden 4 en 0, sing. ev. en ∞; (vi) sing. es. en ∞; (vii) sing. ev. en 0 y π, sing. es en ∞.

6. $a_n = 1/(n+5)!$; $b_{2n-1} = (-1)^n/(2n+1)!$, $b_{2n} = 0$;
$c_k = -6!/[(3+k)!(3-k)!]$.
9. $1 + 2\Sigma_1^{\infty}(-1)^n(1/z)^n$.
11, 12. Comprobar sumando.

Sección 9, página 167.

3. $n!\int_0^{\pi} e^{m\cos\theta}\cos(m\,\mathrm{sen}\,\theta - n\theta)\,d\theta = \pi m^n$ donde $m = 1/c$.

Sección 10, página 172.

6.1. $B_n = \dfrac{n!}{2\pi}\int_0^{2\pi} \dfrac{e^{\cos\theta}\cos[(n-1)\theta + \mathrm{sen}\,\theta] - \cos(n-1)\theta}{e^{2\cos\theta} - 2e^{\cos\theta}\cos(\mathrm{sen}\,\theta) + 1}\,d\theta$.

6.5. $z - (\tfrac{1}{2})(\alpha+\beta) - (\tfrac{1}{8})(\alpha-\beta)^2 z^{-1}$.
8.1. $f(0) = e, f'(0) = -e/2$.
8.2. 10.

Capítulo 4,
Sección 2, página 192.

2. (punto singular, residuo) = $(0,-1)$, $(1,1)$; $(e^{(1+2k)\pi i/4}, (-1)^k/4i)$; $(0,1/\pi)$; $(\pi,-1-\pi i)$; $(1,\tfrac{3}{4})$, $(i,\tfrac{3}{4}+i/2)$, $(-i,\tfrac{3}{4}-i/2)$, $(-1,-\tfrac{3}{4})$.
3. (iii) se transforma en $\pi i e^{-3/2}$.
7. $I(a) = 0, 1, 3, 2, 3, 1, 0$ en intervalos separados por los puntos $a = -\pi - 4, -4, -\pi, \pi - 4, 0, \pi$.

Sección 3, página 200.

4. Coincide con el valor de la integral.

Sección 5, página 214

1. $DI_1 = \pi\,\mathrm{sen}\,\pi p\cosh\pi q$, $DI_2 = -\pi\cos\pi p\,\mathrm{senh}\,\pi q$ donde $D = \mathrm{sen}^2\pi p + \mathrm{senh}^2\pi q$.
2. Obsérvese que el cambio de variable $x^2 = t$ reduce la primera integral a la del Ejemplo 5.1.

Sección 7, página 230.

3. (a) $\pi + 2\,\mathrm{Tan}^{-1}(y/x)$.
4. $\mathrm{sen}\,at$, $(1-\cos at)/a$, te^{-at}, $t^7/7!$, $\cos at$.

Sección 8, página 240.

2. $-1, 0, -1, -1$.
6. $(\pi/4)(2-\sqrt{2})$, $3\pi/8$, $(\pi/4)(\sqrt{2}-1)$.

Sección 10, página 253.

1.3. El dominio comprendido entre dos circunferencias tangentes interiores.

Capítulo 5

Sección 1, página 266

5. $2z/(z+1)$, $i(z-1)/(z+1)$, z, iz, $(z+i)/(z-1)$.

Sección 2, página 275.

2. $w = (iz+\lambda)/(z+i\lambda)$; $w = 0$ para $z = i\lambda$; el semiplano superior sobre $|w| < 1$ para $\lambda > 0$ y sobre $|w| > 1$ para $\lambda < 0$; solamente algunas.
3. $w = \beta b(z - \alpha a)/(\bar{\alpha}z - a)$.
4. $w = \gamma(\bar{\alpha}z - 1)/(z - \alpha)$, $|\gamma| = 1$, $|\alpha| < 1$.
5. $w = [z(\alpha - 2) + i(\alpha + 2)]/[z(2\alpha - 1) + i(2\alpha + 1)]$, $|\alpha| = 1$.
6. $w = i(\alpha + 1 - z)/(\alpha - 1 + z)$ donde $|\alpha| = 2$.

Sección 3, página 287.

7. $R = 2 + \sqrt{3}$, $2h(z) = (z/R) + (R/z)$,
$H(w) = [2w - \sqrt{3}(w^2 - 1)^{1/2}](2 + \sqrt{3})$.

Sección 4, página 295.

1. γ introduce una rotación del semiplano y una homotecia.
6. $f'(z) = \gamma z^{-2/3}(z-1)^{-2/3}$, $f'(z) = \gamma z^{\alpha-1}(z-1)^{\beta-1}$ siendo los dos ángulos $\pi\alpha$, $\pi\beta$.
7. (a) $f'(z) = \gamma(z+1)^{-1/2}z^{1/2}$; (b) $f'(z) = \gamma(z+1)^{1/2}(z-1)^{-1/2}$. Las dos ecuaciones poseen integrales elementales $f(z)$.

Sección 5, página 303.

4. $0 < c < 2/3$, none, $0 < c < \sqrt{578} - 24 \doteq 0.00174$.
5. $c = a + ib$ verifica $3a < 2$, $8b^2 < a(2-3a)^2$. A modo de comprobación, obsérvese que $8b^2 = a(2-3a)^2$ condición para que exista una raíz imaginaria $z = iy$.
9. Por ejemplo, elegir c convenientemente en el Problema 4.

Sección 8, página 321.

1.2. $\dfrac{w-1}{w+1} = 2^n\dfrac{z-1}{z+1}$, así que $w = \dfrac{z(1+2^n)+(1-2^n)}{z(1-2^n)+(1+2^n)} = T^n z$;

$\dfrac{w+1}{w-3} = \left(\dfrac{i-1}{i+3}\right)^n \dfrac{z+1}{z-3}$, $\dfrac{w-1+i}{w-1-i} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n \dfrac{z-1+i}{z-1-i}$.

2.5. $\left|\dfrac{az+b}{cz+d}\right| \leq \dfrac{|bc-ad|\rho + |b\bar{d} - \rho^2 a\bar{c}|}{||d|^2 - \rho^2|c|^2|}$, $|z| = \rho$.

2.6. $(az+b)/(cz+d)| \leq 1$ para $|z| \leq 1$ si y solamente si $|bc-ad| + |b\bar{d} - a\bar{c}| \leq |d|^2 - |a|^2)(1-|c|^2) + (1-|b|)^2$, $|c|^2 + |b| \leq 1$. Deducir que se verifica también $|a|^2 + |b|$ $|c|^2$, $|c| < |d|$; $|a + bz/(1-cz)| \leq 1$ para $|z| \leq 1$ si y solamente si $1 + 2\mathrm{Re}\,a\bar{b}c \leq (1 -$ ≤ 1, por lo que la condición es simétrica en (a, c).

3.2. $(u_0 - u_1)\phi^* = A(u - u_1) + B(u_0 - u)$, $\phi^* \operatorname{Log}(r_0/r_1) =$

$A \operatorname{Log}(r/r_1) + B \operatorname{Log}(r_0/r)$, $(\theta_0 - \theta_1)\phi^* = A(\theta - \theta_1) + B(\theta_0 - \theta)$ donde $\theta = \operatorname{Arg} w$.

3.3. Rectas paralelas, circunferencias concéntricas, rectas que pasan por el origen.

3.4. $w = z/(1 - z)$ aplica la región sobre un ángulo.

3.6. Las equipotenciales son circunferencias que pasan por x_0 y x_1. Las líneas de corriente son circunferencias respecto de las cuales los puntos x_0 y x_1 son inversos. Comparar el resultado con la Figura 3-3.

4.1. $H_1(x,y) = (2/\pi)\operatorname{Arg}\operatorname{sen} z = (2/\pi)\operatorname{Tan}^{-1}(\cot x \tanh y)$;
$H_2(x,y) = H_1(\pi/2 - x, y) = (2/\pi)\operatorname{Tan}^{-1}(\tan x \tanh y)$;
$H_3(x,y) = 1 - H_1(x,y) - H_2(x,y)$. La solución para valores generales de A, B, C es $H = AH_1 + BH_2 + CH_3$, por consiguiente, puede expresarse en función de H_1.

4.3. $A + (2/\pi)(B - A)\operatorname{sen}^{-1}x$, $0 \leq \operatorname{sen}^{-1}x \leq \pi/2$.

4.4. Se hace $\zeta = \sqrt{z} = \operatorname{sen} w$. Se obtiene así la fórmula anterior con $\sqrt{x}$ en lugar de x.

Capítulo 6.

Sección 2, página 344.

2. $\frac{1}{2}$, 1, $1/\sqrt{2}$, $\frac{5}{3}$, e.

5. Residuo $(-1)^n/n!$ at $z = -n$; residuo $\pm i/(2n)$ at $z = \mp ni$; residuo 0 en $z = -n$; residuo $(\operatorname{senh} n^2)/(2n!n)$ a $z = \pm in$.

Sección 4, página 359.

1. (b) Ver Capítulo 3, Problema 2.2.
2. Sí.
4. Solución parcial: $e^{r\cos\theta}\cos(r\operatorname{sen}\theta) = \Sigma(r^n \cos n\theta)/n!$.
5. Se obtiene (4.12) con $R = 1$.
6. $f(z) = \dfrac{\theta_0}{\pi} + \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} n\theta_0}{n} z^n$.
10. $L(r) = 2\pi r/(1 - r^2)$, $2\pi r J_0(ir)$; $A(r) = \pi r^2/(1 - r^2)^2$, $\pi i r J_0'(2ir)$.

Sección 5. página 367.

2. $f'(z) = -\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} te^{-t^2}\operatorname{sen} zt\, dt$, $\displaystyle\int_1^{\infty} t^z \operatorname{Log} t \operatorname{sech} t\, dt$.

Sección 6, página 377.

3. Ver Problema 4.

6. Si $u_n = (2n - 1)!\,/|z|^{2n}$ entonces $u_{n+1}/u_n > 1$ si y sólo si $4n^2 + 2n > |z|^2$. El segundo caso es parecido.

Sección 8, página 394.

1. $\Pi(1 - z/k^{3/2})$, $\Pi(1 - z/k^{3/4})\exp(z/k^{3/4})$,
$\Pi(1 - z/k^{1/2})\exp[z/k^{1/2} + z^2/(2k)]$.

4. $\Pi_{n=1}^{\infty}(1 - z/n)^n \exp[z + z^2/(2n)]$

Sección 9, página 403.

3.4. (a) $1 - \frac{2m}{2!}z^2 + \frac{2^2m(m-2)}{4!}z^4 - \frac{2^3m(m-2)(m-4)}{6!}z^6 + \cdots$

$1 - \frac{m^2}{2!}z^2 + \frac{m^2(m^2-2^2)}{4!}z^4 - \frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{6!}z^6 + \cdots$

$1 - \frac{m(m+1)}{2!}z^2 + \frac{m(m-2)(m+1)(m+3)}{4!}z^4 - \cdots.$

(b) $z - \frac{2(m-1)}{3!}z^3 + \frac{2^2(m-1)(m-3)}{5!}z^5$

$- \frac{2^3(m-1)(m-3)(m-5)}{7!}z^7 + \cdots$

$z - \frac{m^2-1^2}{3!}z^3 + \frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{5!}z^5$

$- \frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)(m^2-5^2)}{7!}z^7 + \cdots$

$z - \frac{(m-1)(m+2)}{3!}z^3 + \frac{(m-1)(m-3)(m+2)(m+4)}{5!}z^5 - \cdots$

(c) Haciendo $z = 0$ se tiene $mY(0) = -Y'(0)$ si $Y''(0)$ existe;

$1 - mz - \frac{m(1-m)}{(2!)^2}z^2 - \frac{m(1-m)(2-m)}{(3!)^2}z^3 - \cdots.$

3.5. $\{a_{2n}\} = \{1, -\pi^2/3, -\pi^4/45, -2\pi^6/945, -\pi^8/4725, \cdots\}$.

9.1. Una entera, dos enteras, una triforme, tres enteras, una biforme.

Índice alfabético

A

Aceleración, compleja, 170
Analiticidad, definición de, 46, 168
  de la transformación de Laplace, 364
Anillo, 23, 274
Aplicación uno a uno, 258, 313
Aplicaciones, 25
  conforme, 259
  sobre, 259
  uno a uno, 258, 313
Área de la imagen de un disco, 359
  del triángulo, 15
Arco, 95
  tangente al, 101
Arg z, 16
  como función de z, 61
  definición analítica, 71
  valor principal del, 16
Argumento, *véase* Arg z
  principio de variación del, 217
Armaduras de un condensador plano, 295

B

Banda, 23
Bernulli, ley de, 86
  números de, 172
Bilineales, transformaciones, 258
Biunívoca, aplicación, 258
Biyectiva, aplicación, 258
Blaschke, productos de, 408
Bode, acuaciones de, 226, 412
Borel, teorema de, 175

C

Cadena, 398
Campo de fuerza central, 169
Canónico, producto, 409
Circulación, 80, 170
  alrededor de un cilindro elíptico, 291
Círculo, 44, 262, 267, 353
  punto inverso respecto al, 268
Cis θ, 21
Cociente de números complejos, 4
Coeficientes de Taylor, 175
Conexo, conjunto, 23
Conjugado
  armónico, 72, 284
  flujo, 81
  fórmulas de Poisson, 225
  de números complejos, 3
  y simplemente conexo, 184
Conjunto abierto, 23
  conexo, 23
Continuidad, 32
  de derivadas parciales, 133

Continuidad, ecuación de, 80
uniforme, 34
Contorno, 97
cerrado simple, 186
deformación del, 251
de Jordan, 186, 234, 245
orientado de un dominio, 246
Convergencia absoluta, 209
de integrales, 201, 204
de series, 339
de sucesiones, 136, 331
uniforme, 136, 331
de funciones armónicas, 407
de productos infinitos, 380
de sucesiones, 136, 331
Corte transversal, 249
Cos z, 51
definición de series de potencias, 353
Criterio de convergencia Cauchy
(*véase* Teorema, 1.2), 333
para integrales, 362
del cociente, 341
de Routh-Hurwitz, 303
M, para integrales, 364, 367
para productos, 381
para series, 340
uniforme de Cauchy, 362
Curva, 95
cerrada, 95
poligonal, 177
simple, 95
traza de la, 95

D

Definición analítica de arg z, 16, 71
Deformación de contorno, 251
Derivada, definición de, 42
normal, 326
Desarrollo en fracción continua de Stieltjes, 302
fracción parcial, 160
fracciones simples, 160
Mittag-Lefller, 343, 391
para el caso de raíces distintas, 88
series, 369, 370
Mittag-Lefller, 343, 391
Taylor (*véase* Teorema 6.1), 136
Weiertrass (*véase* Teorema 8.3), 389
Desigualdad de Cauchy, 133, 355
Cauchy-Schwarz, 405
Harnack, 405
Hölder, 174
Jensen, 224
Schwarz, 401
triángulo, 9
Desigualdades, 144, 146, 148
de Cauchy, 133, 355
del desarrollo de Laurent, 163
emisión de, 325
para funciones armónicas, 407
de inversa analítica, 306
Diferenciabilidad, 46
condición necesaria y suficiente para la, 89
Dipolo, 279
Disco, 13, 22
Distancia entre dos puntos, 11
cordal, 40
Dominio, 23, 37, 306
complementario, 270
contorno orientado, 246
convexo, 128
estrellado, 117
exterior, 186
interior, 186
preservación (*véase* Teorema 6.2), 306
simplemente conexo, 178
y el conjugado armónico, 184
y el logaritmo analítico, 184
y el número de vueltas, 184

E

Ecuación de Bessel, 351
función, 167, 352, 360, 366
la continuidad, 80
cuadrática, 14
cúbica, 38
solución trigonométrica, 89
diferencial, 327, 351, 403
de Chebyshev, 403
estable, 327
de l'Hermite, 403
de Legendre, 403
de Laguerre, 403
de Laplace, 72
de la línea, 20, 262, 267

Ecuación del paralelógramo, 14
Ecuaciones de Bode, 226, 412
de Cauchy-Riemann, 45
para funciones discontinuas, 89
y conformidad, 320, 321
y fluido fluye, 80
y matrices ortogonales, 322
Elipses e hipérboles homofocales, 56
Entorno, 23
Envoltura convexa, 89
Equipotenciales, 81, 277
Euler, notación para números complejos, 2, 37
Exponente fraccionario, 17, 59
Extremo superior, 144

F

Familia continua, 252
Flujo alrededor de una circunferencia, 90, 286
de una esquina, 281
cerca de una pared, 84
conjugado, 81
en un cuadrante, 278
de un fluido (*véase*, flujo), 78, 170
rebasando una barrera, 293
una elipse, 287
un segmento, 287
Flujos conjugados, 81
Fórmula de duplicación, 397
de inversión de Bromwich, 228, 412
de Mellin, 257
de Jensen, caso especial, 253
general, 255
de Poisson, conjugada, 225
para un semiplano, 224, 231
de Schwarz, 356, 360, 361, 366
de Stirling, 376
de Wallis, 170
integral de Cauchy, 128, 182
deducida por el teorema del residuo, 192
para un disco, 129
para un dominio simplemente conexo, 181
para el círculo de Poisson, 357, 369
Fórmulas de inversión de Mellin, 257
Fracción continua de Stirling, 302
Frontera natural, 409
de una función analítica, 409
Función, 24
analítica, 47
armónica, 325
compleja, 93
continua a trozos, 411
elemento, 398
entera, 51
exponencial, 49
definición de serie de potencias, 353
propiedades, 53
teorema de adición, 51
de Foster, 304
gamma, 394, 413
continuación analítica, 367
conexión con n!, 367
definida por integrales, 360
fórmula de Stirling para, 376
inversa analítica, 306
analiticidad de, 256, 306
o transformación, 29, 263
lineal, 177
meromorfa, 190
multiforme, 59
par, 52
periódica, 53
racional, 4
simple o univalente, 307, 312, 314
para impar, 300
parte entera de, 301
positiva, 299
simple, 307, 314, 405
subarmónica, 89
univalente, 307, 312
z de Riemann, 341, 360
Funciones armónicas, 71, 72, 325, 326, 407
convergencia uniforme, 407
diferenciabilidad, 357
continuas a trozos, 411
hiperbólicas, 52
principal reflexión, 409
trigonométricas, 52

G

Grado de un polinomio, 4
Grupo, 276
invariante, 324
modular, 277

H

Hamilton, 37
Hoja de la superficie de Riemann, 65
Homología, 412
Homotecia, 262
Homotópico, 412

I

Igualdad de Parseval, 355
  de polinomios, 411
Imagen, 25, 258
  de dominio, 258
  sobre un círculo, 264
Imágenes, método, 84
Integración por partes, 100
Integral, 94, 96
  de Bromwich, 228
    fórmula de inversión, 412
  convergencia de la, 201, 204
  curvilínea, 74, 79
  elíptica, 296, 329
  impropia, 194, 202
  independiente del camino, 98
  invarianza, 105
  como límite de una suma, 106-108
  de Poisson cerca de la frontera,
    comportamiento de la,
    para un disco, 369, 413
    para un semiplano, 231, 413
  de tipo Cauchy, 135
  valor principal, 201, 202
Integrales complejas, invariancia de las, 112
  impropias, 194, 201, 202
    convergencia absoluta de, 209
    definición de sucesión de (*véase* problema 5.6), 407
    diferenciación, 363
Interpolación con funciones enteras, 408
Intersección, 128
Invariante, 324
Invarianza de la razón doble, 264
  de integrales, 105
Inversión, 262
Isometrías del plano, 30
Isomorfismo, 37

L

Lagrange, 349
Lema de Jordan, 197
  de Schwarz, 150
  de Watson, 374
Ley asociativa, 2
  de Bernoulli, 86
    números, 172
  conmutativa, 2
  distributiva, 2
  de Newton del movimiento, 169
Leyes de Kepler, 169, 412
Límites, 31
Línea quebrada, 23, 177
Líneas de corriente, 81
  equipotenciales, 277
  de flujo, 277
  de fuerza, 277
  isotérmicas, 277
Log *z*, 58
  analiticidad, 62
  superficie Riemann, 65
Logaritmo analítico, 182, 184
  continuo, 101, 128
Longitud, 103
  de la imagen de un círculo, 359

M

Manantial, 83
Matrices y transformación bilineal, 276
  y la ecuación de Cauchy-Riemann, 322
  y números complejos, 38
  ortogonales, y aplicación conforme, 322
Método de imágenes, 84
  de Rankine, 90
Mod 2π, 16
Módulo, 8
  máximo, 147
    deducido del teorema de la aplicación abierta, 304
    para grado *n*, 173

N

Notación O de Landau, 370
Número de vueltas, 99, 111, 172, 182, 242
    simplemente conexo, 184

Números complejos, 1
diferencia de, 3
como matrices, 38
pares ordenados, 37
vectores, 9
de Fibonacci, 402

O

Operaciones con exponentes enteros, 6
fracciones y exponentes enteros, 6
Ortogonalidad de curvas u y v, 47
Osgood, 320

P

Paraconjugado, 296, 413
Paradoja hidrodinámica, 90
Para-impar, 301
Paralelismo de vectores complejos, 14
Pares ordenados como números complejos, 37
Parte entera de una función racional, 301
imaginaria, 2
principal, 158
real, 2
singular, 157, 165
Perfiles de Joukowski, 312
Período, 53
asociado con un resto, 244
complejo de e^z, 53, 353
de exp. z, 53, 353
Perpendicularidad de vectores complejos, 14
Plano complejo, 1
ampliado, 26
cortado, 60
Polígono, aplicación del, 288-295
cerrado simple, 178
triangulación del, 180
orientado, 179
positivamente, 179
curva de Jordan, 186
Polinomio, 8, 37
característico, 327
ceros del, 6
grado del, 4
Hurwitz, 47, 296, 298, 301, 303, 327
Polinomio, igualdad de, 412
Polo, 153, 156, 165
en el ∞, 156
orden de, 154, 156
simple, 154
Potencial de la velocidad, 81
Principio de la deformación de contornos, 252
del argumento, 217
del módulo máximo, 90
de reflexión de Schwarz, 316
para funciones armónicas, 409
de simetría para funciones armónicas, 410
Problema de Dirichlet, 230
para un disco, 357
para semiplano, 230
Producto canónico, 409
de género de Weierstrass, 388
infinito, 379
convergencia uniforme, 380
criterio M, 381
de números complejos, 2
diferenciación del, 48, 390
de Wallis, 378
Productos de Blaschke, 408
Prolongación analítica, 52, 350, 397
a lo largo de una línea poligonal, 399
Proyección estereográfica, 26, 40
Punto esencial, 154, 156, 165
de estancamiento, 91
fijo, 22
de una transformación bilineal, 266, 321
frontera, 24
«ideal», 26
en el infinito, 26
interior, 23
inverso, 266, 268
región, 24
separable, 36, 151, 156, 165
singular, 151, 156

R

Radio de convergencia, 347, 402
Raíces cuadradas, 14
Rama, 60, 62
corta, 62

Rama de una función analítica, 398
principal del logaritmo, 62
de z^d, 62
punto, 70, 210
Razón doble, 264, 325
Reflexión, 11
principal, 314
para funciones armónicas, 409
Región, 24
cerrada, 24
compacta, 24, 35
de existencia para funciones analíticas, 24
finita, 24
fundamental, 29, 55, 56, 328
infinita, 26
sucesión, 330, 338
no acotada, 26
triangular, 30
Regiones, 22
Regla de la cadena, 44, 49, 90, 101
de Hospital, 149
Representación conforme, 258, 259
y las ecuaciones de Cauchy-Riemann, 321, 322
y matrices ortogonales, 322
polar, 58
Residuo en el punto del infinito, 232
Rotación, 12, 20, 262

S

Sector, 23
Semiplano superior, 18
sen z, 51
aplicaciones, 56
ceros de, 55
producto para, 385
series de potencias, 353
Serie binómica, 142
de potencias, 346
definición de funciones elementales, 353
diferenciación, 140, 348, 403
Series, asintóticas, 370
extensión del dominio de, 378
geométrica, 336
integración y diferenciación de, 373
de Laurent, 161
Series de Laurent, derivación directa, 168
unicidad, 163
potencia, 346
suma, 339
suma y producto, 372
Taylor, 135, 136, 148
diferenciación de, 140
integración, 141
multiplicación, 143
para la transformada de Laplace, 374
unicidad, 371
valor principal de Cauchy, 339
de Cauchy, 334
Laurent, 161
Singularidad aislada, 154, 165
en ∞, 156
evitable, 35, 151, 165, 248
en ∞, 156
Sistema coordenado curvilíneo, 56
homofocal de coordenadas, 283
Solución trigonométrica de la cúbica, 89
Subconjunto compacto, 401
Sucesión uniforme de Cauchy, 334
Sucesiones, 330, 338
Suma de números complejos, 2
Sumas parciales, 338
Sumidero, 84
Superficie de Riemann, 55, 69, 70, 71, 308, 310
de log z, 65, 67
hoja de la, 65

T

Teorema Cauchy-Goursat, caso restringido, 122
de Borel, 175
de Casorti-Weierstrass, 155
de Cauchy, forma fuerte, 246
de Enestrom, 38, 223
de factorización, 35
de Gauss-Lucas, 88
de Hurwitz, 401
de la adición, 51
de la aplicación abierta, 304
de la curva de Jordan, 109, 186, 412
para un polígono cerrado, 178, 412
de Landau sobre inversión de series de potencias, 313, 406, 412

Teorema de la reactancia de Foster, 304
de Laurent, 162, 251
de Liouville, 133, 355
de Moivre, 21
de monodromía, 399, 400, 412
de Morera, 134
de Picard, 155, 412
de representación de Riemann, 319, 329, 413
de Riemann sobre singularidades evitables, 151
de Rouché, 217
del producto de Weierstrass, 389, 413
del residuo, 188, 252
en forma fuerte, 247
del número de vueltas, 243
del valor medio de Gauss, 405
fundamental del álgebra, 18, 35
demostración elemental, 41
por funciones subarmónicas, 90
integrales, 121
el módulo mínimo, 149
por teorema de Liouville, 134
el teorema de Rouche, 222
del cálculo, 95, 97
integral de Cauchy, 113
forma fuerte, 246
para un dominio simplemente conexo, 186
para un triángulo, 114, 122
de Steiner, 322
Teoría de homotopía, 412
Transformación, 25, 263
bilineal, 260
punto fijo de la, 266
elíptica o hiperbólica, 322
idéntica, 263
de Laplace, 227, 360
analiticidad, 364
desarrollo asintótico por, 374
inversión, 228
lineal, 260
de Schwarz-Christoffel, 288, 413
Transformaciones repetidas, 321
grupos de, 276
Transformada de Hilbert, 226, 256, 412
Transformada de Laplace, 227, 360
Translación, 11, 262
de arco, 101
de círculo, 111
Traza de una curva, 95
Triángulo, 15, 30
área del, 15
desigualdad, 9
Triangulación de un polígono cerrado, 180, 412

U

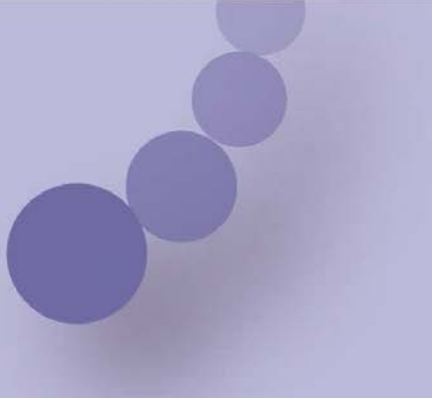
Unidad, 3
Unión, 128
Uno a uno, aplicación, 258

V

Valor absoluto, 8
algebraico del área, 22
complejo de las funciones, 93
medio de una función continua, 146, 147
principal del argumento, 16
de Cauchy, 194, 201, 202
para series infinitas, 339
de una integral, 194, 201
Vecindad, 21
de ∞, 26
Vector tangente, 101
Vectores, como números complejos, 9
tridimensionales, 15
Velocidad compleja, 80, 169, 271
potencial, 81
Vórtice, 84

W

Weierstrass, 349
criterio μ de, 364
factores primarios, 387
producto de género m, 388



LEVINSON • REDHEFFER

CURSO DE VARIABLE COMPLEJA

Este libro está dirigido a estudiantes con distinta preparación, o que les une un interés común en el **Análisis complejo**, por las aplicaciones que tiene. El contenido del libro es lo que se considera como mínimo indispensable para los matemáticos, los físicos y los ingenieros técnicos

EDITORIAL REVERTÉ

www.reverte.com